

Cálculo Básico para Ingenieros

Versión 1.0 (6 de septiembre de 2020)

David J. Santos
Universidad San Pablo-CEU

Prólogo

Esta breve obra (*Cálculo Básico para Ingenieros*) nace con un objetivo claramente utilitario: ofrecer una síntesis del Cálculo Infinitesimal (en una y dos variables) que permita al estudiante de Ingeniería abordar con solvencia matemática el aprendizaje de disciplinas técnicas¹.

Es perfectamente constatable, por cualquiera que lleve algún tiempo impartiendo clase en primer curso en las escuelas de Ingeniería españolas, que los alumnos que emergen del Bachillerato poseen una formación matemática que suele ser deficiente, fragmentada, sin unidad de ninguna clase, y muy reduccionista en su planteamiento, que no es otro que la adquisición de destreza en la resolución de los *ejercicios tipo* que constituyen la Prueba de Matemáticas para el acceso a la Universidad española.

El diagnóstico anterior obliga a plantear un curso necesariamente centrado en el desarrollo de la capacidad de análisis, prácticamente inexistente en el alumno, pero sin perder de vista la orientación utilitaria. No se trata, por tanto, de aprender a detectar y tratar *patologías matemáticas* (eso sería más bien el objetivo de un curso de Análisis Real), sino de *aplicar* ideas matemáticas en contextos reales, en los que sea preciso enfrentarse a un *problema concreto*. Ello conlleva, necesariamente, sacrificar el rigor matemático en el tratamiento formal.

Nuestro curso parte de la siguiente premisa: el alumno *maneja* una serie de ideas básicas del Cálculo Infinitesimal de una variable. Aun así, la experiencia nos demuestra que es necesario revisar y unificar algunas de estas ideas, y a ello se dedica el primer capítulo (Preliminares). Inmediatamente después, en el capítulo 2, nos centramos en las aplicaciones del cálculo de una variable a la resolución de problemas de visualización sencilla (cálculo de áreas y volúmenes, fundamentalmente). Antes de introducirnos en el cálculo con funciones de dos variables, damos unas nociones mínimas del estudio de la convergencia de series infinitas, e introducimos al estudiante en el uso del desarrollo en serie de Taylor.

El cálculo con funciones de dos variables se aborda en dos capítulos, uno en el que se extienden los principales conceptos de análisis relacionados con la diferenciación (capítulo 4), y otro ya específico de integración múltiple (capítulo 5). Creemos que estos dos capítulos son los más exigentes del curso. Avanzar en ellos depende críticamente de haber desarrollado la capacidad resolutoria mediante problemas de cálculo con funciones de una variable. Finalmente, cerramos la obra con un capítulo introductorio a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

El Cálculo Infinitesimal no es sencillo, y el curso que se plantea es denso². Exige un contacto constante del estudiante con la disciplina. Para avanzar es absolutamente necesario enfrentarse a ejercicios de complejidad creciente, que (1) vayan poniendo a prueba la correcta comprensión de las ideas clave, (2) reduzcan la inicialmente inevitable confusión, y (3) proporcionen seguridad al estudiante. Para ello, al final de cada capítulo se proponen una selección de *Ejercicios* y otra de *Problemas*. Los Ejercicios constituyen un material

¹Servir a este objetivo supone fijar previamente un planteamiento pedagógico, que se describe brevemente en el Apéndice A.

²Académicamente, este curso se encuadra en una asignatura de 6 ECTS del primer semestre del primer curso de un Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación.

II

de autoevaluación de primer nivel: permiten verificar la comprensión y uso de las principales ideas. Están organizados secuencialmente de manera paralela a como las ideas son introducidas en el capítulo. Los Problemas suelen tener un nivel de complejidad mayor: permiten verificar si se ha alcanzado un nivel de comprensión profundo, necesario para abordar con éxito los exámenes de la asignatura. Están deliberadamente desordenados, tanto en su temática como en su complejidad.

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Conceptos básicos	1
1.2. Tipos de funciones	2
1.3. Límites, continuidad y derivada	3
1.4. Aplicaciones de la derivada	5
1.5. Integral indefinida	5
1.6. Integral definida	6
1.7. Ejercicios propuestos	7
1.8. Problemas propuestos	10
2. Aplicaciones de la integral definida	13
2.1. Cálculo de áreas planas en coordenadas cartesianas	13
2.2. Cálculo de áreas planas en coordenadas polares	14
2.3. Cálculo de volúmenes	16
2.3.1. Volúmenes de objetos con sección regular	16
2.3.2. Volúmenes de objetos de revolución	16
2.4. Cálculo de longitudes de curvas planas	21
2.4.1. Longitud de una curva en coordenadas cartesianas	21
2.4.2. Longitud de una curva en coordenadas polares	22
2.5. Cálculo de áreas de objetos de revolución	22
2.6. Integrales impropias	23
2.7. Ejercicios propuestos	24
2.8. Problemas propuestos	25
3. Series infinitas	35
3.1. Conceptos básicos	35
3.2. Criterios de convergencia	36
3.2.1. Criterio del término general	36
3.2.2. Criterio de la integral	36
3.2.3. Criterio del cociente	36
3.2.4. Criterio de la raíz	37
3.3. Desarrollo en serie de Taylor	37

3.4. Ejercicios propuestos	38
3.5. Problemas propuestos	38
4. Funciones de varias variables	41
4.1. Funciones de varias variables	41
4.2. Límites y continuidad	42
4.3. Derivadas parciales	43
4.4. Reglas de la cadena	43
4.5. Derivadas direccionales y gradiente	44
4.6. Interpretación geométrica del gradiente	46
4.7. Extremos de funciones de varias variables	46
4.8. El método de los multiplicadores de Lagrange	48
4.9. Ejercicios propuestos	48
4.10. Problemas propuestos	49
5. Integración múltiple	53
5.1. La idea de integración iterada	53
5.2. La integral doble	54
5.2.1. La integral doble en coordenadas polares	55
5.2.2. La integral doble en coordenadas arbitrarias: El Jacobiano	56
5.3. Área de una superficie	58
5.4. La integral triple	60
5.5. Ejercicios propuestos	62
5.6. Problemas propuestos	63
6. Ecuaciones diferenciales ordinarias	69
6.1. Conceptos básicos	69
6.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden	70
6.2.1. Ecuaciones separables	70
6.2.2. Ecuaciones exactas	71
6.2.3. Ecuaciones lineales	73
6.2.4. La iteración de Picard	75
6.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden	76
6.3.1. Ecuaciones homogéneas	76
6.3.2. Ecuaciones no homogéneas	79
6.4. La transformada de Laplace	80
6.4.1. Definición y propiedades	81
6.4.2. Tabla de transformadas	82
6.4.3. Resolución de EDOs mediante transformada de Laplace	84
6.5. Ejercicios propuestos	85
6.6. Problemas propuestos	87

A. Planteamiento pedagógico	91
A.1. Cambio de expectativas	91
A.2. Dinámica docente	92
A.3. Adquisición de capacidad resolutive	93
A.4. Metodología de resolución de problemas	94
A.4.1. Comprensión del problema	94
A.4.2. Reflexión mediante Modelos de Referencia adecuados	95
A.4.3. Generación de una estrategia de resolución	95
A.5. Actitud	95
B. Cómo estudiar una Ingeniería	97
B.1. Estudio activo	97
B.2. Práctica deliberada	98
B.3. El papel de la motivación	100
B.3.1. Educar la concentración	100
B.3.2. Educar la perseverancia	100
B.3.3. Gestionar el fracaso	100
C. Manipulación de números complejos	103
C.1. Suma de números complejos	104
C.2. Producto de números complejos	104
C.3. Conjugación de números complejos	104

Capítulo 1

Preliminares

Este breve capítulo trata de revisar, de manera muy directa, una serie de conocimientos previos que todo alumno que ingresa en la Universidad debería manejar sobre Análisis Real elemental (Cálculo de una Variable). Al alumno que necesite ampliar la información aquí contenida, o buscar una justificación de la misma, se le remite a la Bibliografía de la asignatura “Cálculo” (véase la Guía Docente de la asignatura).

1.1. Conceptos básicos

El objeto matemático central del Análisis Real es la función. Una función es una correspondencia entre dos conjuntos cualesquiera. Nosotros estamos aquí interesados en las llamadas *funciones reales de variable real*. Se trata de funciones que a números reales, pertenecientes a un subconjunto de los números reales denominado *dominio*, asignan números reales, que determinan un conjunto denominado *imagen*. Esta asignación debe realizarse de tal manera que a cada elemento del dominio le corresponda uno sólo de la imagen. Matemáticamente, lo que hemos dicho hasta ahora suele expresarse así: $f: X \rightarrow Y$, donde X es el dominio, e Y es la imagen. Esta correspondencia puede expresarse también elemento a elemento: $y = f(x), \forall x \in X, \forall y \in Y$.

Resulta de gran valor práctico poder visualizar funciones. En el caso de las funciones reales de variable real, esto se realiza en \mathbb{R}^2 . Como es sabido, los elementos de \mathbb{R}^2 son pares de números reales, (x, y) . En nuestro caso, nos valdremos de la relación $y = f(x)$ para representar la función f mediante los puntos $(x, f(x)), \forall x \in X$.

El alumno debería estar ya familiarizado con algunas funciones elementales, como la recta, $y = mx + n$ ($m, n \in \mathbb{R}$) o la parábola, $y = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

Una propiedad matemática con relevancia gráfica es la *simetría* de una función. Las funciones simétricas pueden ser de dos tipos: pares o impares. Una función f es *par* si $f(-x) = f(x)$, e *impar* si $f(-x) = -f(x)$. Una función que no es par ni impar se dice que carece de simetría. Por ejemplo, la parábola $y = x^2$ es una función par, la recta $y = 3x$ es una función impar, mientras que la recta $y = 2x - 1$ carece de simetría.

También es interesante identificar la correspondencia entre distintas manipulaciones analíticas sobre funciones y sus consecuencias gráficas. Por ejemplo, dada una función $f(x)$, si generamos una nueva función $g(x) = f(x) + k$, es sencillo comprobar que g es una versión

desplazada hacia arriba o hacia abajo una distancia $|k|$ (dependiendo, respectivamente, de si $k > 0$ o $k < 0$). Es posible también identificar desplazamientos horizontales. Sea ahora $g(x) = f(x - a)$. Es sencillo verificar que g es una versión de f *desplazada* hacia la derecha la cantidad $|a|$, si $a > 0$, y hacia la izquierda, la misma cantidad, si $a < 0$. De especial interés en Ingeniería son las funciones *periódicas* o repetitivas. Una función $f(x)$ se dice *periódica* si existe un número positivo p tal que $f(x + p) = f(x), \forall x$. El menor valor de p recibe el nombre de *periodo* de f . El alumno debería estar familiarizado con las funciones trigonométricas $\sin x$ y $\cos x$, que son *periódicas* de periodo 2π , y la función $\operatorname{tg} x$, que es *periódica* de periodo π .

Cabe también una manipulación *expansiva* o *compresiva* de una función dada. Así, $g(x) = cf(x)$, con $c > 0$, conduce a una *expansión/compresión vertical* de $f(x)$ (en función, respectivamente, de que $c > 1$ o $c < 1$). Por su parte, $g(x) = f(x/c)$ puede verse como un *escalado horizontal* de $f(x)$ por un factor c , que será *expansivo* si $c > 1$ y *compresivo* si $c < 1$.

Finalmente, en ocasiones nos veremos obligados a considerar *regiones* de \mathbb{R}^2 limitadas por funciones. Estas regiones *elementales* o *simples* pueden ser de dos tipos: verticales u horizontales. Una *región verticalmente simple* (RVS), es el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$, en donde f y g son dos funciones bien definidas en el intervalo $[a, b]$. De manera análoga, una *región horizontalmente simple* (RHS) es el conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, n(y) \leq x \leq m(y)\}$, en donde m y n son también dos funciones bien definidas en el intervalo $[c, d]$. Observe que una RVS define una *banda* de puntos limitada verticalmente, y una RHS una *banda* limitada horizontalmente. De ahí sus denominaciones respectivas. Véase la Figura 1.1.

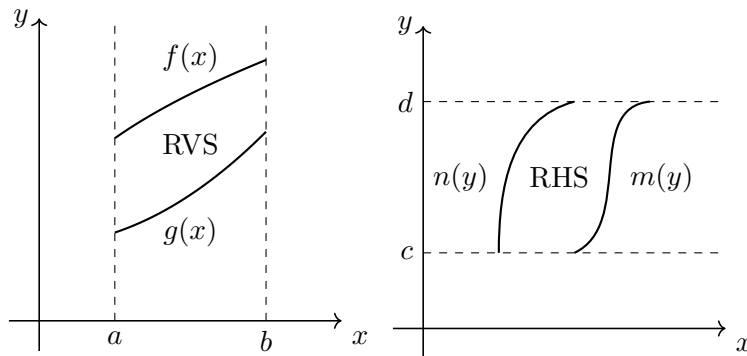


Figura 1.1: Regiones vertical y horizontalmente simples.

1.2. Tipos de funciones

Las funciones más sencillas son las *polinómicas*, que el alumno conoce bien. Son de la forma: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, en donde los a_i son los *coeficientes* (reales) del polinomio y n es un entero positivo denominado *grado* del polinomio. El uso del sumatorio permite expresar este tipo de función de manera compacta: $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Las rectas y parábolas son ejemplos de polinomios. El dominio de cualquier polinomio es \mathbb{R} .

Las funciones *racionales* resultan del cociente de dos funciones polinómicas: $f(x) = p(x)/q(x)$. Observe que el dominio de una función racional viene dado por los $x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0$.

De manera más general, las funciones *algebraicas* son el resultado de operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, realización de raíces) sobre polinomios.

Las funciones *trascendentes* son aquellas que *no* son algebraicas. El alumno ya conoce algunas de ellas: todas las funciones trigonométricas (tanto circulares como hiperbólicas), las funciones exponenciales, y las funciones logarítmicas. Este tipo de funciones son muy usadas en Ingeniería, por lo que el alumno debe manejarlas con soltura.

Una función puede obtenerse como resultado de la actuación sucesiva, o *composición*, de dos funciones, sean éstas algebraicas o trascendentes. Dadas dos funciones f y g , definimos $f \circ g(x) = f(g(x))$. Observe que el dominio de $f \circ g$ son los x pertenecientes al dominio de g para los que $g(x)$ pertenece al dominio de f .

1.3. Límites, continuidad y derivada

El alumno que ingresa en la Universidad suele saber calcular límites, pues ha sido adiestrado en ello, pero, por extraño que parezca, en general no sabe qué es un límite. Quizás convenga empezar por aquí.

El límite es un instrumento de análisis matemático que, con resolución *microscópica*, permite dictaminar el comportamiento de una función en un punto (o en un entorno de un punto). Es decir, el límite es una *lupa matemática* que, principalmente, nos permite investigar en profundidad funciones. Casi todo el Análisis Matemático se construye a partir del uso de este instrumento, bien sea para determinar la continuidad de una función en un punto, definir la derivada de ésta en un punto, o generar el concepto de integración definida a partir de sumas de Riemann, por citar tres contextos matemáticos que consideraremos en este documento. En resumen: la teoría de límites es muy importante para los matemáticos, frecuentemente preocupados por la detección de comportamientos patológicos de funciones. Los ingenieros, sin embargo, solemos estar más interesados en comportamientos no patológicos y fundamentalmente macroscópicos, pues nuestro uso del concepto de función tiene como objeto el modelado de sistemas *reales*, de naturaleza física.

Como se ha dicho, el concepto de límite permite determinar la continuidad de una función f en un punto. En concreto, f será continua en $x = c$ si cumple lo siguiente:

- $f(c)$ existe.
- $\lim_{x \rightarrow c}$ existe.
- $\lim_{x \rightarrow c} = f(c)$.

Si una función f es continua en todos los puntos de su dominio X diremos que es continua en X . En general, y por simplicidad, nos interesa manipular funciones continuas, pero no siempre será posible.

Matemáticamente, la *derivada* de una función en un punto $x = c$ se define como un límite (siempre que éste exista):

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

De aquí se pueden deducir todas las reglas de derivación de funciones, que se memorizan en la escuela, y que usaremos exhaustivamente en esta asignatura. Si no está *íntimamente* familiarizado con estas reglas, conviene que las revise y practique cuanto antes.

La ecuación anterior define un protocolo de cálculo, pero es necesario tener una idea intuitiva que nos permita emplear creativamente el concepto de derivada de una función. Hay dos contextos canónicos en los que interpretar la derivada de una función en un punto:

1. **Contexto geométrico:** Considere la función continua $y = f(x)$. Como se ha dicho, una función puede verse como una curva en \mathbb{R}^2 . Sean ahora dos puntos de esta curva: $(c, f(c))$ y $(c+h, f(c+h))$. La recta que los une, y, por tanto, secante a la curva, vendrá dada por:

$$y - f(c) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}(x - c).$$

Observe que la pendiente de esta recta es el cociente del que hacemos el límite en la definición de $f'(c)$. Geométricamente, la acción asociada al límite es acercar entre sí los dos puntos que definen la recta secante, hasta que ésta se convierte en la tangente a la curva en $x = c$. Por tanto, podemos interpretar $f'(c)$ como la *pendiente de la recta tangente* a una curva dada por $y = f(x)$ en el punto $x = c$.

2. **Contexto físico:** Sea ahora una partícula moviéndose en línea recta. Su posición en cada instante se registra mediante la función del tiempo $x(t)$. Nos gustaría conocer la velocidad a la que se mueve en cada instante dicha partícula. Para ello, consideremos dos instantes t_1 y t_2 , separados un lapso de tiempo h ($t_2 = t_1 + h$). Podríamos estimar la velocidad promedio de la partícula entre ambos instantes como el cociente entre el espacio recorrido y el lapso de tiempo transcurrido:

$$v = \frac{x(t_1 + h) - x(t_1)}{h}.$$

Si hacemos tender, en este cociente, h a cero, dispondremos de una estimación muy precisa de la velocidad instantánea de la partícula en t_1 :

$$v(t_1) = x'(t_1) = \lim_{h \rightarrow 0} v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + h) - x(t_1)}{h}.$$

Por tanto, la derivada de $x(t)$ en un instante puede verse como la velocidad de la partícula en dicho instante. Evidentemente, esta interpretación de la derivada como medida de la *tasa de cambio*, o de la *sensibilidad al cambio*, puede extenderse a cualquier magnitud física y generalizarse a más dimensiones, lo que nos llevará, en la asignatura Ampliación de Matemáticas, a desarrollar la teoría de campos (escalares y vectoriales).

Antes de revisar las aplicaciones de la derivada, es conveniente introducir la idea de *derivación implícita*, pues, pese a tratarse de algo muy sencillo desde el punto de vista operativo, no suele incluirse en los programas de Matemáticas pre-universitarias.

Hasta el momento hemos supuesto que nuestras funciones pueden escribirse de forma *explícita*, como $y = f(x)$. Sin embargo, esto no tiene por qué ser siempre así; la función puede estar definida de manera *implícita*: $F(x, y) = 0$. Considere, como ejemplo, la función $y^2 = x^2 + \sin(xy)$. ¿Cómo calcular y' mediante las reglas de derivación, si no es posible despejar y en función de x ? Realmente es muy sencillo: (1) Se derivan ambos miembros de la ecuación que define implícitamente a la función, tratando a y como si fuera una función derivable de x . (2) Agrupamos y despejamos y' . En el ejemplo anterior: (1) $2yy' = 2x + \cos(xy)(y + xy')$. (2) $y' = \frac{2x + y \cos(xy)}{2y - x \cos(xy)}$.

1.4. Aplicaciones de la derivada

La interpretación geométrica del concepto de derivada de una función conduce de manera natural a que pueda ser empleada para detectar máximos y mínimos locales, puntos de inflexión (puntos de cambio en la concavidad), e intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función. Recordamos esquemáticamente estas ideas:

- Los puntos en los que $f'(x) = 0$ se denominan *puntos críticos*.
- Un punto crítico puede ser:
 - Un *máximo*, si $f''(x) < 0$.
 - Un *mínimo*, si $f''(x) > 0$.
 - Un *punto de inflexión*, si $f''(x) = 0$.
- Una función es creciente en un intervalo si su derivada es *positiva* en dicho intervalo.
- Una función es decreciente en un intervalo si su derivada es *negativa* en dicho intervalo.
- Una función es *cóncava* (\cup) en un intervalo si su *segunda* derivada es positiva en dicho intervalo.
- Una función es *convexa* (\cap) en un intervalo si su *segunda* derivada es negativa en dicho intervalo.

Muchos problemas de *optimización* se pueden reducir a calcular el máximo o mínimo de una función de una variable. Esta reducción en ocasiones requiere determinar una *función objetivo* a optimizar (normalmente dependiente de varias variables), y unas *funciones auxiliares* que introducen elementos de ligazón entre las variables y permiten reducir éstas a una.

1.5. Integral indefinida

Llamamos *función antiderivada* de una función $f(x)$ a la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$. Al conjunto de todas las posibles antiderivadas de una función $f(x)$ se le

llama la *integral indefinida* de $f(x)$, y se suele designar simbólicamente como $\int f(x)dx$. En este contexto, $f(x)$ recibe el nombre de *integrando* de la integral, y x se denomina la *variable de integración*. Es *muy* importante saber integrar. No es necesario ser un *gran maestro* de la integración, pero sí dominar las técnicas fundamentales de integración, que son las siguientes:

- Utilización de reglas básicas, lo que comúnmente se denomina *integración inmediata*.
- Integración por partes.
- Integración de funciones trigonométricas.
- Sustituciones trigonométricas.
- Integración de funciones racionales.

Al lector no familiarizado con estas técnicas se le remite a la Bibliografía de la asignatura Cálculo. Los libros de texto especificados cuentan con un capítulo dedicado a las técnicas de integración. Practique las distintas técnicas sobre los numerosos ejemplos propuestos en estos textos. Recuerde: En integración, la práctica es fundamental.

1.6. Integral definida

Se llama integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ al número real:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Este número puede ser interpretado como el área subtendida por la curva $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$, con $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Toda integral definida es siempre el resultado de sumar las contribuciones elementales de área correspondientes a cualquier partición del intervalo $[a, b]$ en subintervalos, cuando el tamaño de los subintervalos de esta partición tiende a 0. Esta suma de contribuciones elementales se denomina *suma de Riemann*. Lógicamente, esta suma deberá ser convergente, lo que requiere que (1) $f(x)$ sea continua en $[a, b]$, y (2) que el intervalo de integración sea finito. Las integrales definidas en las que falla alguna de estas dos restricciones se denominan *impropias*. Veremos más adelante en el curso (véase la Sección 2.6) que estas integrales podrán o no ser convergentes.

La regla de Barrow proporciona una conexión entre la integral definida y la integral indefinida:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Las integrales definidas verifican estas propiedades:

- $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$

- $\int_a^a f(x)dx = 0.$
- $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \forall k \in \mathbb{R}.$
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$

Dada una función cualquiera $f(x)$, podemos definir su *valor medio* en el intervalo $[a, b]$ como:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Muy importante: Con el siguiente capítulo, *Aplicaciones de la integral definida*, comienza el programa de la asignatura “Cálculo”. Si tiene dificultades de comprensión con alguna de las ideas contenidas en este capítulo, debe ponerse en contacto **urgentemente** con el profesor de la asignatura.

1.7. Ejercicios propuestos

En los ejercicios siguientes:

1. Intente representar aproximadamente las funciones que se facilitan. Se propone validar el trabajo de análisis realizado mediante www.wolframalpha.com.
2. Intente resolver las integrales propuestas. Están agrupadas por técnicas de integración. También en este caso puede validar su trabajo mediante www.wolframalpha.com.

[E-1.1] $y = kx.$

[E-1.2] $y = |x|.$

[E-1.3] $y = |x - x_0|.$

[E-1.4] $y = y_0 + kx.$

[E-1.5] $y = k/x.$

[E-1.6] $y = kx^2.$

[E-1.7] $y = A \text{ sen } (\omega x + \phi).$

[E-1.8] $y = x^n$, con $n = 1, 2, 3, -1, -2.$

[E-1.9] $y = a^x$, $a > 0$ y en los casos $a > 1$, $a < 1.$

$$[\mathbf{E-1.10}] \quad y = \log_a x, \quad a > 0 \text{ y en los casos } a > 1, a < 1.$$

$$[\mathbf{E-1.11}] \quad y = \operatorname{sen} x.$$

$$[\mathbf{E-1.12}] \quad y = \operatorname{cos} x.$$

$$[\mathbf{E-1.13}] \quad y = \operatorname{tg} x.$$

$$[\mathbf{E-1.14}] \quad y = 3 \operatorname{sen} 2x.$$

$$[\mathbf{E-1.15}] \quad y = 3x - x^3.$$

$$[\mathbf{E-1.16}] \quad y = x^2(2 - x)^2.$$

$$[\mathbf{E-1.17}] \quad y = \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

$$[\mathbf{E-1.18}] \quad y = x + 1/x.$$

$$[\mathbf{E-1.19}] \quad y = \frac{x}{1 + x}.$$

$$[\mathbf{E-1.20}] \quad y = \frac{8}{4 - x^2}.$$

$$[\mathbf{E-1.21}] \quad y = x\sqrt{1 - x}.$$

$$[\mathbf{E-1.22}] \quad y = \sqrt{\frac{1 - x}{x}}.$$

$$[\mathbf{E-1.23}] \quad y = \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

$$[\mathbf{E-1.24}] \quad y = x \exp(-x).$$

Integración inmediata

$$[\mathbf{E-1.25}] \quad \int \frac{dx}{ax + b}.$$

$$[\mathbf{E-1.26}] \quad \int \sqrt{x - 2}.$$

$$[\mathbf{E-1.27}] \quad \int \operatorname{sen} 5x.$$

$$[\mathbf{E-1.28}] \quad \int \frac{xdx}{x^2 + 1}.$$

$$[\mathbf{E-1.29}] \quad \int \operatorname{tg} x dx.$$

$$[\mathbf{E-1.30}] \quad \int \frac{dx}{x^2 + 4}.$$

$$[\mathbf{E-1.31}] \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}.$$

$$[\mathbf{E-1.32}] \int x \exp(x^2) dx.$$

Integración por expansión

$$[\mathbf{E-1.33}] \int (1 - \sqrt{x})^2 dx.$$

$$[\mathbf{E-1.34}] \int \frac{x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{x^2} dx.$$

$$[\mathbf{E-1.35}] \int \operatorname{tg}^2(x) dx.$$

$$[\mathbf{E-1.36}] \int \operatorname{sen}^2(x) dx.$$

$$[\mathbf{E-1.37}] \int \operatorname{sen} x \cos(3x) dx.$$

$$[\mathbf{E-1.38}] \int (\ln x + 1/\ln x) dx/x.$$

$$[\mathbf{E-1.39}] \int \frac{\exp(x) dx}{\exp(2x) - 1}.$$

Integración por sustitución

$$[\mathbf{E-1.40}] \int x \sqrt{x - 5} dx.$$

$$[\mathbf{E-1.41}] \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, a > 0.$$

$$[\mathbf{E-1.42}] \int \frac{(1 + 1/\operatorname{tg} x)^{1/3}}{\operatorname{sen}^2 x} dx.$$

Integración por partes

$$[\mathbf{E-1.43}] \int \ln x dx.$$

$$[\mathbf{E-1.44}] \int x \cos x dx.$$

$$[\mathbf{E-1.45}] \int x \operatorname{arctg}(x) dx.$$

Integración de funciones racionales polinómicas

$$[\mathbf{E-1.46}] \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

$$[\mathbf{E-1.47}] \int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx.$$

$$[\mathbf{E-1.48}] \int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} dx.$$

$$[\mathbf{E-1.49}] \int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

1.8. Problemas propuestos

[P-1.1] ¿En qué puntos la gráfica de la función $f(x) = x + \sqrt[3]{\sin x}$ posee una tangente vertical?

[P-1.2] Desde un mismo puerto salieron simultáneamente un barco A en dirección Norte, y un barco B en dirección Este. ¿Con qué velocidad crece la distancia entre ellos si sus velocidades respectivas son $v_A = 30\text{km/h}$ y $v_B = 40\text{km/h}$?

[P-1.3] Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $xy + \ln y = 1$ en el punto $P(1, 1)$.

[P-1.4] Resuelva las siguientes integrales:

1. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$

2. $\int x \sinh x dx$

[P-1.5] Sea la curva dada por $y = 12 - 5x + 3x^2$. Obtenga razonadamente los puntos de la curva en los que su tangente pasa por el origen de coordenadas.

[P-1.6] Sea la curva C dada por $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$, y sea $P(4, -1)$ un punto de C . Determine razonadamente el área del triángulo rectángulo formado por la recta tangente a C en P y las partes que la recta tangente intercepta de los ejes coordenados.

[P-1.7] Las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ se cortan en los puntos P y Q . Obtenga razonadamente el punto A , situado sobre $y = \sqrt{x}$, entre P y Q , que determina, con P y Q , un triángulo PAQ de área máxima.

[P-1.8] Resuelva las siguientes integrales:

1. $\int \frac{\exp(x)}{\exp(2x) + 3\exp(x) + 2} dx$

2. $\int \frac{\exp(x) + \exp(2x)}{1 + \exp(x)} dx$

[P-1.9] Considere la parábola $y = x^2$. Determine razonadamente la ecuación de la circunferencia que, centrada en el punto $(0, b)$, es tangente a la parábola en dos puntos.

[P-1.10] Obtenga razonadamente un polinomio de $P_3(\mathbb{R})$ que sea tangente a la recta $y = 14x - 13$ en el punto $(1, 1)$, y tangente a la recta $y = -2x - 5$ en el punto $(-1, -3)$.

[P-1.11] El logo del CEU puede verse como una cruz simétrica de brazo x (medido desde su centro) inscrita en un círculo de radio r . De cara a maximizar el impacto visual del logo, se desea que el área de la cruz sea máxima. Determine razonadamente la relación a verificar entre r y x .

[P-1.12] Resuelva las siguientes integrales:

1. $\int \frac{2x}{(x+1)^2} dx$
2. $\int \frac{1}{3+25x^2} dx$

[P-1.13] Conteste razonadamente: ¿Qué relación ha de existir entre los coeficientes a , b , y c para que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ sea tangente al eje X ?

[P-1.14] La sección transversal de una acequia tiene la forma de un trapecio isósceles. Determine razonadamente la inclinación de los laterales para que el perímetro mojado de la sección sea mínimo, sabiendo que el área de la sección del agua en la acequia es S y el nivel del agua es h .

[P-1.15] Determine razonadamente el ángulo que forman al cortarse las curvas $y = x^2$ e $y = x^3$.

[P-1.16] Resuelva las siguientes integrales:

1. $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x\sqrt{x}} dx$
2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2}} dx$

[P-1.17] Considere las curvas dadas por $y = x^2$ e $y = -x^2 + 2x - 5$. Obtenga razonadamente las ecuaciones de las rectas que sean simultáneamente tangentes a ambas curvas.

[P-1.18] Considere la curva C dada por $x = y^2$. Determine razonadamente: (a) las ecuaciones de las rectas normales a C que pasen por el punto $(1, 0)$; (b) el punto $(a, 0)$ por el que pasan dos rectas normales a C y perpendiculares entre sí.

[P-1.19] Una ventana tiene forma de rectángulo terminado por un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. La porción rectangular ha de ser de cristal transparente, mientras que la parte circular ha de ser de un cristal traslúcido que deja pasar sólo la mitad de luz por metro cuadrado que el cristal transparente. El perímetro total de la ventana ha de tener longitud fija P . Obtenga razonadamente las dimensiones de la ventana que deja pasar la mayor cantidad posible de luz.

[P-1.20] Resuelva las siguientes integrales:

1. $\int \text{sen}(\sqrt{x}) dx$
2. $\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx$

Cálculo diferencial una variable.

[P-1.21] Calcule razonadamente los valores del parámetro a ($a \neq 0$) que hacen que las rectas tangentes a la curva de ecuación $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 15^2$ en sus puntos de inflexión sean perpendiculares.

[P-1.22] Considere la curva dada por $y = 1/(1 + x^2)$. Obtenga razonadamente los puntos de la curva en los que la recta tangente posea pendiente máxima y mínima.

[P-1.23] Considere un cono de radio R y altura H . En él se inscribe un cono invertido, de radio r y altura h , de tal forma que su vértice se halla en el centro de la base del cono original. Determine razonadamente r y h para que el volumen del cono inscrito sea máximo.

[P-1.24] Resuelva las siguientes integrales:

1. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$
2. $\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} dx$

Capítulo 2

Aplicaciones de la integral definida

En la Sección 1.6 hemos revisado el concepto de integración definida. Veámos que la integral definida de una función en un intervalo puede ser interpretada, de manera natural, como el área de la región subtendida por la función sobre el intervalo. Enseguida veremos que esta misma interpretación puede extenderse a regiones más generales, como las RVS y RHS vistas en la Sección 1.1. Pero el resultado esencial de este capítulo que iniciamos es que la idea que subyace a la integral definida, la suma de Riemann, permite utilizar la integral definida en muchos otros tipos de cálculos, todos aquellos susceptibles de ser discretizados en forma de suma de contribuciones elementales, resultantes de la partición de un intervalo de la variable independiente.

2.1. Cálculo de áreas planas en coordenadas cartesianas

Consideremos inicialmente una RVS, dada por el conjunto de puntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$. Podemos calcular el área de dicha región de la forma:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

De forma similar, si la región es ahora RHS, y dada por el conjunto de puntos $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, n(y) \leq x \leq m(y)\}$, su área se obtiene como:

$$\int_c^d [m(y) - n(y)] dy.$$

No todas las regiones para las que puede resultar interesante calcular su área serán simples en alguno de los dos sentidos anteriores (verticalmente u horizontalmente). En ocasiones reconoceremos en la región de interés varias regiones simples determinando una región *compuesta*, por lo que será preciso identificar las regiones simples para, en cada una de ellas, emplear los modelos de referencia anteriores (RVS y RHS; véase la Figura 2.1).

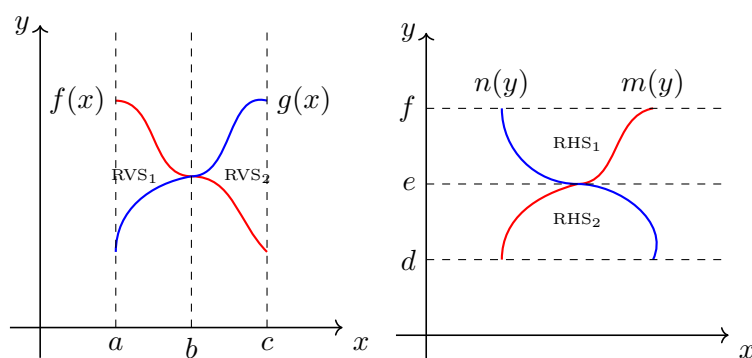


Figura 2.1: Regiones vertical y horizontalmente compuestas.

2.2. Cálculo de áreas planas en coordenadas polares

Un tipo de región simple alternativa a las dos anteriores es la *región angularmente simple* (RAS). Se trata de aquella región que, descrita en coordenadas polares, está acotada angularmente entre dos ángulos: θ_1 y θ_2 . Véase la Figura 2.2.

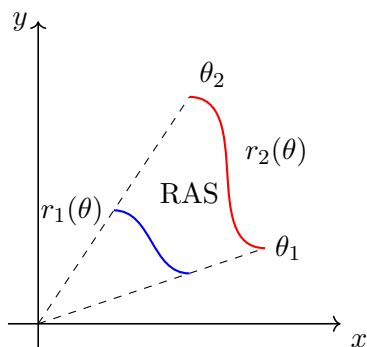


Figura 2.2: Región angularmente simple.

¿Cómo se describe una región de \mathbb{R}^2 en coordenadas polares? Un punto $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ puede describirse alternativamente mediante dos números reales, (r, θ) . El primero de ellos, r , es positivo o nulo, y representa la distancia del punto P al origen de coordenadas (O). El segundo, θ , es el ángulo en radianes que forma el segmento OP con el eje de abscisas (véase la Figura 2.3).

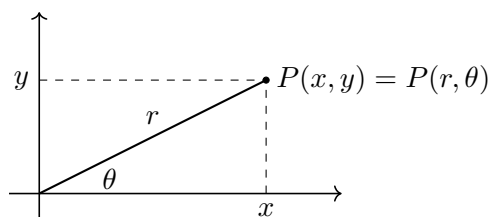


Figura 2.3: Descripción de un punto de \mathbb{R}^2 en coordenadas polares.

Es sencillo, con estas definiciones, obtener las siguientes relaciones:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta,$$

y sus inversas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}(y/x).$$

Es posible también describir funciones en \mathbb{R}^2 mediante coordenadas polares, de manera alternativa a como hacíamos en el caso cartesiano ($y = f(x)$). Así, podríamos hablar de una función $r(\theta), \forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]$, obtenida como el conjunto de puntos de \mathbb{R}^2 dados por $(r(\theta), \theta)$ cuando θ toma valores en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$. Como ejemplo, la semicircunferencia centrada en el origen y de radio 1, $y = \sqrt{1 - x^2}, \forall x \in [-1, 1]$, podría describirse como $r(\theta) = 1, \forall \theta \in [0, \pi]$.

Estamos ya en disposición de definir la RAS. Se trata del conjunto de puntos $C = \{(r(\theta), \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, r_1(\theta) \leq r(\theta) \leq r_2(\theta)\}$. Obsérvese que los puntos determinan una región angular, limitada en sus extremos por θ_1 y θ_2 , y por las funciones $r_1(\theta)$ y $r_2(\theta)$ en sus contornos interior y exterior con respecto al origen de coordenadas, respectivamente.

¿Cómo calcular el área de una RAS? Consideremos, por simplicidad, una RAS del tipo $D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, 0 \leq r(\theta) \leq r_2(\theta)\}$.

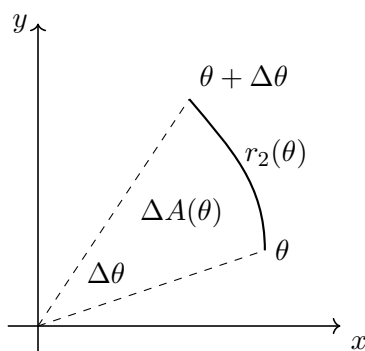


Figura 2.4: Área elemental en coordenadas polares.

Si hacemos una partición del intervalo angular $[\theta_1, \theta_2]$ en pasos de $\Delta\theta$, nuestra región queda dividida en subregiones angulares elementales similares a las láminas de un abanico (véase la Figura 2.4). Tratemos de calcular el área elemental de una de esas subregiones, que podemos asimilar, para un cierto valor de θ , a un sector circular de anchura $\Delta\theta$ y radio $r_2(\theta)$. Su área será $\Delta A(\theta) = \Delta\theta r_2^2(\theta)/2$. Por tanto, sumando todas las contribuciones elementales para todos los valores de θ , obtenemos que el área de nuestra región vendrá dada por:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r_2^2(\theta) d\theta.$$

Es inmediato verificar que, si estamos ante una región en la que $r_1(\theta) \neq 0$, la ecuación anterior se generaliza a:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] d\theta.$$

2.3. Cálculo de volúmenes

La integral definida puede emplearse para calcular volúmenes con dos tipos de regularidad. El primer caso es el de los volúmenes de cuerpos que poseen una regularidad en su sección. Nos referiremos a estos volúmenes como los volúmenes de objetos con sección regular. El otro tipo de volumen es el que resulta de la revolución, alrededor de un eje, de una RVS o una RHS. En las subsecciones siguientes abordamos el cálculo de estos volúmenes. Existen volúmenes más generales, para los que desarrollaremos técnicas más sofisticadas, basadas en el cálculo multivariable (véase el Capítulo 5).

2.3.1. Volúmenes de objetos con sección regular

Introduciremos la esencia de la técnica de cálculo de estos volúmenes mediante un ejemplo sencillo. Considere el volumen delimitado por los planos $x = 0, y = 0, z = 0$ y $ax + by + cz = 1$ ($a, b, c > 0$). Si seccionamos este objeto mediante planos transversales al eje Y , observamos que todas sus secciones son triángulos rectángulos (véase la Figura 2.5). Así, para una sección cualquiera, correspondiente a un cierto y , la altura del triángulo será $h(y)$, y su base $b(y)$, con lo que su área será $A(y) = b(y)h(y)/2$. Podemos ver el volumen del objeto como el generado por la superposición de los volúmenes de todas las secciones triangulares de espesor Δy : $A(y)\Delta y$. Si hacemos esta suma al modo de Riemann, obtenemos:

$$V = \int_0^1 \frac{b(y)h(y)}{2} dy.$$

Ahora sólo nos queda determinar $b(y)$ y $h(y)$. En este caso, es sencillo comprobar que $b(y) = (1 - by)/a$ y $h(y) = (1 - by)/c$.

Lógicamente, la regularidad seccional puede ser más sofisticada que la detectada en este sencillo caso, pero la esencia de la técnica responde al mismo esquema: una vez detectada la regularidad, se trata de calcular el área de la sección a partir de las especificaciones matemáticas del objeto.

2.3.2. Volúmenes de objetos de revolución

Consideraremos dos estrategias diferentes para el cálculo de este tipo de volúmenes. La primera es el llamado *método de los discos*, y la segunda el *método de los cilindros*. En los dos apartados siguientes los veremos de manera separada.

El método de los discos

Vamos a motivar el problema mediante un caso sencillo (véase la Figura 2.6). Considere una RVS dada por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq Rx/h\}$, en donde R y h son dos

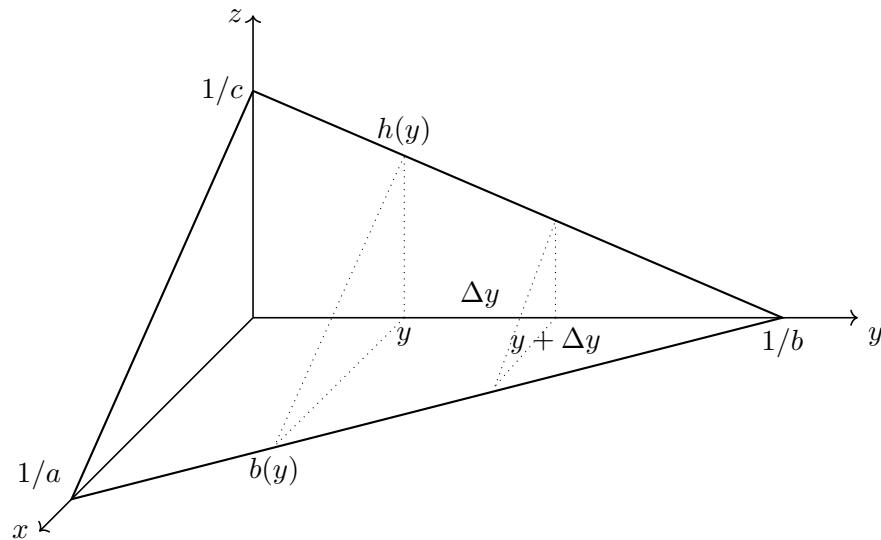


Figura 2.5: Volumen de sección regular.

números reales positivos. Si hacemos girar esta región alrededor del eje X , se genera un cono de radio R y altura h . ¿Cómo calcular su volumen?

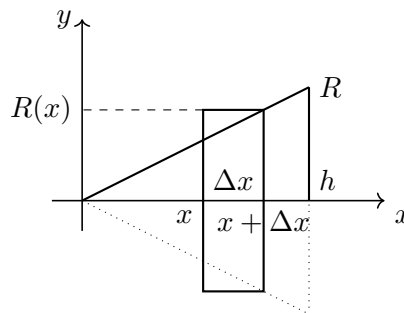


Figura 2.6: Volumen de un objeto de revolución. El volumen de un cono.

Consideremos que realizamos una partición uniforme de paso Δx en el intervalo $[0, h]$. Esto supone que nuestro cono puede verse, de forma aproximada, como la superposición de *discos* de espesor Δx y radios $R(x) = Rx/h$, en donde x determinaría la posición del disco en el intervalo. Evidentemente, el volumen de cada disco sería $V(x) = \pi R^2(x)\Delta x$. Si sumamos todos estos volúmenes cuando el tamaño de la partición se hace tender a cero, obtenemos:

$$V_{\text{cono}} = \int_0^h \pi R^2(x) dx.$$

Para el caso del cono, la ecuación anterior nos proporciona la conocida fórmula $V_{\text{cono}} = \pi R^2 h/3$.

Podemos emplear la estrategia anterior, el denominado *método de los discos*, en el caso general de una RVS $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ que gire alrededor del

eje de abscisas. El resultado obtenido anteriormente para el cono podría así generalizarse a:

$$V_{RVS} = \int_a^b \pi[f^2(x) - g^2(x)]dx.$$

Es importante que identifique en esta expresión una *diferencia de volúmenes*: el volumen generado por la rotación alrededor del eje de abscisas de la región subtendida por $f(x)$, y el generado por la región subtendida por $g(x)$.

La argumentación empleada para el caso RVS puede aplicarse al caso de regiones horizontalmente simples girando alrededor del eje de ordenadas. Así, es posible determinar el volumen resultante de la revolución de la RHS $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, n(y) \leq x \leq m(y)\}$, alrededor del eje Y , como:

$$V_{RHS} = \int_c^d \pi[m^2(y) - n^2(y)]dy.$$

Hasta el momento, hemos considerado sólo rotaciones alrededor de los ejes coordenados. En el caso de rotaciones alrededor del eje de abscisas, hemos rotado regiones RVS; y, en el caso del eje de ordenadas, rotábamos regiones RHS. ¿Qué ocurre si los ejes de rotación no coinciden con los ejes coordenados, sino que son paralelos a estos? En la Figura 2.7 ilustramos este caso.

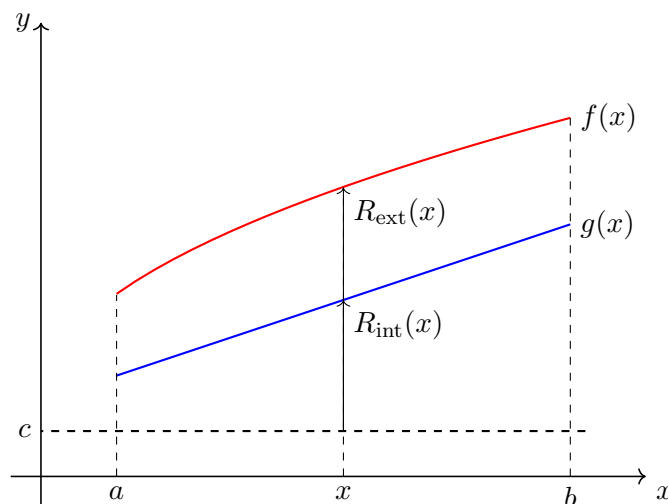


Figura 2.7: Volumen de un objeto de revolución. Eje desplazado.

Considere la RVS genérica tratada previamente: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$. Suponga que esta región gira alrededor del eje $y = c$, donde $f(x), g(x) > c, \forall x \in [a, b]$. Es sencillo demostrar (hágalo) que en este caso el volumen del objeto engendrado por la revolución de A es:

$$V'_{RVS} = \int_a^b \pi[R_{\text{ext}}^2(x) - R_{\text{int}}^2(x)]dx,$$

donde $R_{\text{ext}}(x) = f(x) - c$ y $R_{\text{int}}(x) = g(x) - c$. Es posible obtener un resultado dual a este para rotaciones de regiones RHS alrededor de ejes paralelos al eje Y . Intente, como ejercicio, obtener dicha expresión para la RHS genérica B vista anteriormente.

El método de los cilindros

El concepto de la suma de Riemann es tan rico como elemento de modelización de soluciones a problemas, que puede ser empleado de muy diversas y creativas maneras. En este capítulo vamos a ver varias en diversos contextos geométricos. Precisamente, el *método de los cilindros* es una de estas maneras. Resulta de una aproximación, radicalmente distinta al método de los discos, para el cálculo de volúmenes de revolución.

Para ilustrar el método, volvamos a nuestro problema de calcular el volumen de un cono de radio de la base R y altura h . Consideremos ahora que tal cono es el resultado de la revolución de una RHS alrededor del eje Y . Esta región sería: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq h, 0 \leq x \leq Ry/h\}$, totalmente dual de la empleada en el apartado anterior (véase la Figura 2.8). Como hemos visto, podríamos calcular este volumen usando el método de los discos. Sin embargo, vamos a proceder de una manera alternativa.

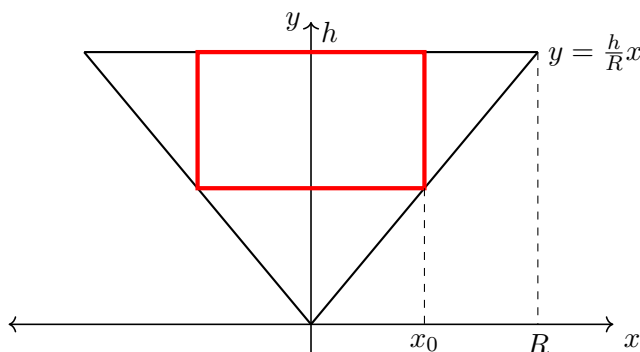


Figura 2.8: Volumen de un objeto de revolución. El volumen de un cono mediante el método de los cilindros.

Considere un punto $x_0 \in [0, R]$, y sea también el punto $x_0 + \Delta x$. Si Δx es muy pequeño, los dos puntos anteriores delimitan una RHS aproximadamente rectangular dada por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq hx_0/R, x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x\}$. La revolución de esta región rectangular alrededor del eje Y genera un cilindro hueco de radio x_0 , espesor Δx y altura $h - hx_0/R$ (véase la Figura 2.9).

Calculemos ahora el volumen de *material* de ese cilindro. Podemos abordar este cálculo calculando el volumen de la lámina de espesor Δx que, enrollada, determina el cilindro. El volumen de dicha lámina es $\Delta V(x_0) = 2\pi x_0 \Delta x$. Observe que, si recorremos todos los puntos x_0 del intervalo $[0, R]$ agregando rectángulos de espesor Δx que rotan alrededor del eje Y , podemos obtener el volumen total del cono como:

$$V_{\text{cono}} = \int_0^R 2\pi x(h - hx/R)dx = \pi R^2 h/3.$$

Tal y como la hemos introducido, esta técnica permite calcular volúmenes de revolución

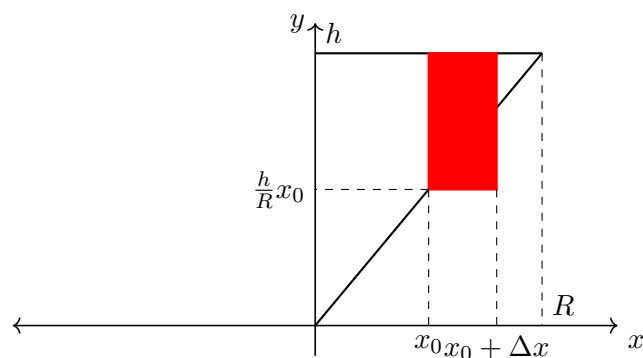


Figura 2.9: El volumen de un cono mediante el método de los cilindros.

generados por regiones RVS girando alrededor del eje Y . Para una RVS genérica del tipo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$ este volumen vendría dado por:

$$V_{\text{RVS}} = \int_a^b 2\pi x [f(x) - g(x)] dx.$$

Si el eje de rotación fuera una recta paralela al eje Y , la expresión anterior se convierte en:

$$V_{\text{RVS}} = \int_a^b 2\pi r(x) [f(x) - g(x)] dx,$$

donde $r(x)$ es la distancia de la pared del *cilindro de referencia* al eje (véase la Figura 2.10).

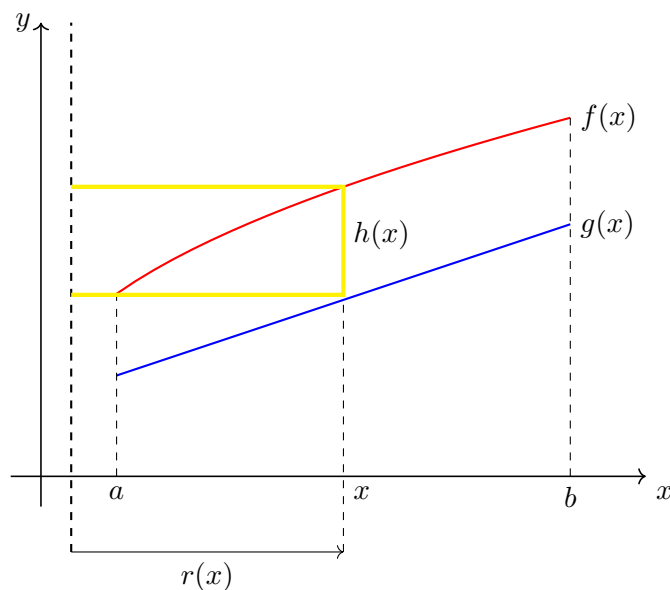


Figura 2.10: Cilindro de referencia en el método de los cilindros.

No es difícil obtener resultados duales a los anteriores para el caso de regiones RHS girando alrededor del eje X o alrededor de ejes paralelos a éste. Se invita al alumno a obtener dichos resultados.

Finalmente, el método de los cilindros también suele denominarse el *método de las capas o de los anillos*, pues el volumen se compone mediante la agregación de capas concéntricas de material, de manera similar a los anillos de una cebolla.

2.4. Cálculo de longitudes de curvas planas

Vamos a considerar dos casos: En el primero la curva está dada en coordenadas cartesianas; en el segundo en coordenadas polares.

2.4.1. Longitud de una curva en coordenadas cartesianas

Considere una curva plana dada por su forma explícita $y = f(x)$. Estamos interesados en calcular la longitud de un tramo de esta curva, el comprendido entre $x = a$ y $x = b$. Una forma de abordar este cálculo consiste en realizar una partición del intervalo $[a, b]$, y aproximar la longitud de la curva mediante la suma de las longitudes de los segmentos determinados por las imágenes de los puntos de la partición (véase la Figura 2.11).

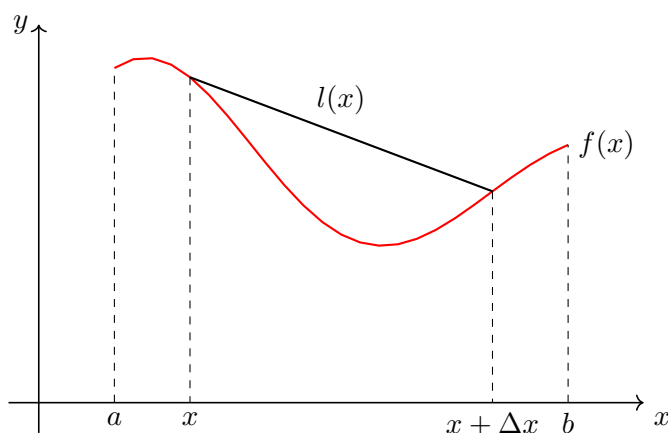


Figura 2.11: Cálculo de la longitud de una curva plana.

Sean dos puntos adyacentes de la partición, x y $x + \Delta x$, y sean sus imágenes $f(x)$ y $f(x + \Delta x)$. La longitud del segmento determinado por estos dos puntos es:

$$l(x) = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f(x + \Delta x) - f(x)]^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]^2}.$$

Si, como siempre, empleando el concepto de suma de Riemann, sumamos todas las longitudes elementales de los segmentos en el intervalo $[a, b]$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$, obtenemos:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

2.4.2. Longitud de una curva en coordenadas polares

En caso de que el segmento de curva venga dado en coordenadas polares, $r(\theta)$, $\forall \theta \in [\theta_1, \theta_2]$, podemos usar un argumento similar al que acabamos de realizar: realizamos una partición del intervalo, de paso $\Delta\theta$, en la variable angular θ (véase la Figura 2.12).

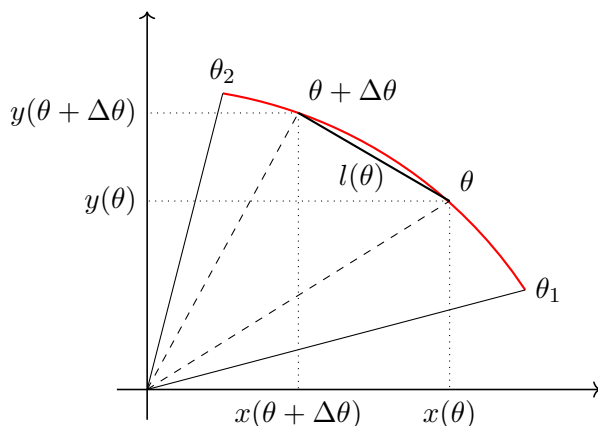


Figura 2.12: Cálculo de la longitud de una curva plana.

Para dos valores angulares adyacentes de la partición, θ y $\theta + \Delta\theta$, llamemos $x(\theta)$, $y(\theta)$ y $x(\theta + \Delta\theta)$, $y(\theta + \Delta\theta)$ a sus respectivas coordenadas cartesianas. A partir de ellas es sencillo obtener la longitud del segmento entre ambos puntos:

$$l(\theta) = \sqrt{[x(\theta) - x(\theta + \Delta)]^2 + [y(\theta) - y(\theta + \Delta)]^2} = \Delta\theta \sqrt{\left[\frac{x(\theta) - x(\theta + \Delta)}{\Delta\theta}\right]^2 + \left[\frac{y(\theta) - y(\theta + \Delta)}{\Delta\theta}\right]^2}.$$

Si, como en el caso cartesiano, empleamos el concepto de suma de Riemann, y agregamos todas las longitudes elementales de los segmentos en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ cuando $\Delta\theta \rightarrow 0$, obtenemos:

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left[\frac{dx(\theta)}{d\theta}\right]^2 + \left[\frac{dy(\theta)}{d\theta}\right]^2} d\theta.$$

En esta expresión podemos usar el hecho de que $x(\theta) = r(\theta) \cos \theta$ e $y(\theta) = r(\theta) \sin \theta$. Tras operar, obtenemos la siguiente expresión:

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + \left[\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right]^2} d\theta.$$

2.5. Cálculo de áreas de objetos de revolución

Pretendemos ahora calcular el área lateral de un objeto de revolución. Considere el objeto generado por la revolución de la RVS $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ alrededor del eje X . Si, como hemos hecho en anteriores ocasiones, discretizamos el intervalo

$[a, b]$ en pasos de anchura Δx , vemos que podemos calcular el área lateral del objeto como la suma de las áreas laterales de troncos de cono de radios $f(x)$ y $f(x + \Delta x)$. Aunque algo tedioso, no es complicado comprobar que la superficie lateral de uno de estos troncos viene dada por $s(x) = \pi[f(x) + f(x + \Delta x)]l(x)$. Obsérvese que, al igual que ocurría en la Subsección 2.4.1, $l(x) = \sqrt{[f(x + \Delta x) - f(x)]^2 + (\Delta x)^2}$. Tras operar y sumar todas las contribuciones de área, obtenemos:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

2.6. Integrales impropias

Como vimos en la Sección 1.6, al recordar el concepto de integral definida de una función en un intervalo, para que sea posible su adecuada definición es necesario que (1) $f(x)$ sea continua en el intervalo, y (2) que el intervalo de integración sea finito. En determinadas aplicaciones de la integral definida no es infrecuente encontramos con que alguna de estas dos condiciones, o las dos, no se cumplen. Considere los siguientes ejemplos:

1. $\int_0^2 \frac{1}{x} dx$.
2. $\int_0^\infty \exp(-x) dx$.

Cuando esto ocurre, las integrales definidas se dicen *impropias*, en el sentido de que, en propiedad, no cabe hablar de una integral bien definida. ¿Cómo afrontar este tipo de cálculos?

La idea de límite puede ayudarnos. Veámoslo sobre los ejemplos anteriores.

1. $\int_0^2 \frac{1}{x} dx$. Esta integral definida es impropia porque la función $1/x$ no es continua en un punto del intervalo de integración: $x = 0$. Podemos evitar esta discontinuidad de la siguiente forma:

$$\int_0^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0+\epsilon}^2 \frac{1}{x} dx.$$

Lógicamente, al tratarse de un límite, la integral así planteada podrá ser o no convergente. En este caso, la integral no converge.

2. $\int_0^\infty \exp(-x) dx$. Esta integral definida es impropia porque el intervalo de integración no es finito. De nuevo, la idea de de límite nos es de ayuda:

$$\int_0^\infty \exp(-x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_0^\epsilon \exp(-x) dx = 1.$$

2.7. Ejercicios propuestos

[E-2.1] Hallar, en cada caso, las **áreas** de las figuras limitadas por las curvas dadas:

1. $ax = y^2$, $ay = x^2$.
2. $y = x^2$, $x + y = 2$.
3. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$.
4. $y = (x + 1)^2$, $x = \text{sen } \pi y$, $y = 0$, $(0 \leq y \leq 1)$
5. $r^2 = a^2 \cos(2\phi)$.
6. $r = a(1 + \cos \phi)$.
7. $r = a \text{sen}(3\phi)$

[E-2.2] Sean $r_1 = 2 + 4 \cos \phi$ y $r_2 = 2$. Calcule:

1. El área interior a r_1 y exterior a r_2 .
2. El área exterior a r_1 e interior a r_2 .
3. El área interior a r_1 e interior a r_2 .

[E-2.3] Calcule los **volúmenes** especificados:

1. La revolución de $y = b(x/a)^{2/3}$, $0 \leq x \leq a$, en torno al eje X .
2. La revolución de $y = 2x - x^2$, $y = 0$ (1), en torno al eje X , (2) en torno al eje Y .

[E-2.4] Un sólido apoyado sobre el plano XY , y centrado en el origen de coordenadas, posee una base elíptica de eje mayor 10 y eje menor 8. Calcule su **volumen** sabiendo que su sección transversal al eje mayor es siempre un triángulo isósceles de altura 6.

[E-2.5] Un sólido posee una base circular de radio 4 centrada en el origen de coordenadas. Su sección perpendicular al eje X es siempre un triángulo equilátero. Calcule el **volumen** de dicho sólido.

[E-2.6] Calcule las longitudes de los siguientes **arcos de curva**:

1. $y = e^x$, $0 \leq x \leq x_0$.
2. $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq b < a$.
3. $r = \theta^2$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
4. $r = \exp(a\theta)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.
5. $r = a\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
6. $r^2 = \cos 2\theta$ (longitud total).

[E-2.7] Calcule la **superficie** del cuerpo engendrado por la revolución de las siguientes curvas:

1. $y = x\sqrt{x/a}$, $0 \leq x \leq a$ en torno al eje X .
2. $y = a \cos(\frac{\pi x}{2b})$, $x \leq b$ en torno al eje X .
3. $y = \operatorname{tg} x$, $0 \leq x \leq \pi/4$ en torno al eje X .

[E-2.8] Calcule las siguientes **integrales impropias**:

1. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.
3. $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.
4. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

2.8. Problemas propuestos

- [P-2.1] Calcule el área de cada una de las dos regiones en las que la curva $y^2 = 4x$ divide el círculo de circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.
- [P-2.2] Obtenga el valor de λ para el que la curva $y = \lambda \cos x$ divide en dos áreas iguales la región limitada por la curva $y = \sin x$ y el eje de abscisas ($0 \leq x \leq \pi/2$).
- [P-2.3] Calcule el área de la región común al interior de las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.
1. Suponga $a > b$.
- [P-2.4] Calcule el volumen del sólido engendrado al girar el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 3 alrededor de la recta $x = 6$.
- [P-2.5] Calcule el área de la región interior a $r = 6 \cos \theta$ y exterior a $r = 2 + 2 \cos \theta$.
- [P-2.6] Calcule el volumen del cono circular recto truncado de altura h , radio de la base R , y radio de la cara superior r .
- [P-2.7] Calcule el volumen del sólido resultante de girar el triángulo de vértices $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ alrededor de la recta $x = 10/3$. Repita el cálculo cuando el triángulo gira alrededor de la recta $y = 1$.
- [P-2.8] Calcule razonadamente el área de la región dada por los $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq x^2$.
- [P-2.9] Calcule razonadamente el volumen del sólido engendrado al girar, alrededor del eje Y , la región limitada por las curvas $4y = x^2, y + 3 = x^2$ y $x = 0$.
- [P-2.10] Calcule razonadamente el volumen del sólido engendrado al girar, alrededor del eje Y , la región limitada por el primer lóbulo de la curva $y = x \sin x$.

[P-2.11] Calcule el área de la región limitada por las curvas $f(x) = 1/(x^2 + 3)$, $g(x) = (x - 1)/(8x)$ y los semiejes positivos.

[P-2.12] Calcule el área contenida por la curva $r(\theta) = \sqrt{|\sen \theta|}$.

[P-2.13] ¿Qué volumen de material se le retira a una esfera de radio $2r$ cuando es taladrada axialmente por su centro mediante una broca de radio r ?

[P-2.14] Sea la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x^2/4 \leq y \leq 1\}$. Calcule el volumen del sólido resultante de girar R alrededor de:

1. El eje X .
2. El eje Y .
3. La recta $x = 2$.
4. La recta $y = 1$.

[P-2.15] Calcule el volumen de un cono truncado, de altura h , cuyas bases inferior y superior son elipses de semiejes respectivos A, B y a, b .

[P-2.16] Considere la región limitada por las curvas $y = x\sqrt{x+1}$ e $y = 0$. Obtenga razonadamente:

1. El área de la región.
2. El volumen del sólido generado al revolucionar la región considerada:
 - a) Alrededor del eje X .
 - b) Alrededor del eje Y .

[P-2.17] Calcule el área contenida por la curva: $r = 1 - \sen \theta$.

[P-2.18] Considere la circunferencia de radio uno centrada en el origen, y la circunferencia de radio ρ centrada en $x = \rho, y = 0$. El área exterior a la primera circunferencia e interior a la segunda ha de ser igual a $x_0 \cdot y_0$, donde (x_0, y_0) es el punto de intersección de ambas circunferencias en el primer cuadrante. Responda razonadamente: ¿Cuánto vale ρ ?

[P-2.19] Calcule el volumen del sólido de revolución engendrado por la región acotada por $y = 6 - 2x - x^2$ y $y = x + 6$ al girar alrededor de la recta $y = 3$.

[P-2.20] Calcule el volumen del sólido de revolución generado al girar la región acotada por $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$, y $x = 1$ alrededor de la recta $x = 2$.

[P-2.21] Calcule el área de la región encerrada por la función $y = |x^2 - 4x + 3|$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

[P-2.22] Calcule el área interior a la circunferencia de radio uno centrada en el origen, y exterior a la curva dada por $r = \cos^2 \theta$.

[P-2.23] Calcule la longitud de la curva $r = \exp(\theta)$, $\theta \in (-\infty, 0]$.

[P-2.24] Calcule el volumen del sólido que se genera cuando el interior de la curva dada por $y^2 = x^2(x + 5)$ gira alrededor de:

1. el eje X .
2. el eje Y .
3. la recta $x = -5$.

[P-2.25] Sean las curvas C_1 , C_2 y C_3 , dadas, respectivamente, por $y = \ln(\cos x)$, $y = 2/x$, y $x^2 + y^2 = 5$. Obtenga razonadamente:

1. La longitud del tramo de C_1 comprendido entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.
2. El valor α que haga que el área comprendida entre C_2 y las rectas $y = 0$, $x = 1$, y $x = \alpha$ sea 1.
3. El volumen de revolución obtenido al rotar, con respecto al eje X , el área comprendida entre las curvas C_2 y C_3 en el primer cuadrante.

[P-2.26] Calcule el volumen del sólido engendrado por la revolución alrededor del eje Y de la región plana dada por $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, $y = -1$.

[P-2.27] Calcule el área contenida por la curva: $r = 2(1 - \cos \theta)$.

[P-2.28] Calcule el volumen del sólido engendrado por la revolución alrededor del eje Y de la región plana dada por $f(x) = 1/(1 + \sqrt{x-2})$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 6$.

[P-2.29] Calcule el área contenida por la curva: $r = 15/(3 - 2 \cos \theta)$.

[P-2.30] Dada la curva $y = 4x^2$, se pide:

1. Calcule el área de la región comprendida entre la curva y la tangente a la misma que es paralela a la recta $y = 2x$ en el primer cuadrante.
2. Calcule el volumen engendrado por dicha región al girar alrededor del eje X .

[P-2.31] Dadas las curvas $y = 1 + \sin x$ e $y = 1 - \sin x$, se pide:

1. Calcule el área de la región que limitan estas dos curvas y las rectas $x = \pi/4$ y $x = 3\pi/2$.
2. Considere ahora la región que limitan las dos curvas anteriores y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$. Obtenga ahora el volumen que genera esta región al girar alrededor del eje Y .

[P-2.32] Calcule razonadamente, mediante integrales definidas:

1. el volumen de un cono de altura h y radio de la base R .
2. el área de la superficie de dicho cono.

[P-2.33] Calcule el área contenida por la curva $r(\theta) = \sin^2(4\theta)$.

[P-2.34] Sea la región plana R limitada por las curvas $y = -x^2 + 5$ e $y = |x - 1|$. Obtenga razonadamente el volumen resultante de revolucionar R :

1. Alrededor del eje X .
2. Alrededor del eje Y .

[P-2.35] Calcule razonadamente el área de la región plana limitada por las curvas $y = x$, $y = 2x$, $y = x^2$ e $y = x^2/2$.

[P-2.36] Un servilletero se construye atravesando una esfera de radio $2r$ con un taladro de radio r . ¿Qué volumen de material se le retira a la esfera mediante este procedimiento?

[P-2.37] Calcule el volumen resultante de girar la sección comprendida entre las curvas $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ para $0 \leq x \leq \pi/4$

1. alrededor del eje X .
2. alrededor del eje Y .
3. alrededor de $x = \pi/4$.

[P-2.38] Calcule el área contenida por la curva plana cerrada $(x^2 + y^2)^2 = |x^2 - y^2|$.

[P-2.39] Calcule razonadamente el área de la región limitada por $y = \exp(-x)|\sin x|$, $y = 0$ ($x \geq 0$).

[P-2.40] Calcule el área de la curva cerrada $r = \frac{1}{1 + 0,8 \cos \theta}$.

[P-2.41] Calcule razonadamente el volumen del sólido engendrado al girar, alrededor del eje X , la región limitada por $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, $0 < a \leq b$.

[P-2.42] Sea A la región del primer cuadrante acotada por la función $y = x/2$, el eje X y la curva C dada por $x^2/9 + y^2 = 1$. Sea B el área del primer cuadrante acotada por la recta $y = mx$ ($m > 0$), el eje Y y la curva C . Obtenga razonadamente el valor de m que hace que $A = B$.

[P-2.43] Sea R la región del primer cuadrante acotada por $y = \exp(x)$, $y = |\sin x|$, $x = 0$, y $x = 2\pi$. Obtenga razonadamente:

1. El área de R .
2. El volumen engendrado por R al girar alrededor del eje X .

[P-2.44] Calcule razonadamente el volumen del sólido obtenido al girar alrededor de $y = 1$ la región de primer cuadrante acotada por $x = y - y^3$.

[P-2.45] Considere la región plana A dada por los (x, y) tales que $\pi/4 \leq x \leq 3\pi/4$ y $\cos x \leq y \leq \sin x$. Calcule razonadamente su área.

[P-2.46] Sea la región A del ejercicio anterior, y sea ahora la región B resultado de imponer a la región A la restricción añadida $y \geq 0$. Calcule razonadamente:

1. El volumen engendrado por B al girar alrededor del eje X .
2. El volumen engendrado por B al girar alrededor del eje Y .

[P-2.47] Sea la región R limitada por $y = 1/x^2$ y las rectas $x = 1$ y $x = 4$. Se desea dividir R en dos regiones verticalmente simples de igual área. ¿Qué recta $x = d$ realiza esta división?

[P-2.48] Las funciones $y = x^2/2$, $y = x + 1$, e $y = 3 - x$ determinan entre sí tres regiones cerradas en el plano. Calcule el área de cada una de estas regiones.

[P-2.49] Una niña juega en la playa con un cubo que puede modelarse como un cono truncado de radio menor r , radio mayor R y altura H . Si llena el cubo de arena hasta una altura h , y, a continuación, voltea el cubo para construir un torreón con la arena que ha introducido en el cubo, ¿qué altura tendrá dicho torreón?

[P-2.50] Calcule razonadamente el volumen de un obelisco de altura h cuyas bases inferior y superior son, respectivamente, rectángulos de lados A y B , y a y b .

[P-2.51] Un depósito de combustible está formado por un cuerpo cilíndrico, de radio r y longitud H , y dos casquetes esféricos soldados a los extremos del cilindro. Estos casquetes se obtienen a partir de una esfera de radio R . Calcule razonadamente la superficie del depósito.

[P-2.52] Calcule razonadamente el área delimitada por las curvas $y^2 = x$ y $2y^2 = 3 - x$.

[P-2.53] Calcule razonadamente el volumen del objeto de revolución engendrado por la región $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$, $x \in [0, 1]$ al girar ésta alrededor del eje X .

[P-2.54] Un camión transporta gasolina en una cisterna en forma de cilindro elíptico. La longitud de la cisterna es L , y los semiejes de su sección elíptica son a y b . Para medir el volumen de gasolina en la cisterna, se sumerge en ésta una vara desde su parte superior hasta el fondo. Si, al extraer la vara, la porción mojada por la gasolina tiene longitud h , ¿qué volumen de gasolina hay en el depósito?

[P-2.55] Sea D la región acotada por $f(x) = x - x^2$ y el eje X .

1. Encuentre la pendiente de la recta que, pasando por el origen, divide D en dos regiones de igual área.
2. Sea D_1 la región acotada por $f(x)$ y la recta obtenida en el apartado anterior. Calcule el volumen del sólido generado por la revolución de D_1 alrededor del eje Y .

[P-2.56] Obtenga razonadamente, mediante una integral definida, el volumen de una pirámide de base rectangular, de lados a y b , y altura h .

[P-2.57] Calcule razonadamente el área interior que tienen en común las curvas $r_1(\theta) = 4 \operatorname{sen} \theta$ y $r_2(\theta) = \sqrt{8} \cos(2\theta)$.

[P-2.58] Sea la región R dada por $x^2 + y^2 = 16$, $y = -x^2 + 4$, $x, y \geq 0$. Calcule razonadamente:

1. El área de R .
2. El volumen engendrado por R al girar ésta alrededor del eje X .
3. El volumen engendrado por R al girar ésta alrededor del eje Y .

[P-2.59] Un sólido tiene una base limitada por $y = \exp(x)$, $y = \exp(-x)$, y la recta $x = 1$. Si todas las secciones planas perpendiculares al eje X son cuadrados, obtenga razonadamente el volumen de dicho sólido.

[P-2.60] Obtenga razonadamente el área delimitada por las curvas $y = x + 3$, $y = x^2 - 2x + 3$, $y = -2x + 7$, $y = x - 2$, $y = 0$, e $y = -2x$.

[P-2.61] Sea la curva $r(\theta) = \pi/\theta$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Obtenga razonadamente el área comprendida entre esta curva y la porción correspondiente de $r = 1$.

[P-2.62] Sea la región R delimitada por las curvas $y = \exp(x)$, $y = ex^2$ y $x = 0$. Se pide: (a) Calcule el volumen generado por la rotación de R alrededor del eje X . (b) Calcule el volumen generado por la rotación de R alrededor de $y = 5$. (c) Calcule el volumen del sólido que tiene como base R y cuyas secciones transversales al eje X son semicírculos.

[P-2.63] Considere la curva C , descrita paramétricamente mediante $x = t^2 - 2$, $y = t^3 - t$. Se pide: (a) Calcule dy/dx . (b) Calcule la ecuación de la recta tangente a C en el punto $(2, 6)$. (c) Calcule el área contenida por C .

[P-2.64] Sea la curva plana dada por $r(\theta) = 1/2 + \cos(3\theta)$. Se pide: (a) Represente gráficamente la curva para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. (b) Calcule al área contenida por los lóbulos menores de la curva.

[P-2.65] Sea la región R limitada por $y = \ln(-x)$, $x = 0$, $y = -1$ e $y = -4$. Se pide: (a) Calcule el área de R . (b) Calcule el volumen engendrado por la rotación de R alrededor de $x = -2$.

[P-2.66] Calcule el volumen resultante de girar alrededor del eje X la región dada por $3x = (y^2 + x^2)^{3/2}$, $0 \leq x \leq 1$.

[P-2.67] Calcule el área de la región plana limitada por las curvas $y = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} + 1$, $y = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}$, y el eje Y . (No es necesario que resuelva las integrales que plantee.)

[P-2.68] Calcule el área de la región delimitada por la curva $r(\theta) = \sqrt{1 + \cos^2(4\theta)}$.

[P-2.69] Calcule el volumen del sólido resultante de girar alrededor del eje $y = 1$ la región dada por $y = \ln|x|$, $y = -4$ e $y = -1$.

- [P-2.70] Sea la curva $y = 1 + a - ax^2$, $a > 0$. Se pide: (a) Obtenga el área limitada por esta curva y los ejes de coordenadas en el primer cuadrante. (b) Determine a de manera que el área obtenida en el apartado anterior sea máxima.
- [P-2.71] Un depósito semiesférico de radio R metros se utiliza para almacenar agua. ¿A qué porcentaje de su capacidad se halla si la altura del agua almacenada es de $R/3$ metros?
- [P-2.72] Un rectángulo tiene un vértice en el origen, el vértice diagonalmente opuesto en la curva $y = bx^n$, con $x = a$, y los lados paralelos a los ejes de coordenadas ($a, b, n > 0$). Demuestre que el cociente entre el área de la parte del rectángulo que está debajo de la curva, y el área total del rectángulo depende sólo de n (no depende de a y b).
- [P-2.73] Sea la región R limitada por $y = \frac{x^3}{x-3}$, $y = 0$, y $x = -2$. Calcule razonadamente el área de R .
- [P-2.74] Sea la región R limitada por $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ e $y = -5$. Calcule el volumen de revolución resultante de girar R alrededor de los ejes: (a) $y = 0$, (b) $x = 0$, (c) $y = 2$, y (d) $x = 2$.
- [P-2.75] Calcule, para cada par de curvas dado, el área de la región comprendida entre el interior de r_1 y el exterior de r_2 : (a) $r_1 = 2$, $r_2 = 4 \operatorname{sen} \theta$; (b) $r_1 = 2 \operatorname{sen} \theta$, $r_2 = 2 - 2 \operatorname{sen} \theta$.
- [P-2.76] La base de un sólido está formada por la región limitada por $x = 0$, $y = 0$, $x = \pi/2$, e $y = \operatorname{sen} x$. Además, se sabe que cada sección del sólido perpendicular al eje X es un triángulo equilátero. Obtenga razonadamente el volumen del sólido.
- [P-2.77] Sean las curvas planas dadas por $r_1^2(\theta) = a^2 \operatorname{sen}(2\theta)$ y $r_2^2(\theta) = a^2 \cos(2\theta)$. Calcule el área común al interior de ambas curvas.
- [P-2.78] Sea la región R limitada por $y = (x + 2)^2$, $y = x + 2$, y $x = a$, $a > 0$. Se pide: (a) Calcule el área de R ; (b) calcule el volumen engendrado por la rotación de R alrededor de $x = a$.
- [P-2.79] Sea la región limitada por la función $f(x) = x^3/(x^2 - 1)$ y las rectas $y = 2$ y $x = 0$. Obtenga el volumen resultante de girar dicha región alrededor del eje $x = 2$.
- [P-2.80] Obtenga razonadamente el área de la región limitada por las curvas: $x^2 + y^2 = a^2$, $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$, $x^2 + (y - a)^2 = a^2$, $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq x, y \leq a$ ($a > 0$).
- [P-2.81] Obtenga el área interior común a las curvas $r_1(\theta) = 1 - \cos(\theta)$ y $r_2(\theta) = \cos(\theta)$.
- [P-2.82] Proponga cómo calcular al área limitada por $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$, $x = 2a$, $a > 0$.
- [P-2.83] Proponga cómo calcular el volumen generado por la revolución de la región del ejercicio anterior (con $a = 2$) alrededor del eje $x = 4$.

- [P-2.84] Sea la región plana dada por $r(\theta) = \frac{1}{1 - \cos(\theta)}$, $\theta = \pi/4$, $\theta = \pi/2$. Se pide: (a) Represente aproximadamente esta región; (b) calcule razonadamente su área.
- [P-2.85] Sea la región R delimitada por las curvas $y = x^2/2$ e $y = x^4/4 - x^2/2$. Obtenga razonadamente el volumen engendrado por la rotación de R alrededor de $x = 3$.
- [P-2.86] Sean las curvas $r_1(\theta) = 3$ y $r_2(\theta) = 6 \cos(2\theta)$. Determine razonadamente el área de la región interior a ambas curvas.
- [P-2.87] Obtenga razonadamente el volumen del objeto delimitado por $(x/3)^2 + (y/2)^2 + z^2 = 1$, y los planos $y = \sqrt{3}$ e $y = 1$.
- [P-2.88] Considere la región R delimitada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2x}$, $y = x^2/3$, e $y = x^2/4$. Calcule razonadamente: (a) el área de R ; (b) el volumen engendrado por R al girar alrededor del eje $x = -1$.
- [P-2.89] Considere las regiones R_1 y R_2 delimitadas, respectivamente, por las curvas $r_1(\theta) = 3 \sin \theta$ y $r_2(\theta) = 3 \cos(2\theta)$. Obtenga razonadamente el área de la región $R = R_1 \cap R_2$.
- [P-2.90] Considere la región R delimitada por las rectas $x = \pi/4$, $x = \pi$, y las funciones $f(x) = \sin(3x) + 2$ y $g(x) = \cos(2x)$. Determine razonadamente: (a) El área de R ; y (b) el volumen resultante de rotar R alrededor del eje $x = -\pi$.
- [P-2.91] Determine el área limitada por $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.
- [P-2.92] Calcule razonadamente el área delimitada por $f(x) = |x| + |x - 1|$, $x = -1$, $x = 2$ y el eje X .
- [P-2.93] Sea la curva C dada por $(x - 4a)y^2 = ax(x - 3a)$, con $a > 0$. Obtenga razonadamente: (a) una representación aproximada de C ; y (b) el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje X el interior de C .
- [P-2.94] Obtenga de manera razonada el área contenida por la curva $x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- [P-2.95] Determine razonadamente λ para que las curvas $y = \lambda x^2$ e $y = \ln x$ sean tangentes. Calcule el área comprendida entre las dos curvas y el eje X .
- [P-2.96] Sean las funciones $f(x) = 2 \sin(\pi x/4)$ y $g(x) = \sin(\pi x/2)$. Determine razonadamente: (1) el área de la región limitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = 0$ y $x = 6$; (2) el volumen resultante de la revolución de la región anterior alrededor del eje $x = 8$.
- [P-2.97] Obtenga razonadamente el área de la región de \mathbb{R}^2 que es interior a las curvas $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 4y$, y exterior a las curvas $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$.
- [P-2.98] Sea la curva dada por $y = x^2 - 3|x| + 2$. Calcule razonadamente: (1) el área limitada por dicha curva y las rectas $y = 0$, $x = -1$ y $x = 2$; y (2) el volumen generado por la revolución, alrededor del eje $x = 4$, de la región del apartado anterior.

- [P-2.99] Calcule razonadamente el área de la región polar plana que es exterior a $r_1(\theta) = 2 \operatorname{sen}(3\theta)$ e interior a $r_2(\theta) = 4 \operatorname{sen}(\theta)$.
- [P-2.100] Calcule razonadamente el área comprendida entre las curvas $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ y $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.
- [P-2.101] Considere la región limitada por la curva $y^2 = 4ax$ y la recta $x = a$. Obtenga razonadamente el volumen resultante de la revolución de dicha región alrededor de la propia recta $x = a$.
- [P-2.102] Obtenga razonadamente: (a) el área encerrada por la curva $x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0$, con $a, b > 0$; (b) el volumen engendrado por dicha región al girar alrededor del eje X .
- [P-2.103] Obtenga razonadamente el área de la región limitada por las curvas $x^2 - y^2 = 14$ y $x^2 + y^2 = 34$.
- [P-2.104] Considere la región R limitada por la curva $y = \exp(-2x)$ y las rectas $y = \exp(-2)$ y $x = 0$. Determine razonadamente: (a) el volumen del objeto que tiene como base R y sus secciones transversales al eje X son cuadrados; (b) el volumen resultante de la revolución de R alrededor de la recta $y = -1$; y (c) el volumen resultante de la revolución de R alrededor la recta $x = -1$.
- [P-2.105] Determine razonadamente el área contenida por la curva $r(\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta + 3 \cos \theta$.
- [P-2.106] Calcule el área de la región plana limitada por las curvas $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0$ y $x + y + 4 = 0$.

Capítulo 3

Series infinitas

Antes de adentrarnos, en el siguiente capítulo, en el cálculo de varias variables, vamos a resumir en este capítulo unos resultados mínimos de análisis de series infinitas que todo estudiante de ingeniería debe conocer. Centraremos nuestra exposición en el estudio de la convergencia de estas series. Terminaremos con el desarrollo en serie de Taylor de una función, un resultado que nos permite aproximar cualquier función, sea algebraica o trascendente, mediante un polinomio, siempre que dispongamos de información sobre las derivadas de la función en un determinado punto de su dominio.

3.1. Conceptos básicos

Para un estudiante de Ingeniería de Telecomunicación, las series infinitas son unos objetos matemáticos de uso frecuente, tanto en el Electromagnetismo Aplicado como en la Teoría de la Señal. Una serie infinita es una suma de un número infinito de términos que, en nuestro caso, serán siempre números reales. De manera compacta, una serie infinita se puede escribir de la forma:

$$\sum_n a_n,$$

en donde n es un índice entero, y a_n es el denominado *término general* de la serie. La serie puede ser bilateral, si n va de $-\infty$ a ∞ , o unilateral, si n va de 0 a ∞ o de $-\infty$ a 0.

Conocer el valor de una serie, el resultado de la suma infinita representada por la ecuación anterior, es, en general, muy complicado. Una serie para la que se conoce el valor de su suma es la *serie geométrica*. Tiene esta forma general:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n,$$

en donde $a \neq 0$ y r es la denominada *razón* de la serie. El resultado que se tiene es el siguiente: Si $|r| \geq 1$, la serie diverge; por el contrario, si $0 < |r| < 1$, entonces la serie converge a $a/(1-r)$.

En muchas ocasiones nos conformaremos con poder dictaminar si una serie es o no convergente, sin preocuparnos realmente por su valor concreto de convergencia. En la

sección siguiente vamos a proporcionar un conjunto mínimo de criterios con los que poder determinar si una serie es o no convergente.

3.2. Criterios de convergencia

Existen distintas técnicas, dentro del Análisis Real, que permiten estudiar la convergencia de las series infinitas. Nosotros vamos a limitarnos en esta sección a enumerar, sin justificación de ninguna clase, las de aplicación más directa.

3.2.1. Criterio del término general

Es un criterio de muy sencilla aplicación. Basta con calcular el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Si este límite diverge, la serie también diverge. Veamos un par de ejemplos de uso.

- **Ejemplo 1:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n! + 1}$. Como el límite del término general es $1/2$, la serie diverge.
- **Ejemplo 2:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Como el límite del término general es 0 , no podemos concluir, con este criterio, nada sobre la convergencia de esta serie.

3.2.2. Criterio de la integral

Este criterio permite analizar la convergencia de series con términos positivos.

Sea $f(x)$ una función positiva, continua y creciente $\forall x \geq 1$, y sea $a_n = f(n)$. Se tiene entonces que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge o diverge si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge o diverge.

- **Ejemplo 1:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$. En este caso la integral impropia correspondiente diverge, por lo que la serie, de igual manera, divergerá.
- **Ejemplo 2:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$. En este caso el valor de la integral impropia es $\pi/4$, por lo que la serie convergerá. Ojo: No estamos probando que converja a $\pi/4$, sino que converge. No sabemos a qué.

3.2.3. Criterio del cociente

Sea una serie infinita con términos no nulos, y sea el cociente $Q_n = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. Se tiene que:

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n < 1$, la serie es convergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n > 1$, la serie es divergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 1$, el criterio no es concluyente.

- **Ejemplo 1:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. En este caso el límite del cociente es 0, por lo que la serie es convergente.
- **Ejemplo 2:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$. Ahora el límite del cociente es e , con lo que la serie diverge.
- **Ejemplo 3:** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$. En esta ocasión límite del cociente es 1, con lo que no podemos determinar, con este criterio, si la serie es o no convergente.

3.2.4. Criterio de la raíz

Sea una serie infinita, y sea $P_n(x) = |a_n|^{1/n}$. Se tiene que:

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n < 1$, la serie es convergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n > 1$, la serie es divergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 1$, el criterio no es concluyente.
- **Ejemplo 1:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(2n)}{n^n}$. En este caso el límite de Q_n se anula, por lo que la serie es convergente.
- **Ejemplo 2:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. Ahora el límite del cociente es 2, con lo que la serie diverge.

3.3. Desarrollo en serie de Taylor

Sean una función $f(x)$ con derivadas de cualquier orden en el punto $x = c$. Se llama *desarrollo en serie de Taylor* de $f(x)$ alrededor de $x = c$ a la siguiente serie de potencias de la variable independiente *desplazada* $x - c$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n,$$

donde los coeficientes a_n vienen dados por:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!},$$

con $a_0 = f(c)$. Si $c = 0$ el desarrollo recibe el nombre de *desarrollo en serie de Maclaurin*.

Los desarrollos anteriores permiten aproximar funciones mediante polinomios. Así, suele denominarse *polinomio de Taylor* de grado n al polinomio resultante de truncar el desarrollo de Taylor hasta la inclusión del término de grado n :

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i (x - c)^i.$$

En general $p_n(x)$ es una buena aproximación de $f(x)$ en el entorno del punto $x = c$. Esta aproximación es tanto mejor cuanto mayor sea n .

El desarrollo en serie de Taylor es una herramienta muy útil en el cálculo de funciones trascendentes, y en la representación sencilla (polinómica) de funciones cuya manipulación pueda resultar muy compleja.

3.4. Ejercicios propuestos

[E-3.1] Estudie la convergencia de las siguientes series:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} 3(3/2)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-0,6)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n+5} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} n \exp(-n/2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3} \end{aligned}$$

[E-3.2] Estudie la convergencia de las siguientes series mediante el criterio del cociente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n}}{(2n+1)!}$$

[E-3.3] Estudie la convergencia de las siguientes series mediante el criterio de la raíz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{2n-1} \right)^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)^n \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$$

3.5. Problemas propuestos

[P-3.1] Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \exp(-n^2)$.

[P-3.2] Estudie la convergencia de las series siguientes:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^n$.

[P-3.3] Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \exp(-n^2)$.

[P-3.4] Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$.

[P-3.5] Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+x)5^n}$ para $x > 5$ y $x < 5$.

[P-3.6] Estudie la convergencia de las series siguientes:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n}}{(2n+1)!}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} \right)^n$.

[P-3.7] Estudie la convergencia de las siguientes series:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{3^n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(2n)}{n^n}$.

[P-3.8] Estudie la convergencia de la serie infinita $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

[P-3.9] Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

[P-3.10] Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n^2+3n)^2}$.

[P-3.11] Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{5(n+1)} \right)^n$.

[P-3.12] Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$.

[P-3.13] Estudie la convergencia de las siguientes series:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n+1}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^n$.

[P-3.14] Estudie la convergencia de estas series infinitas:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{4n}}{(2n+1)!}.$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3n}{2n+1} \right)^{3n}.$$

[P-3.15] Calcule de manera aproximada $\ln(1,2)$. Emplee, para ello, tres sumandos (aproximación cuadrática) del desarrollo en serie de Taylor de la función $\ln(x)$ alrededor de $x = 1$.

[P-3.16] Considere la función $f(x) = x^x + 1$. Se desea calcular el valor de esta función en $x = 1,1$, para lo cual se propone realizar un desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = 1$. Determine, incorporando en el desarrollo hasta el término de orden cuadrático, $f(1,1)$.

Capítulo 4

Funciones de varias variables

En los capítulos precedentes hemos tratado los fundamentos, y algunas aplicaciones, del cálculo infinitesimal con funciones de una variable. Como se ha visto, con estos conocimientos se pueden modelar y resolver problemas de una complejidad limitada. Sin embargo, en muchas disciplinas técnicas precisaremos de una mayor potencia descriptiva en nuestros modelos, la que facilita la consideración de más de una variable independiente. En la asignatura Ampliación de Matemáticas veremos con cierta profundidad el Análisis Vectorial, la teoría que permite la manipulación de campos, que pueden verse como funciones generales, escalares o vectoriales, de varias variables independientes. En este capítulo y en el siguiente nuestro objetivo será más modesto: Pretendemos hacer una transición relativamente suave del cálculo de funciones de una variable al cálculo multivariable. Para ello, y con el objetivo de mantener la discusión simple, consideraremos, casi de manera exclusiva, funciones de *dos* variables, si bien dejaremos claro que muchas de las ideas introducidas son generalizables al caso de más variables independientes.

4.1. Funciones de varias variables

La función de varias variables más sencilla es la función de dos variables. Podemos definir una función de dos variables de la forma $f: X \rightarrow Y$, en donde X es el dominio de f e Y su imagen. En nuestro caso, X será un subconjunto de \mathbb{R}^2 e Y de \mathbb{R} . Así, generalizando lo visto para la función de una variable ($y = f(x)$), diremos ahora que $z = f(x, y)$, con $(x, y) \in X$ y $z \in Y$. Como ejemplo, considere la función $z = x^2 + y^2$ (paraboloide).

La forma natural de representar una función de dos variables es recurriendo a \mathbb{R}^3 . Puesto que f asigna un valor z a cada punto (x, y) del dominio X , podemos representar esta asignación mediante el punto (x, y, z) . Así, la altura z del punto es el valor que toma la función para el punto (x, y) del dominio (*suelo*). Si recorremos todo el dominio de f , obtenemos un conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 que podemos interpretar como una superficie. Considere, como ejemplo, la función $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$. Podemos representar esta función mediante el hemisferio superior ($z \geq 0$) de la esfera de radio uno centrada en el origen. Claramente, el dominio de esta función lo formarían los puntos del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$.

Es posible representar funciones de dos variables sin recurrir a \mathbb{R}^3 . Esta técnica plana recibe el nombre de *representación mediante curvas de nivel*. Se trata de representar en el plano los puntos del dominio de la función para los que ésta alcanza un determinado valor k .

Para el caso del ejemplo anterior, representaríamos los (x, y) tales que $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} = k$, lo que constituye, para distintos valores de k , una familia de circunferencias concéntricas alrededor del origen de coordenadas: $x^2 + y^2 = 1 - k^2$. Esta técnica es muy usada en la representación de mapas de presión atmosférica (las líneas de igual presión, k , se denominan isobaras) y en las representaciones cartográficas.

Todo lo dicho hasta el momento para funciones de dos variables puede generalizarse a un número indeterminado de variables. Así, podríamos definir una función de n variables de la forma: $z = f(x_1, \dots, x_n)$. Ahora X sería un subconjunto de \mathbb{R}^n . Evidentemente, la manipulación gráfica de este tipo de funciones es muy complicada, particularmente si n es grande. Observe que para describir la dinámica espacio-temporal de un campo escalar (por ejemplo, la presión atmosférica) son necesarias cuatro variables independientes, tres espaciales y una temporal: $P = f(x, y, z, t)$.

4.2. Límites y continuidad

Al igual que ocurría en el caso de las funciones de una variable, también ahora la idea de límite es esencial en el estudio de la continuidad y diferenciabilidad de funciones de dos o más variables. El contexto, no obstante, se hace de una complejidad mayor, lo que obliga a introducir nuevas ideas y extremar la cautela.

El límite, como vimos, es una herramienta de análisis microscópico. En el caso de las funciones de una variable, observamos, en el entorno de un punto x , las variaciones correspondientes en el entorno de $f(x)$. Ahora debemos considerar el entorno de un punto (x, y) . En el primer caso, y hablando de una manera algo grosera, un punto x tiene puntos a su *derecha* y puntos a su *izquierda*, con lo que podremos acercarnos a él en una misma dirección, pero sólo en estos dos sentidos. En el caso de un punto de \mathbb{R}^2 la definición de entorno de un punto es algo más sutil: podemos acercarnos a (x, y) desde *infinitas* direcciones. Por tanto, cuando escribimos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

queremos indicar que la convergencia al valor L se produce en *todas las direcciones posibles* en las que es posible aproximarse al punto (x_0, y_0) .

Hecha esta precisión, podemos ya explicitar las condiciones, muy similares a las vistas para funciones de una sola variable, bajo las que una función $f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) :

1. f está bien definida en (x_0, y_0) .
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ existe.
3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Lógicamente, una función f es continua si lo es en todos los puntos de su dominio X .

4.3. Derivadas parciales

En las funciones de una variable hemos visto que el concepto de derivada se asienta directamente en la idea de límite. Ocurre lo mismo en el caso de funciones de dos variables, pero con la complejidad adicional introducida en la sección anterior. Una forma de evitar esta complejidad, y, a la vez, obtener información sobre la *variabilidad* de la función, consiste en emplear el concepto de *derivada parcial*.

Considere una función $z = f(x, y)$ y un punto (x_0, y_0) de su dominio. Como vimos en la Sección 4.1, podemos visualizar esta función como una superficie. Si seccionamos esta superficie mediante el plano $y = y_0$ obtenemos una curva, la función de una variable $z = f(x, y_0)$. De manera análoga, si seccionamos la superficie mediante el plano $x = x_0$, la curva resultante sería $z = f(x_0, y)$. Sobre estas curvas (ambas funciones de una variable), podemos calcular sus derivadas, que nos proporcionarían el grado de variación de la función sobre los planos seccionadores. Estas derivadas se denominan *parciales* y se definen respectivamente así:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

La primera es la *derivada parcial de la función con respecto a x* , y la segunda con respecto a y . Es posible emplear una notación más compacta para las dos derivadas parciales anteriores: f_x y f_y , respectivamente. Obsérvese que el cálculo de estas derivadas puede realizarse empleando las reglas de derivación convencionales de las funciones de una variable, sin más que tratar como una constante a la otra variable.

Es posible definir derivadas parciales de *orden superior*. Por ejemplo, la derivada parcial de segundo orden de f con respecto a x sería:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}.$$

También cabe definir derivadas parciales *cruzadas*:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}.$$

El Teorema de Clairaut establece que si f , f_x , f_y , f_{xy} , y f_{yx} están bien definidas y son continuas en el entorno de un punto, entonces $f_{xy} = f_{yx}$ en dicho punto.

4.4. Reglas de la cadena

Como es sabido, la regla de la cadena, para funciones de una variable, permite obtener la derivada de una función compuesta. Si partimos de la función $f(x)$, y $x = g(t)$, podemos definir $w(t) = f(g(t))$, en cuyo caso:

$$w'(t) = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Con funciones de dos variables es posible definir más de una regla de la cadena, dependiendo de cómo sean los términos en que se defina la composición sobre las variables intermedias.

Sea la función $z = f(x, y)$, y supongamos, por simplicidad, que x e y dependen sólo de una variable intermedia t : $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Tendríamos, por tanto, que $w(t) = f(x(t), y(t))$, con lo que:

$$w'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (4.1)$$

Pero x e y podrían ser funciones de dos variables intermedias: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. En este caso $w(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ sería una función de dos variables, por lo que podríamos, en principio, calcular sus dos derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{aligned}$$

Es inmediato generalizar estos resultados a funciones de más de dos variables. Estos resultados serán de utilidad en la asignatura Ampliación de Matemáticas, en la parametrización de curvas y superficies, y en su interacción con campos.

4.5. Derivadas direccionales y gradiente

Al introducir las derivadas parciales, partíamos de una función de dos variables, $z = f(x, y)$, que interpretábamos como una superficie a la que realizábamos secciones transversales a los ejes X e Y . Esto daba lugar, respectivamente, a las derivadas parciales de f con respecto a y y x . Podemos pensar en seccionar la superficie por un plano vertical, que pase por el punto (x_0, y_0) , pero que no sea necesariamente paralelo a los ejes X e Y . Consideremos que ese plano esté formado por los puntos que verifican la ecuación de la recta en el plano OXY , $y = mx + n, \forall z$. Como el punto (x_0, y_0) pertenece a la recta, vamos a escribir la recta en su forma paramétrica $x(t) = x_0 + ta_1$, $y(t) = y_0 + ta_2$, donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ sería su vector director (y que suponemos unitario). Por tanto, la curva intersección de nuestra superficie $z = f(x, y)$ y este plano será:

$$z(t) = f(x(t), y(t)) = f(x_0 + ta_1, y_0 + ta_2).$$

Si derivamos esta ecuación con respecto a t , y sustituimos $t = 0$, obtendríamos la variación de f en el punto (x_0, y_0) en la dirección dada por \mathbf{a} . Usando la regla de la cadena de la sección anterior (4.1):

$$z'(t) = \frac{df(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) = f_x a_1 + f_y a_2.$$

Esta expresión puede ser escrita vectorialmente reconociendo un producto escalar de dos vectores, con lo que la variación de f buscada sería:

$$Df(x, y)_{\mathbf{a}}|_{(x_0, y_0)} = [f_x, f_y]|_{(x_0, y_0)} \cdot \mathbf{a}.$$

Observe que, puesto que hemos supuesto el vector \mathbf{a} unitario, la expresión anterior puede interpretarse como la proyección del vector entre corchetes en la dirección dada por \mathbf{a} . Este vector de derivadas parciales se denomina el *gradiente* de la función $f(x, y)$, y suele representarse de forma compacta como:

$$\nabla f = [f_x, f_y].$$

Así pues, podemos concluir que el vector gradiente de una función contiene de alguna forma todas las variaciones posibles de f . Si lo proyectamos en la dirección \mathbf{a} , *extraemos* de él la variación correspondiente a esta dirección concreta, que es lo que llamamos *derivada direccional* de f .

Por otra parte, la dirección del vector gradiente en un punto nos indica la dirección de máxima variación de f desde ese punto. En efecto, si calculamos la derivada direccional de f en la dirección \mathbf{a} obtenemos:

$$Df(x, y)_{\mathbf{a}}|_{(x_0, y_0)} = |\nabla f|_{(x_0, y_0)} \cos \theta,$$

donde θ es el ángulo formado por el gradiente y el vector unitario \mathbf{a} . Evidentemente, la derivada direccional será máxima cuando $\cos(\theta) = 1$; es decir, cuando la dirección de \mathbf{a} coincida con la del gradiente.

Para terminar esta sección vamos a demostrar un interesante resultado: el gradiente de una función en un punto es siempre perpendicular a las curvas de nivel de la función en dicho punto.

Hemos visto en la Sección 4.1 que una forma de representar funciones de dos variables es mediante curvas de nivel: Dada una función $z = f(x, y)$, sus curvas de nivel están formadas por los puntos (x, y) tales que la función en ellos toma un valor constante k .

El alumno suele estar familiarizado con el hecho de que una recta admite una representación paramétrica (acabamos de usar este hecho un poco más arriba), pero no tanto con el hecho de que cualquier curva plana admite una representación paramétrica de la forma $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$, con $t \in [t_0, t_1]$, donde las funciones $x(t)$ e $y(t)$ verificarán una cierta condición. Considere estos dos ejemplos sencillos: (1) La curva $y = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 2$, puede ser representada paraméricamente como $\mathbf{r}(t) = [t, t^2]$, $\forall t \in [0, 2]$; (2) la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ puede ser parametrizada de manera polar como $\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t]$, $\forall t \in [0, 2\pi]$.

Sea ahora una curva de nivel de la función $z = f(x, y)$, la dada por los (x, y) que cumplen $f(x, y) = k$. Supongamos que esta curva admite una representación paramétrica del tipo: $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$, $\forall t \in [t_0, t_1]$. Por tanto:

$$f(x(t), y(t)) = k.$$

Si derivamos esta ecuación con respecto a t , obtenemos:

$$f_x x'(t) + f_y y'(t) = 0.$$

Esta ecuación puede reformularse como un producto escalar de dos vectores:

$$\nabla f \cdot \mathbf{r}'(t) = 0, \forall t \in [t_0, t_1],$$

con $\mathbf{r}'(t) = [x'(t), y'(t)]$, que puede interpretarse como el vector tangente a la curva en cada punto (convéznase de este hecho). Por tanto, la ecuación anterior establece que el gradiente de la función en un punto es siempre perpendicular al vector tangente a la curva en ese punto, lo que equivale a decir que curva y gradiente son perpendiculares en cada punto, que es lo que queríamos demostrar.

Por supuesto, todo lo dicho puede generalizarse a funciones de más de dos variables, sin más que añadir más componentes, tantas como variables, al vector gradiente.

4.6. Interpretación geométrica del gradiente

En esta sección vamos a conectar algunas de las ideas anteriores, referidas a funciones de dos variables, con superficies.

Considere una superficie arbitraria definida implícitamente por los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que verifican una cierta condición $F(x, y, z) = 0$. Considere un punto cualquiera de dicha superficie $P(x_0, y_0, z_0)$. Estamos interesados en obtener la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.

Sean dos curvas cualesquiera, pertenecientes a la superficie, y que pasen por el punto P : $\mathbf{r}_1(t) = [x_1(t), y_1(t), z_1(t)]$ y $\mathbf{r}_2(t) = [x_2(t), y_2(t), z_2(t)]$. Por pertenecer a la superficie, habrán de verificar la ecuación implícita de ésta:

$$F(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = 0, \quad F(x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = 0.$$

Si derivamos ambas ecuaciones con respecto a t , obtenemos (véase la sección anterior):

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'_1(t) = 0 = \nabla F \cdot \mathbf{r}'_2(t).$$

Recuerde que $\mathbf{r}'_1(t)$ y $\mathbf{r}'_2(t)$ son ambos vectores tangentes a la superficie en el punto P , por lo que forman parte del plano tangente a la superficie en P . Por tanto, podemos concluir que ∇F es un vector normal a la superficie en el punto P . Vamos a ilustrar todo esto con un ejemplo.

Considere la superficie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9$, y sea $P(1, 2, 4)$. Si calculamos $\nabla F|_P$ obtenemos: $(2, 4, 1)$. Con lo que el plano tangente tendrá la forma general: $2x + 4y + z + D = 0$. Como el plano ha de pasar por P , esto es posible sólo si $D = -14$, con lo que el plano buscado es $2x + 4y + z - 14 = 0$.

4.7. Extremos de funciones de varias variables

En la Sección 4.5 hemos visto que el cálculo diferencial con funciones de dos variables es considerablemente más complejo que el de las funciones de una variable. En este contexto

de mayor complejidad, tratamos ahora de determinar si, como ocurre en el caso de las funciones de una variable, la diferenciación nos permite obtener los puntos extremos de una función de dos variables.

Considere una función cualquiera $z = f(x, y)$. Gráficamente, sabemos que podemos visualizar esta función como una superficie en \mathbb{R}^3 , compuesta por aquellos puntos (x, y, z) que cumplen la condición de pertenencia $F(x, y, z) = 0$, donde, en este caso, $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Esta superficie alcanzará un máximo en un punto si, en dicho punto, el plano tangente a la superficie es paralelo al plano OXY (suelo). Tal y como hemos demostrado en la sección anterior, esto ocurrirá cuando $\nabla F = (0, 0, \pm 1)$; es decir, cuando $\nabla f = 0$. Por tanto, disponemos de una vía para obtener los puntos candidatos a ser máximos o mínimos de una función $f(x, y)$: su gradiente en dichos puntos debe anularse. Esta vía sería la equivalente a $f'(x) = 0$ para el caso de funciones de una variable. En el caso de funciones de una variable, los puntos que cumplían esta condición podían ser máximos, mínimos o puntos de inflexión, y eran detectados, respectivamente, por las condiciones $f''(x) < 0$, $f''(x) > 0$ y $f''(x) = 0$ (véase la Sección 1.4). Un criterio similar, pero más complejo, puede obtenerse para las funciones de dos variables. Para ello, vamos a definir previamente el *Hessiano* o *discriminante* de $f(x, y)$ como el siguiente determinante:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

El criterio es el siguiente: Si (x, y) es un punto crítico de f ($\nabla f(x, y) = 0$), el Hessiano en dicho punto puede ser:

- **Positivo:** En este caso:
 - Si $f_{xx} > 0$ en (x, y) , (x, y) es un **mínimo**.
 - Si $f_{xx} < 0$ en (x, y) , (x, y) es un **máximo**.
- **Negativo:** (x, y) es un **punto de silla**; es decir, un punto que puede verse como un máximo o mínimo en función de la dirección en la que se observe¹.
- **Nulo:** El criterio no es concluyente sobre el carácter de (x, y) .

Para practicar el uso de este criterio, se propone demostrar que la función $f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$ posee un punto de silla en el punto $(0, 0)$, y un máximo en el punto $(2, 2)$.

Al igual que ocurría con las funciones de una variable, son muchos los problemas de optimización que pueden ser atacados con este criterio. Como ejemplo sencillo considere el siguiente problema: Una empresa de transporte sólo admite cajas rectangulares tales que la suma de su longitud y su perímetro transversal no supere los 270cm. ¿Qué dimensiones de caja conviene emplear para que el volumen de la caja sea máximo? Solución: Altura 45cm, longitud 90cm, anchura 45cm.

¹La denominación hace referencia al lugar de la silla de montar en la que sitúa el jinete: Si se observa este punto en la dirección que va de la cabeza a la cola del caballo, será un mínimo; por el contrario, si dicho punto se observa en la dirección transversal, de un estribo al otro, será un máximo.

4.8. El método de los multiplicadores de Lagrange

Existe una familia de problemas de optimización muy frecuentes en la práctica; son aquellos en los que hemos de optimizar una *función objetivo* $f(x, y)$, pero la solución, (x, y) , está además sujeta a una *restricción*, que expresamos de manera general como $g(x, y) = 0$ (el problema con el que cerrábamos la sección anterior puede interpretarse de esta manera). Esta familia de problemas se denominan *problemas de optimización restringida*, y pueden ser atacados mediante el *método de los multiplicadores de Lagrange*. Veamos en qué consiste este método.

Vamos a partir de la restricción $g(x, y) = 0$. Podemos interpretar esta restricción como la condición a verificar por los puntos pertenecientes a una curva plana. Si parametrizamos esta curva de la forma $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$, la restricción puede ser escrita como $g(x(t), y(t)) = 0$. La solución que buscamos ha de ser un punto de esta curva, y, a la vez, debe optimizar la función objetivo; es decir, $f(x(t), y(t))$ ha de ser óptimo. Sea $w(t) = f(x(t), y(t))$. Para que esta función de una variable (t) sea óptima:

$$w'(t) = f_x x'(t) + f_y y'(t) = \nabla f \cdot \mathbf{r}'(t) = 0.$$

Si derivamos con respecto a t la ecuación de la restricción, obtenemos una expresión similar:

$$g_x x'(t) + g_y y'(t) = \nabla g \cdot \mathbf{r}'(t) = 0.$$

Las dos ecuaciones anteriores obligan a que ∇f y ∇g sean paralelos: $\nabla f = \lambda \nabla g$, con λ una constante que se denomina *multiplicador de Lagrange*.

En conclusión, podemos resumir el método de los multiplicadores de Lagrange así:

1. Determine, a partir del problema, la función objetivo, $f(x, y)$, y la restricción, $g(x, y) = 0$.
2. Obtenga los puntos (x, y) que cumplen simultáneamente las dos ecuaciones siguientes:

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g = 0.$$

Dada la estructura vectorial del método, éste puede extenderse a funciones de varias variables, sin más que incluirlas en el cálculo de los gradientes de f y g . Además, puede generalizarse al caso de más de una restricción: si tenemos, por ejemplo, dos restricciones $g_1 = 0$ y $g_2 = 0$, el método se modifica de la siguiente forma:

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2, \quad g_1 = 0, \quad g_2 = 0.$$

4.9. Ejercicios propuestos

[E-4.1] Verifique que las funciones $z = \sin(x - ct)$ y $z = \sin(\omega ct) \sin(\omega x)$ cumplen la ecuación de onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

- [E-4.2] Calcule la derivada de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en el punto $(1, 2, -1)$ y en la dirección $(1, -2, 3)$.
- [E-4.3] Calcule el gradiente de $w = 3x^2y - 5yz + z^2$ en $(1, 1, -2)$.
- [E-4.4] Calcule un vector unitario normal a la curva $x \exp(y) - y = 5$ en $(5, 0)$.
- [E-4.5] Calcule el plano tangente a la superficie $z = y/x$ en el punto $(1, 2, 2)$.
- [E-4.6] Estudie los extremos de la función $f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$.
- [E-4.7] Calcule las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo inscrita en una esfera de radio r .
- [E-4.8] Maximice la función $f(x, y, z) = xy + yz$ sujeta a las restricciones $x + 2y = 6$ y $x - 3z = 0$.

4.10. Problemas propuestos

- [P-4.1] Sea C la curva dada por la intersección en el primer octante de las superficies $2z = 16 - (x^2 + y^2)$ y $x + y = 4$. Calcule razonadamente las distancias máximas y mínimas de C al origen de coordenadas. ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?
- [P-4.2] La temperatura (en grados) de una placa vitrocerámica en un punto cualquiera (x, y) viene dada por la función $T(x, y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. Conteste razonadamente: ¿se disparará la alarma?
- [P-4.3] Sea la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$. Obtenga razonadamente las coordenadas del triángulo isósceles de área máxima inscrito en dicha elipse, que tiene su vértice en el punto $(0, b)$, y base paralela al eje X .
- [P-4.4] Se desea diseñar una cámara frigorífica de 1000 m^3 de volumen. Ha de tener forma de caja rectangular. Se sabe que la pérdida de frío por unidad de área del techo es cinco veces mayor que la correspondiente al suelo, y la del suelo es tres veces mayor que la de las paredes. ¿Qué dimensiones de la cámara minimizan su pérdida de frío?
- [P-4.5] Considere la superficie circular, de radio 20cm, de una placa vitrocerámica. Se sabe que la temperatura de cada punto (x, y) de la superficie viene dada por $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y + 10$ (grados C), en donde x e y son, respectivamente, las coordenadas del punto con respecto al centro de la superficie y los ejes coordenados. Obtenga razonadamente:
1. Los puntos de mayor y menor temperatura de la superficie circular.
 2. Los puntos de mayor y menor temperatura del borde de la superficie circular.

- [P-4.6] Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área con perímetro p .
- [P-4.7] La función de producción para un fabricante de software está dada por $f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$, en donde x son las horas trabajadas e y el número de unidades de capital invertidas. Si el coste de cada hora trabajada es 150 Euros, la unidad de capital son 250 Euros, y el coste total de trabajo y capital no puede exceder de 50.000 Euros, calcule el nivel máximo de producción de este fabricante.
- [P-4.8] Obtenga las dimensiones del rectángulo de perímetro $2p$ que, al girar alrededor de uno de sus lados, forma un sólido de volumen máximo.
- [P-4.9] Las superficies $x + y + 2z = 2$ y $z = x^2 + y^2$ se cortan en una curva C . Obtenga razonadamente los puntos de C más próximos y más alejados del origen de coordenadas.
- [P-4.10] Obtenga los puntos de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se hallen más lejos y más cerca del punto $(3, 1, -1)$.
- [P-4.11] Obtenga razonadamente los puntos del cono $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto $(4, 2, 0)$.
- [P-4.12] Sea la curva dada por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y $x + 2z = 4$. Obtenga razonadamente el punto de esta curva que tiene menor altura con respecto al plano $z = 0$.
- [P-4.13] Sea el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ y (b, c) , con $a, b, c > 0$. Conteste razonadamente: ¿Cómo obtendría las dimensiones de este triángulo para que, con un perímetro P , tenga área máxima?
- [P-4.14] La altitud de una montaña puede ser descrita mediante la función $f(x, y) = c - ax^2 - by^2$, donde x e y son, respectivamente, la longitud y la latitud, y a, b, c son unas constantes conocidas. Si en el lugar de coordenadas $(1, 1)$ se deja rodar una pelota, ¿en qué dirección iniciará su descenso?
- [P-4.15] Se desea diseñar una caja de cartón rectangular de capacidad máxima. Para ello, se dispone de una plancha de cartón de $S\text{m}^2$. Calcule las dimensiones de la caja sabiendo que su base debe construirse con una pieza de $(S/4)\text{m}^2$.
- [P-4.16] Se desea calcular el plano tangente a la superficie S en el punto $P(2, 1, 3)$. Lamentablemente, no se dispone de la ecuación de S , pero sí se sabe que las curvas $\mathbf{r}_1(t) = [2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2]$ y $\mathbf{r}_2(t) = [1 + t^2, 2t^3 - 1, 2t + 1]$ están ambas en S . ¿Cómo calcularía el plano tangente a S en P ?
- [P-4.17] Encuentre el plano tangente a la superficie $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 5$ en el punto $(1, 1, -1)$. ¿Qué ángulo forma este plano con el plano XY ?
- [P-4.18] Se diseña un depósito cilíndrico para que tenga una capacidad de 4π metros cúbicos. El coste, por metro cuadrado, del material con que se elaboran las tapas del depósito es el doble del coste del metro cuadrado del material con el que se construye la superficie lateral. ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que resulte lo más barato posible?

- [P-4.19] Una esfera hinchable de $2\sqrt{3}\text{m}$ de radio se fabrica de un material plástico que es capaz, antes de desgarrarse, de soportar una presión máxima de 15N/m^2 . Si la presión en cada punto de la esfera viene dada por la función $P(x, y, z) = xyz\text{N/m}^2$, determine razonadamente si la esfera se desgarrará o no.
- [P-4.20] Sea la curva dada como intersección de las superficies $z = x + y$ y $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$. Determine los puntos de la curva más alejados y más cercanos al plano ZY .
- [P-4.21] Obtenga la distancia del origen de coordenadas al plano $x + 2y + 2z = 3$.
- [P-4.22] Dada la función $f(x, y) = 3x \exp(y) - x^3 - \exp(3y)$, se pide: (a) Encontrar y clasificar sus puntos críticos; (b) obtener el plano tangente a la superficie dada por $z = f(x, y)$ en el punto $(0, 0, 1)$; (c) calcular la distancia mínima del punto $(1, 0, 1)$ al plano tangente obtenido en el apartado (b).
- [P-4.23] La órbita de la luna alrededor de la tierra puede aproximarse bastante bien por la curva $x^2 + y^2 = (a - by)^2$, en donde a y b son dos constantes reales positivas ($a > b$). Conteste razonadamente: (a) ¿Cuál es la mínima distancia entre ambos astros? (b) ¿Y la máxima?
- [P-4.24] Un misil puede modelarse mediante un cilindro circular recto abierto por su base, y terminado en un cono circular recto. Si la superficie exterior del misil ha de ser $S\text{m}^2$, determine las dimensiones del misil para que su volumen sea máximo.
- [P-4.25] En un mapa de un valle, las variables x e y representan, respectivamente, la latitud y longitud de un punto. Si, en dicho valle, el cauce del río sigue aproximadamente la función $y = x^2$, y la carretera la función $x - y - 2 = 0$, determine razonadamente: (a) el punto de la carretera con mayor riesgo de inundación (más cercano al río); (b) la distancia al río del punto anteriormente calculado.
- [P-4.26] Sean x, y, z tres números reales positivos tales que su suma es S . Conteste razonadamente: ¿Qué relación debe existir entre estos tres números para que su producto sea máximo?
- [P-4.27] Sobre un solar con forma de un cuarto de círculo de radio 50m se construye un auditorio. Este solar se puede modelar de la forma $x^2 + y^2 \leq 50^2$, con $x, y \geq 0$. El suelo del auditorio está elevado según la función $z = (x + y)/5$, mientras que el techo puede describirse mediante $z = 20 + xy/100$. Se pide: (a) calcule razonadamente el volumen de aire que es capaz de alojar el auditorio; (b) calcule razonadamente la superficie del techo del auditorio.
- [P-4.28] Considere el sólido acotado por $z = 25 \exp(-\frac{x^2+y^2}{4})$, $z = 0$, y $x^2 + y^2 = 16$. Este sólido es taladrado verticalmente por su centro mediante una broca cilíndrica de diámetro d . ¿Cuánto ha de valer d para que la broca retire al sólido la décima parte de su volumen?
- [P-4.29] Dada una esfera de radio R , determine las dimensiones de un cilindro macizo que, inscrito en la esfera, posea una superficie total máxima.

- [P-4.30] Hallar la derivada de la función $z = f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2$ en el punto $P(1, 2)$ y en la dirección que forma con el eje X un ángulo de 60 grados.
- [P-4.31] Considere una caja cúbica de dimensiones $0 \leq x, y, z \leq 1$. Dentro de ella se coloca una lámina metálica que cabe aproximar mediante el plano $x + y + z = 1$. La distribución de temperatura, en grados, en el interior de la caja sigue la expresión $T(x, y, z) = 4 - 2x^2 - y^2 - z^2$. Determine razonadamente el punto de la lámina más caliente.
- [P-4.32] Un editor de libros dispone de 60,000 Euros para la producción y promoción de una obra. Se ha estimado que, si se invierten x Euros en producción e y Euros en desarrollo, se venden de un libro aproximadamente $20x^{3/2}y$ ejemplares. ¿Cómo debe distribuir sus fondos el editor para maximizar las ventas del libro?
- [P-4.33] En un cierto medio, la temperatura en grados de cada punto, T , viene dada por $T(x, y, z) = xy + xz + yz$. Determine razonadamente para el punto $P(1, 1, 1)$: (a) la dirección en la que la variación de la temperatura por unidad de distancia es máxima; y (b) la variación de temperatura con la distancia en la dirección del vector $(3, 0, -4)$.
- [P-4.34] Se desea expresar el número positivo A como el producto de cuatro números positivos. Obtenga razonadamente el valor de dichos números si, además, se desea que su suma sea mínima.
- [P-4.35] Un padre decide que va a repartir el premio obtenido en un sorteo (3000 Euros) entre sus tres hijos. Quiere hacerlo de manera que la felicidad percibida colectivamente por los tres (la suma de las felicidades respectivas) sea máxima. Para ello, estima que la felicidad percibida por los tres hijos va a seguir una ley logarítmica natural: el menor según el logaritmo de la cantidad recibida, el mayor según el logaritmo del cubo de la cantidad recibida, y el mediano según el logaritmo del cuadrado de la cantidad recibida. ¿Cómo deberá distribuir el padre el premio?
- [P-4.36] A una determinada profundidad, se sabe que la presión en las paredes de un batiscafo² esférico sigue la expresión $P(x, y, z) = xyz\text{N/m}^2$, en donde (x, y, z) son las coordenadas del punto de la pared con respecto al centro del batiscafo. Si el radio del batiscafo es $2\sqrt{3}\text{m}$, determine razonadamente los puntos de su superficie de menor y mayor presión, y el valor de la presión en dichos puntos.

²Especie de embarcación sumergible preparada para resistir grandes presiones y destinada a explorar las profundidades del mar.

Capítulo 5

Integración múltiple

En este capítulo vamos a generalizar algunas de las ideas fundamentales del cálculo integral de una variable. Nuestra intención con ello es poder abordar problemas más sofisticados que los vistos en el Capítulo 2. En el fondo de esta generalización está, una vez más, la idea de la suma de Riemann, que ahora emplearemos en dominios bidimensionales (integral doble) y tridimensionales (integral triple).

5.1. La idea de integración iterada

Considere la siguiente integral definida:

$$\int_1^x \left(\frac{2x^2}{y^2} + 2y \right) dy.$$

Si calculamos esta integral obtenemos:

$$\int_1^x \left(\frac{2x^2}{y^2} + 2y \right) dy = 3x^2 - 2x - 1.$$

Observe que hemos obtenido este resultado tratando a x como una constante, pues la integración se realiza sobre la variable y . Como el resultado depende de x , vamos a escribirlo como una función de una variable, $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Considere ahora esta otra integral definida:

$$\int_1^2 f(x) dx = 3.$$

Según acabamos de ver, podemos escribir esta integral de la forma *anidada* o *iterada* siguiente:

$$\int_1^2 \left[\int_1^x \left(\frac{2x^2}{y^2} + 2y \right) dy \right] dx = 3.$$

En la práctica, no suelen escribirse los corchetes, pues el orden de los diferenciales identifica el orden de la integración sobre cada una de las variables:

$$\int_1^2 \int_1^x \left(\frac{2x^2}{y^2} + 2y \right) dy dx = 3.$$

La expresión anterior es un ejemplo de *integración iterada*. De hecho, es posible considerar este ejemplo como un caso particular del siguiente caso más general:

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx. \quad (5.1)$$

Es operacionalmente posible la integración iterada en orden inverso; es decir, primero integrar en la variable x y posteriormente en la y :

$$\int_c^d \int_{n(y)}^{m(y)} f(x, y) dx dy. \quad (5.2)$$

5.2. La integral doble

Las expresiones (5.1) y (5.2) admiten una interpretación geométrica muy interesante. En el caso de (5.1), esta expresión nos indica que, para cada punto de la RVS dada por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$, construimos el siguiente producto elemental: $f(x, y) dy dx$; es decir, multiplicamos el valor de la función $f(x, y)$ en el punto de la RVS por el producto de diferenciales $dy dx$, que puede interpretarse como un diferencial de área cuadrada en el plano OXY . Si, como hemos visto en el capítulo anterior, visualizamos la función $f(x, y)$ como una superficie $z = f(x, y)$, el producto elemental anterior podría verse como el volumen elemental subtendido por esta superficie sobre una *balda* elemental, de dimensiones dx y dy , situada sobre el plano OXY . Puesto que la suma de Riemann implícita a la integración es ahora bidimensional, y, por consiguiente, está extendida a todos los puntos de la RVS, el resultado agregado es que estaríamos así calculando el volumen subtendido por la superficie $z = f(x, y)$ sobre el suelo determinado por toda la RVS. Cabe una interpretación análoga de la expresión (5.2), pero ahora para la RHS dada por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, n(y) \leq x \leq m(y)\}$.

A la vista de estas interpretaciones, podemos concluir que la integral doble de una función de dos variables sobre un cierto dominio $D \in \mathbb{R}^2$ (RVS o RHS) puede verse, de manera natural, como el volumen subtendido por la superficie asociada a la función *techo*, $f(x, y)$, sobre el dominio D especificado del *suelo*:

$$\iint_D f(x, y) dA, \quad (5.3)$$

donde dA será $dy dx$ en el caso RVS, y $dx dy$ en el caso RHS. Véase la Figura 5.1 para el caso de un suelo D rectangular.

Antes de seguir, considere el siguiente ejemplo: Sea el objeto delimitado por el plano $z = 2 - x - 2y$ y los planos del primer octante. Intentemos calcular su volumen. Claramente, el objeto tiene un *techo*, determinado por la función $f(x, y) = 2 - x - 2y$, y un *suelo* determinado por el triángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$. Este suelo puede verse como una RVS o una RHS. Las integrales dobles que permiten calcular el volumen en cada caso son:

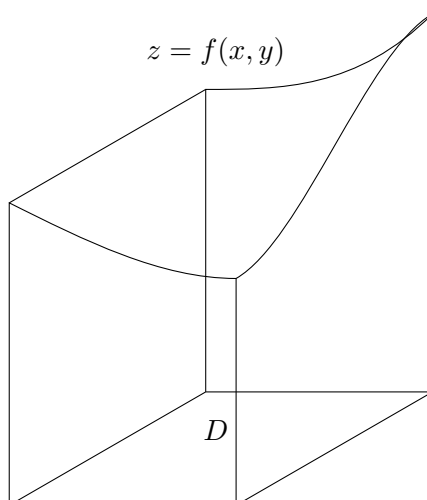


Figura 5.1: La integral doble como el volumen subtendido por una superficie.

1. **RVS:** $\int_0^2 \int_0^{(2-x)/2} (2-x-2y) dy dx.$
2. **RHS:** $\int_0^1 \int_0^{2-2y} (2-x-2y) dx dy.$

Lógicamente, no siempre serán posibles ambas vías, pues no siempre el suelo podrá verse simultáneamente como una RVS o una RHS. De hecho, en contextos más sofisticados será necesario subdividir el suelo, que será una región compuesta, en varias regiones simples, bien sean verticales u horizontales, como hacíamos en la Sección 2.1.

Una última, pero importante observación: Si en la ecuación (5.3) hacemos $f(x, y) = 1$, la integral resultante permite calcular de manera directa el área del dominio D :

$$A_D = \iint_D dA.$$

En el caso en que D sea una RVS, obtenemos:

$$A_D = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} dy dx = \int_a^b (h(x) - g(x)) dx.$$

Observe la conexión entre esta ecuación y lo que vimos en la Sección 2.1 para el cálculo de áreas planas.

5.2.1. La integral doble en coordenadas polares

En la Sección 2.2 vimos un tipo de región adicional a las RVS y RHS. Era la RAS, o Región Angularmente Simple. Matemáticamente, una RAS puede describirse mediante el conjunto de puntos $\{(r(\theta), \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, r_1(\theta) \leq r(\theta) \leq r_2(\theta)\}$. Es posible extender la idea de integral doble como volumen, ecuación (5.3), a este tipo de dominios:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta,$$

donde $f(r, \theta)$ es la función techo expresada en coordenadas polares, y hemos usado el hecho de que el diferencial de área en coordenadas polares es $r dr d\theta$ (véase la Figura 5.2; dA puede verse como la diferencia del área de dos sectores circulares).

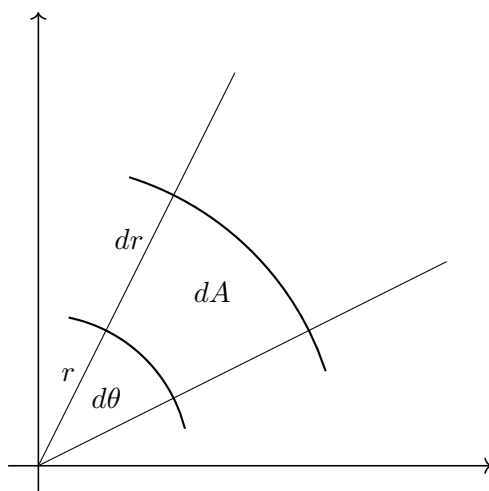


Figura 5.2: Diferencial de área en coordenadas polares.

Considere el siguiente ejemplo: Sea la función $z = f(x, y) = h \left(1 - \frac{1}{R} \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $\forall z \geq 0$. Esta función define un cono de radio R y altura h situado sobre el plano OXY . Podemos calcular su volumen de la forma:

$$V_{\text{cono}} = \int_0^{2\pi} \int_0^R h(1 - r/R) r dr d\theta = \pi R^2 h / 3.$$

Observe que es el mismo resultado que obtuvimos en el Capítulo 2, en donde abordamos este mismo cálculo, pero como un volumen de revolución.

5.2.2. La integral doble en coordenadas arbitrarias: El Jacobiano

Una de las técnicas de integración mencionadas en el Capítulo 1 es la del cambio de variable. Como es sabido, se trata de realizar un cambio de variable de integración favorable, en el sentido de que, en la nueva variable, sea más sencillo obtener la primitiva de la función. Lógicamente, esta técnica puede emplearse también en el cálculo de integrales definidas de funciones de una variable:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt, \quad (5.4)$$

en donde se ha empleado el cambio $x = g(t)$, y, en consecuencia, $a = g(c)$ y $b = g(d)$.

Considere este ejemplo clásico: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, correspondiente al cálculo del área de un cuarto de circunferencia de radio uno. Si hacemos el cambio $x = \sin t$, la integral de partida se transforma en una inmediata:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Esta valiosa técnica puede trasladarse a la integración de funciones de varias variables. Por simplicidad, vamos a ilustrar el proceso con la integración doble de funciones de dos variables, si bien se podría extender a la integración triple, que veremos un poco más adelante.

Sea la integral doble:

$$\iint_D f(x, y) dA,$$

en donde D es un dominio de \mathbb{R}^2 (en el plano OXY) recorrido por las variables x e y . Si se realiza el cambio de variables

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v),$$

la integral original, de forma similar a como ocurría en el caso de una variable, se transforma en:

$$\iint_{D'} f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Observe que:

- El dominio de integración D se transforma en el dominio D' , que se recorre ahora en las nuevas variables u, v .
- El cambio de variables se hace efectivo directamente sobre $f(x, y)$.
- En el integrando aparece un factor adicional, el valor absoluto del *Jacobiano* del cambio de variables, que se obtiene como:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix}.$$

Este factor sería el equivalente a $g'(t)$ en la ecuación (5.4).

Vamos a ilustrar esta técnica con un ejemplo. Considere el cálculo del volumen del objeto compuesto por un cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre el que, en $z = 1$, se sitúa una semiesfera de radio uno $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ (puede visualizar el objeto como un helado de cucurucho con media bola de helado). Dada la simetría del problema, podemos plantear el cálculo de este volumen como la siguiente integral doble:

$$V_{\text{pedido}} = 4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[1 + \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} - \sqrt{x^2 + y^2} \right] dy dx.$$

Observe que D es, en este caso, una RVS: la porción de un círculo de radio 1 situada en el primer cuadrante del plano OXY ; y que obtenemos el volumen pedido restando al volumen subtendido por la semiesfera el volumen subtendido por el cono. No parece un cálculo muy sencillo. Sin embargo, un análisis de la expresión anterior nos permite detectar dos regularidades que quizás podamos explotar en un cambio de variables:

1. El dominio de integración es una RAS, por lo que podríamos pensar en un cambio a coordenadas polares.
2. En el integrando aparece repetido el término $x^2 + y^2$ que resulta ser el radio polar al cuadrado.

Animados por estas dos regularidades, proponemos un cambio de coordenadas de naturaleza polar:

$$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v,$$

El Jacobiano asociado a este cambio es $J(u, v) = u$, con lo que, tras el cambio, el cálculo original se transforma en:

$$V_{\text{pedido}} = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 [1 + \sqrt{1 - u^2} - u] u \, dv \, du = 2\pi \int_0^1 [u + u\sqrt{1 - u^2} - u^2] \, du.$$

Como puede verse, el cálculo es considerablemente menos complejo tras el cambio de variables realizado: ahora la integración es inmediata (se insta a al estudiante a completar el cálculo).

Como ocurre en el caso de la integración de funciones de una variable, la detección del cambio más favorable puede no ser sencilla, y requiere del desarrollo de la sensibilidad en la detección de regularidades por la vía de enfrentarse a muchos problemas. En ocasiones, un cambio de variables simplificará considerablemente la forma de recorrer el dominio de la integral (suelo), pero puede que dicho cambio no simplifique significativamente el integrando (techo) o viceversa. El ejemplo que acabamos de ver simplifica tanto uno como otro. Es la situación ideal.

5.3. Área de una superficie

Al igual que ocurría con la integral definida de funciones de una variable, cuya interpretación natural es un área plana, pero que nos permite también calcular, entre otras cosas, volúmenes de revolución y longitudes de curvas planas, la integral doble, además de permitirnos calcular volúmenes subtendidos por superficies, posibilita otros cálculos. Como ejemplo de ello, vamos a mostrar en esta sección cómo calcular el área de una superficie arbitraria.

Sea la superficie dada por $z = f(x, y)$, $\forall (x, y) \in D, z > 0$. Suponga que realizamos una partición bidimensional de D de pasos respectivos Δx y Δy en x e y . Esto divide D , nuestro suelo, en un conjunto de baldosas de área $\Delta x \cdot \Delta y$. Considere una de estas baldosas elementales (véase la Figura 5.3). Sus vértices están compuestos por los puntos

(x, y) , $(x + \Delta x, y)$, $(x, y + \Delta y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Las imágenes de estos cuatro puntos en la superficie dan lugar a los puntos de \mathbb{R}^3 O , P , Q , R (R no se muestra en la figura, por simplicidad).

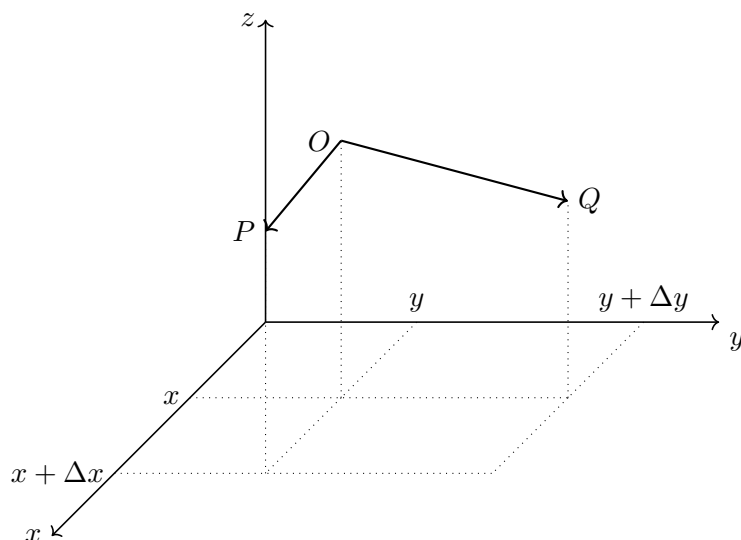


Figura 5.3: Cálculo del área de una superficie elemental.

Considere ahora los vectores \vec{OP} y \vec{OQ} . Observe que el módulo del producto vectorial de estos dos vectores es una buena aproximación, si Δx y Δy son pequeños, del área correspondiente al techo de nuestra baldosa elemental. Con lo cual, si agregamos (suma de Riemann) todas las áreas de los techos de todas las baldosas de D , obtendremos el área de la superficie de partida.

Calculemos primero el área del techo de nuestra baldosa elemental. Los vectores \vec{OP} y \vec{OQ} vienen dados por:

$$\vec{OP} = (\Delta x, 0, \Delta x \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}), \quad \vec{OQ} = (0, \Delta y, \Delta y \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}).$$

Si ahora realizamos su producto vectorial, cuando $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$, y calculamos su módulo, obtenemos:

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \|\vec{OP} \times \vec{OQ}\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy,$$

con lo que el área total de la superficie vendrá dada por:

$$A_{\text{superficie}} = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA.$$

Veamos un par de ejemplos de aplicación.

- **Ejemplo 1:** Obtenga el área de la superficie de la porción del plano $z = 2 - x - y$ que es interceptada en el primer octante por el cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$.

Claramente, el suelo de esta superficie es la porción del círculo de radio uno centrado en el origen que se encuentra en el plano OXY . El techo será el plano, es decir, la función $f(x, y) = 2 - x - y$. Como, en este caso, $f_x = f_y = -1$, el área pedida será:

$$A_{\text{pedida}} = \iint_D \sqrt{3} \, dA = \sqrt{3} \frac{\pi}{4}.$$

- **Ejemplo 2:** Obtenga el área de la porción de la superficie dada por $z = 1 - x^2 + y$ que se encuentra sobre la región triangular de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, y $(0, 1, 0)$. En este caso, el suelo de la superficie es el triángulo, que puede verse como una RVS: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$. Como ahora $f_x = -2x$, y $f_y = 1$, el área pedida puede calcularse como:

$$A_{\text{pedida}} = \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \sqrt{2 + 4x^2} \, dy dx.$$

Compruebe que el resultado es $\sqrt{6} + \ln(2 + \sqrt{6}) - \sqrt{6} \ln \sqrt{2} + \sqrt{2}/3$.

5.4. La integral triple

Quizás la forma más intuitiva de introducir la integral triple sea mediante el cálculo de la masa de un cuerpo heterogéneo, de densidad $\rho(x, y, z)$, que ocupa una región del espacio a la que designamos como Q .

Una forma de abordar este problema consiste en dividir la región Q en pequeños volúmenes prismáticos de dimensiones respectivas, según los tres ejes, Δx , Δy , Δz . Si suponemos la densidad aproximadamente constante en cada uno de estos prismas elementales, la masa del prisma correspondiente al punto (x, y, z) será $\Delta m(x, y, z) = \rho(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$. Si recorremos todos los puntos de Q y agregamos todas las masas elementales cuando las dimensiones de los prismas se hacen pequeñas ($\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$; de nuevo la suma de Riemann), obtenemos la masa total de Q . Esto suele expresarse así:

$$\iiint_Q \rho(x, y, z) \, dV,$$

con $dV = dx dy dz$.

Introducida así la idea de integral triple, el problema se reduce a cómo, para cada caso concreto, recorrer Q . Vamos a considerar distintos escenarios.

- **Escenario 1:** Supongamos que Q es un objeto como los que hemos visto en el tratamiento de las integrales dobles: un sólido tendido por una superficie $z = f(x, y)$ (techo) sobre el plano OXY (suelo). En este caso, la integral triple puede escribirse como:

$$\iint_D \int_0^{f(x,y)} \rho(x, y, z) \, dz dA,$$

donde D sería la proyección del techo sobre el suelo, que podrá ser una RVS, una RHS o una RAS, y recorreríamos como hemos visto en el caso de las integrales dobles. Como ejemplo, considere recorrer el sólido limitado por $z = 1 - (x^2 + y^2)$ y $x^2 + y^2 \leq 1$.

- **Escenario 2:** Considere ahora una variante de la situación anterior, en la que el objeto no está apoyado en el plano OXY , sino que puede verse como limitado por dos superficies, una que actúa como techo “superior” ($z = f(x, y)$) y otra como techo “inferior” ($z = g(x, y)$), que se intersecan en una curva que posee una proyección sobre el plano OXY cuyo interior podemos interpretar como un suelo D (RVS, RHS, RAS):

$$\iint_D \int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \rho(x, y, z) dz dA.$$

Para fijar mejor la idea, considere el sólido limitado superiormente por $z = 1 - (x^2 + y^2)$ e inferiormente por el hemisferio $z = -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$. En este caso podríamos asignar a D la sección común $x^2 + y^2 \leq 1$.

- **Escenario 3:** Finalmente, podemos vernos en un caso en el que no sea posible identificar un suelo claro, transversal al eje Z (simetría cilíndrica). Cuando esto ocurre, y especialmente si el objeto posee algún tipo de simetría esférica, es muy conveniente usar el sistema de coordenadas esféricas. Este sistema permite representar un punto (x, y, z) , especificado en coordenadas cartesianas, mediante tres coordenadas (r, ϕ, θ) (véase la Figura 5.4).

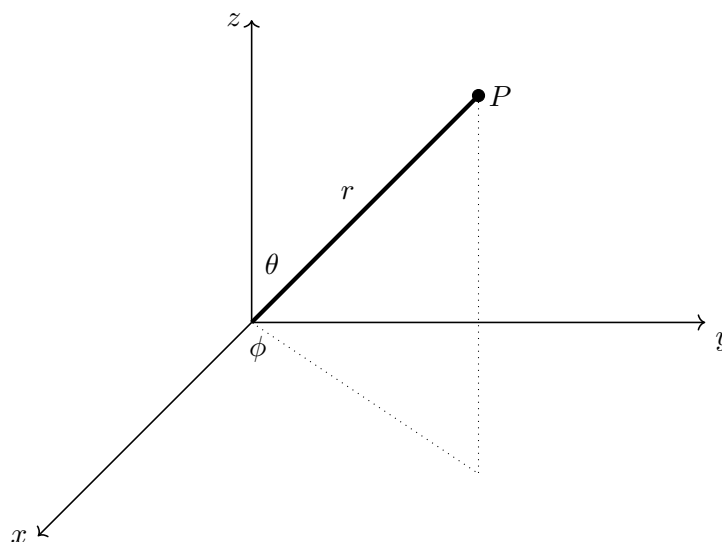


Figura 5.4: Sistema de coordenadas esféricas.

Es sencillo obtener la relación entre ambos sistemas de coordenadas:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

La forma de usar estas coordenadas en el contexto de la integración triple es la siguiente:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g(\phi, \theta)}^{f(\phi, \theta)} \rho(\phi, \theta, r) dV,$$

donde $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$. La elección de los límites de integración depende mucho de la geometría de Q . Es imposible dar unas pautas generales, por lo que será necesario analizar cada caso concreto y aprender, sobre la práctica, a tomar estas decisiones.

5.5. Ejercicios propuestos

[E-5.1] Calcule los volúmenes de las regiones especificadas:

1. $z = y/2$, $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 2$.
2. $2x + 3y + 4z = 12$, $x, y, z \geq 0$.
3. $z = 1 - xy$, $y = x$, $y = 1$, $x, y, z \geq 0$.
4. $z = \exp(-(x + y)/2)$, $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y < \infty$.
5. $z = x^3 + y^2$, $z \geq 0$, $x = -a$, $x = a$, $y = -a$, $y = a$. Estudie los siguientes casos:
(1) $a = 1$, (2) $a > 1$, y (3) $a < 1$.
6. $z = 9 - x^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 2x$, $y = 6$.
7. $z = 9 - x^2 - y^2$ y $z = 0$.
8. $z = 1 - y$, $x = 1 - y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
9. Interior a $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $(x - a/2)^2 + y^2 = (a/2)^2$.
10. Interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y sobre la hoja superior de $z^2 = x^2 + y^2$.
11. Comprendido entre $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ ($b > a$), e interior a $z^2 = x^2 + y^2$.
12. En el primer octante, acotado por los planos coordenados y $z = 4 - x - y$.
13. Interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 80$ y sobre $z = (x^2 + y^2)/2$.
14. $r^2 + z^2 = a^2$ y $r = a \cos \theta$.
15. Acotado inferiormente por $z = 2$ y superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.
16. $z = x^2 + y^2$ y $z = 2x$.
17. $x^2 + y^2 = az$ y $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a > 0$).

[E-5.2] Calcule el área de la superficie de:

1. La porción del paraboloides $z = 16 - x^2 - y^2$ en el primer octante.
2. La porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.
3. La porción del cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

[E-5.3] Halle el área de la superficie del sólido resultante de la intersección de los cilindros $x^2 + z^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$.

[E-5.4] Calcule la masa de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con:

1. Una densidad en cada punto proporcional a su distancia al origen.
2. Una densidad en cada punto proporcional a su distancia al eje Z .
3. Una densidad en cada punto proporcional a su distancia al plano $z = 0$.

[E-5.5] Calcule la integral

$$\iint_R 4(x+y) \exp(x-y) dA,$$

en donde R es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$.

5.6. Problemas propuestos

[P-5.1] Calcule razonadamente el volumen que ocupa en el primer octante el sólido comprendido entre $z = 0$, $z = x + y + 2$, y es interior a $x^2 + y^2 = 16$.

[P-5.2] Calcule razonadamente la masa del sólido Q , dado por $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 9 - x - 2y, x^2 + y^2 \leq 4\}$, si su densidad es $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$

[P-5.3] Un tumor puede ser descrito en coordenadas esféricas como $0 \leq r \leq 3 + \sin(5\phi) \sin(4\theta)$, con $\phi \in [0, 2\pi]$ y $\theta \in [0, \pi]$. Proponga razonadamente una estrategia para calcular el volumen de dicho tumor.

[P-5.4] Calcule el volumen limitado por $y = 4 - x^2$, $z = 4 - x^2$, $x, y, z \geq 0$.

[P-5.5] Sea el sólido limitado por $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $x = 0$, $z = y/3$, $z = 0$ en el primer octante. Si tiene una función de densidad dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ (Kg/u³), calcule razonadamente su masa en Kg.

[P-5.6] Halle el volumen de la región sólida acotada superiormente por $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por $z = 1 - y$.

[P-5.7] Obtenga razonadamente el volumen limitado por la superficie $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$.

[P-5.8] Calcule el volumen del sólido bajo $z = x^2 + y^2$, sobre el plano XY , e interior a $x^2 + y^2 = 2x$.

[P-5.9] Calcule el volumen del tetraedro acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, y $z = 0$.

[P-5.10] Sea la región $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq 1/\sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$. Calcule el volumen de la región A .

- [P-5.11] Calcule el volumen limitado por $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ y el plano $z = 2$.
- [P-5.12] Calcule la masa del objeto limitado por $x = 1 - y^2 - z^2$ y el plano $x = 0$, si la densidad del material que lo compone es $\rho(x, y, z) = y^2 z^2$ Kg/m³.
- [P-5.13] Calcule el volumen limitado por $z = 1/(1 + y^2)$, $x = 0$, $x = 2$, $y \geq 0$.
- [P-5.14] Sea el sólido limitado por $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$, $y = 3x$, $z = 0$ en el primer octante. Si tiene una función de densidad dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, calcule razonadamente su masa.
- [P-5.15] Las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$ ($R > 0$) determinan un volumen que es interior a ambas y tangente al plano OXY . Calcule razonadamente dicho volumen.
- [P-5.16] Sea el sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 2y$, $z = 0$, e $y + z = 3$. Calcule razonadamente el área de la superficie que constituye el “tejado” de dicho sólido.
- [P-5.17] Calcule el volumen de la región del primer octante acotada superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e inferiormente por $z^2 \sin^2 \alpha = (x^2 + y^2) \cos^2 \alpha$, donde α es un parámetro que puede tomar cualquier valor entre 0 y π .
- [P-5.18] Obtenga el área de la superficie $z = x^2 + y^2$, $z \leq 9$.
- [P-5.19] Calcule razonadamente el volumen del sólido limitado por las superficies $x + y + z = a$, $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, y $z = 0$ sabiendo que $a \geq R\sqrt{2}$.
- [P-5.20] Calcule razonadamente la masa del sólido Q , dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$, sabiendo que la densidad en cada uno de sus puntos es proporcional a la distancia del punto al plano XY .
- [P-5.21] Calcule razonadamente el volumen del sólido limitado superiormente por $z = x^2 + (y - 2)^2$, inferiormente por $z = 0$, y lateralmente por $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 6$.
- [P-5.22] Calcule razonadamente el volumen del sólido que, en el primer octante, está limitado por las superficies: $x = y$, $y = x^2$, $z = 0$, y $x + y + z = 2$.
- [P-5.23] Calcule el volumen del casquete esférico de altura h obtenido de una esfera de radio R .
- [P-5.24] Obtenga el volumen del sólido acotado por las superficies $z = x^2 + 2y^2$ y $z = 4 - x^2$.
- [P-5.25] Un sólido puede aproximarse por un cono circular recto de radio de la base R y altura h . Calcule su masa si se sabe que su densidad en cada punto es proporcional a su distancia al eje del sólido.
- [P-5.26] Sea S la porción de $z + 1 = x^2 + y^2$ situada por debajo de $z = 1$. Obtenga razonadamente el volumen de S .
- [P-5.27] Obtenga razonadamente el volumen del sólido interior a $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$ y a $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

- [P-5.28] Obtenga la masa del cuerpo delimitado por las superficies $z = \sqrt{2(x^2 + y^2)}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 4$ sabiendo que su densidad es $\rho(x, y, z) = xyz$.
- [P-5.29] Considere el sólido dado por $x^2 + y^2 \leq R^2, \forall z \geq 0$. Dicho sólido es seccionado por el plano $x + y + z = a$. Determine razonadamente el volumen de la porción del sólido interceptada por el plano seccionador y los planos del primer octante cuando:
1. $R = \sqrt{5}a$.
 2. $R = a/\sqrt{5}$.
- [P-5.30] Calcule la masa de un tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$ si su densidad es $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ Kg/m³.
- [P-5.31] Calcule el volumen de la región bajo $z = 9 - x^2 - y^2$, sobre el plano XY , y que es exterior a $x^2 + y^2 = 1$.
- [P-5.32] Calcule la masa del objeto limitado por las superficies $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ y $z = 2x^2 + 2y^2$, si su densidad es $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- [P-5.33] Una esfera maciza de 1m de radio es seccionada en tres partes mediante dos planos paralelos. Se desea que las tres partes tengan la misma masa. Si la densidad del material que forma la esfera es $\rho(x, y, z)$ Kg/m³, con (x, y, z) las coordenadas de cada punto de la esfera relativas a su centro, ¿cómo determinaría la posición de los dos planos cortantes? Razone su respuesta.
- [P-5.34] Halle el volumen del sólido limitado superiormente por $z = a - \sqrt{x^2 + y^2}$, inferiormente por el plano XY , y lateralmente por $x^2 + y^2 = ax$. $a > 0$.
- [P-5.35] Calcule el volumen del sólido limitado por $x = 0, y = 0, z = x + y, z = 1 - x - y$.
- [P-5.36] Calcule el volumen del sólido limitado por $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 + 4z^2 = 36$, y el plano XY .
- [P-5.37] Un escenario de teatro al aire libre puede aproximarse por el semicírculo limitado por $y = \sqrt{50^2 - x^2}$ e $y = 0$. Para evitar que los actores se mojen, se construye un tejado que puede modelarse mediante la función $z = 25[1 + \exp((x^2 + y^2)/1000) \cos((x^2 + y^2)/1000)]$. Obtenga razonadamente el área de dicho tejado.
- [P-5.38] Obtenga el volumen del sólido limitado superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e inferiormente por $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$.
- [P-5.39] Obtenga el volumen del objeto limitado superiormente por $f(x, y) = x/(1 + x^2y^2)$, e inferiormente por $x = 1, x = 5, y = 5/x$ y $y = 1/x$.
- [P-5.40] Calcule el volumen del objeto delimitado por $x^2 + z^2 = a^2, x + y = \pm a, x - y = \pm a, a > 0$.
- [P-5.41] Proponga cómo calcular el volumen del objeto delimitado por $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$.

- [P-5.42] Obtenga razonadamente el volumen del objeto delimitado por: $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Suponga $a > 0$.
- [P-5.43] Considere el objeto delimitado por $ax + by + cz = d$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, y los planos del primer octante. Calcule razonadamente la superficie total de este objeto.
- [P-5.44] Como es sabido, los carpinteros suelen emplear lapiceros de sección elíptica para evitar que rueden con facilidad en sus entornos de trabajo. Se pretende afilar uno de estos lapiceros, cuya sección posee semiejes a y b , mediante un sacapuntas cuyo interior puede modelarse mediante un cono del tipo $z = h \left(1 - \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $z \geq 0$, en donde $h, c > 0$. Calcule razonadamente el volumen de madera que se le retira al lapicero tras su completo afilado si $c > a, b$.
- [P-5.45] Calcule razonadamente el volumen del objeto limitado por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$, $0 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)$.
- [P-5.46] Calcule razonadamente la masa del objeto limitado por $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = a^2$, y y $z + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ si la densidad en cada punto del objeto, $\rho(x, y, z)$, es proporcional a su distancia al plano $z = 0$.
- [P-5.47] Calcule razonadamente el volumen del objeto limitado por $z = 0$, $z = (x/a)^2 + (y/b)^2$, y $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 2x/a$.
- [P-5.48] Proponga razonadamente cómo calcular el volumen del objeto delimitado por la superficie $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 27a^3xyz$.
- [P-5.49] La superficie $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ ($a, b, c > 0$), junto con los planos $x = 0$, $y = 0$, y $z = 0$ definen, en el primer octante, un tetraedro. Calcule razonadamente: (1) el volumen de dicho tetraedro; y (2) los valores de a, b, c para que dicho volumen sea mínimo, sabiendo que, además, el “techo” del tetraedro debe contener al punto (A, B, C) .
- [P-5.50] Calcule razonadamente el volumen común a las superficies $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
- [P-5.51] Geométricamente, una cuña de queso de bola puede modelarse mediante el conjunto $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2, \forall x, y, z \geq 0\}$. Al queso se le retira una porción limitada por los planos coordenados y el plano $x/a + y/b = 1$, ($0 < a, b \leq c$). Obtenga razonadamente la masa de queso retirada si la densidad del queso en cada punto es siempre igual a la distancia de éste a la base del queso (plano OXY).
- [P-5.52] Calcule razonadamente el volumen de la porción del sólido $4(x^2 + y^2) = (2a - z)^2$ limitado por $x^2 + y^2 = 2ax$, $x = 0$, $z = 0$ y $z = 2a$.
- [P-5.53] Una bola esférica de madera de radio R flota en un estanque, de tal manera que la parte sumergida tiene una altura h . Es posible estimar h mediante el principio de Arquímedes: el peso de la bola es igual al peso del agua desalojada por la bola. Durante el día, las densidades de la bola y el agua permanecen aproximadamente constantes (la densidad de la madera es 0,4 veces la densidad del agua, 1kg/l). Sin

embargo, durante la noche la densidad del agua decrece, desde el valor diurno, exponencialmente con la profundidad; la densidad de la madera no varía apreciablemente. Proponga razonadamente cómo calcular h de día y de noche.

[P-5.54] Calcule razonadamente el volumen acotado superiormente por $z = 1 + xy$ e inferiormente por el triángulo de vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$, $(3, 2)$.

[P-5.55] Obtenga razonadamente la masa del sólido limitado por $\frac{b}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq b$ ($a, b > 0$), sabiendo que su densidad es $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{Kg/m}^3$.

Capítulo 6

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) son ecuaciones que, de manera simplificada, permiten modelar la dinámica de muchos procesos. La simplificación consiste en reducir la dependencia del proceso a una sola variable. Esto, como es lógico, generará ciertas limitaciones, pero también la posibilidad de obtener predicciones dinámicas de una manera sencilla.

Este capítulo pretende ser una introducción general a las EDOs. Comenzaremos con las EDOs de primer orden y después veremos las de segundo orden. Especialmente estas últimas serán la base de numerosos modelos en las telecomunicaciones; por ejemplo, en el análisis de circuitos, en el electromagnetismo básico, o en la dinámica de sistemas lineales.

6.1. Conceptos básicos

Como se ha dicho, una EDO es una ecuación, verificada por una función de una variable, a la que llamaremos $y(x)$. El adjetivo *diferencial* hace referencia al hecho de que en la ecuación aparecen también las derivadas de $y(x)$. El orden de la mayor derivada presente en la ecuación determina el *orden* de la EDO. Así, podemos describir de manera general una EDO de primer orden (EDO-1) como:

$$F(x, y, y') = 0,$$

donde F es una función arbitraria de x, y e y' . De manera análoga, podemos describir una EDO de segundo orden (EDO-2) de la forma:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Un ejemplo de EDO-1 sería la ecuación $y' = \cos x$, y un ejemplo de EDO-2 $y'' + 9y = 0$.

Como con toda ecuación, nuestro objetivo será casi siempre encontrar su solución. En el caso de las EDOs, la solución *general* será una familia de soluciones dependiente de uno (EDO-1) o dos (EDO-2) parámetros. Se llama solución *particular* a la solución específica para unos ciertos valores de estos parámetros.

Es imposible dar una solución general para una EDO genérica. En función de la estructura concreta de la EDO a resolver, seleccionaremos una estrategia favorable de obtención de la solución; es decir, la resolución de EDOs requerirá la identificación previa

de propiedades estructurales en la ecuación que podamos explotar en nuestro beneficio. Comenzaremos, en la sección siguiente, por las EDOs-1, y después continuaremos con las EDOs-2.

6.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Vamos a considerar tres propiedades estructurales posibles a reconocer en una EDO-1: si ésta es separable, si es exacta o si es lineal. Dedicamos una subsección a cada una de estas propiedades.

6.2.1. Ecuaciones separables

Una EDO-1 se dice separable si puede factorizarse de la forma:

$$y'(x) = f_1(x)f_2(y),$$

en donde las funciones f_1 y f_2 son arbitrarias. Esta factorización permite escribir la ecuación original de manera alternativa como

$$\frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)dx.$$

Observe que el miembro izquierdo sólo depende de y , mientras que el derecho sólo depende de x , con lo que

$$\int \frac{1}{f_2(y)}dy = \int f_1(x)dx.$$

El problema se reduce, por tanto, a calcular las dos integrales y, si es posible, despejar y para obtener la solución general en su forma explícita. Considere el siguiente ejemplo: $y' = 1 + y^2$. Esta EDO-1 es separable, pues es posible escribirla como

$$\frac{1}{1 + y^2}dy = dx.$$

Si integramos, obtenemos $\arctg y = x + C$, con C un parámetro arbitrario, con lo que la solución general de esta EDO-1 es: $y(x) = \text{tg}(x + C)$.

Algunas EDOs-1 no son inicialmente separables, pero pueden hacerse separables mediante un cambio de variable. Un ejemplo de esto son las EDOs-1 del tipo $y' = g(y/x)$, donde g es una función arbitraria del cociente y/x . En efecto, si llamamos $u = y/x$, la EDO-1 original se transforma en:

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Esta ecuación es ahora separable en las variables u y x con lo que, una vez realizadas las correspondientes integraciones en ambos miembros, podemos obtener la solución general deshaciendo el cambio de variable realizado. Veamos un ejemplo sencillo.

Considere la EDO-1: $2xyy' = y^2 - x^2$. Esta ecuación no es separable. Pero, si despejamos y' , el miembro derecho puede verse como una función del cociente y/x :

$$y' = \frac{y/x - x/y}{2} = g(y/x).$$

La EDO-1, por tanto, responde a la estructura que puede hacerse separable mediante el cambio $u = y/x$. Compruebe que la solución general de esta ecuación es $x^2 + y^2 - Cx = 0$.

6.2.2. Ecuaciones exactas

Acabamos de ver que si, al despejar y' en una EDO-1, podemos factorizar en variables separadas el miembro de la derecha, la ecuación es separable. Lamentablemente, la mayoría de las EDOs-1 no son separables. Consideremos las EDOs-1 que pueden escribirse de la forma:

$$y' = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad (6.1)$$

en donde las funciones de dos variables M y N son arbitrarias. Muchas EDOs-1 pueden escribirse de esta manera tan general. La ecuación (6.1) puede escribirse también como:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (6.2)$$

Considere ahora una función de dos variables $u(x, y)$. Sabemos que su diferencial total puede obtenerse como (véase la Sección 4.4):

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \quad (6.3)$$

Si comparamos las ecuaciones (6.2) y (6.3), vemos que $du = 0$ (u posee una diferencial *exacta*), y que:

$$M(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Si derivamos estas dos condiciones con respecto a y y x , respectivamente, obtenemos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que estamos bajo las condiciones del Teorema de Clairaut (véase la Sección 4.3), nuestra EDO-1, ecuación (6.1), será *exacta* si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Es posible mostrar que esta condición es necesaria y suficiente.

Hasta el momento, hemos conseguido determinar si una EDO-1 es o no exacta. La cuestión es si esto ayuda o no a obtener su solución. Veámoslo. Hemos deducido que, si la ecuación es exacta, $M(x, y) = u_x$, con lo que, despejando u :

$$u = \int M(x, y)dx + k(y), \quad (6.4)$$

donde $k(y)$ es una función de y por determinar. Por otra parte, sabemos que $N(x, y) = u_y$. Si sustituimos en esta ecuación el resultado (6.4), obtenemos una ecuación de la que es posible determinar $k(y)$, y obtener así la solución implícita de la EDO-1. Vamos a ilustrar este procedimiento con un ejemplo.

Sea la EDO-1:

$$y' = -\frac{x^3 + 3xy^2}{3x^2y + y^3}.$$

Para ver si esta EDO-1 es exacta, identificamos primero $M = x^3 + 3xy^2$ y $N = 3x^2y + y^3$. Es sencillo comprobar que $M_y = N_x = 6xy$, con lo que la EDO-1 es exacta. Por ser exacta:

$$u = \int M(x, y)dx + k(y) = x^4/4 + 3x^2y^2/2 + k(y). \quad (6.5)$$

Si sustituimos este resultado en $u_y = N$:

$$3x^2y + k'(y) = 3x^2y + y^3,$$

con lo que $k(y) = y^4/4 + C$. Reintegrando este resultado en (6.5), obtenemos la solución general de esta EDO-1:

$$x^4/4 + 3x^2y^2/2 + y^4/4 = C.$$

Tal y como ilustra este ejemplo, resolver EDOS-1 exactas es sencillo. Nos preguntamos ahora si, dada una EDO-1 de la forma general dada por (6.2), pero que *no* es exacta, podemos de alguna manera convertirla en exacta. Una posibilidad es multiplicar toda la ecuación por un *factor de integración* $F(x, y)$:

$$F(x, y)M(x, y)dx + F(x, y)N(x, y)dy = 0.$$

Podemos ver esta ecuación de la forma original si identificamos $\tilde{M}(x, y) = F(x, y)M(x, y)$ y $\tilde{N}(x, y) = F(x, y)N(x, y)$:

$$\tilde{M}(x, y)dx + \tilde{N}(x, y)dy = 0.$$

Evidentemente, esta ecuación será exacta si $\tilde{M}_y = \tilde{N}_x$, lo que supone elegir un $F(x, y)$ que verifique:

$$F_yM + FM_y = F_xN + FN_x.$$

Lamentablemente, resolver esta ecuación (se trata de una Ecuación de Derivadas Parciales para F) es un problema más complejo que resolver la EDO-1 original, por lo que vamos

a reducir los grados de libertad en la elección del factor de integración, de manera que sólo dependa de una variable. Supongamos, pues, que $F(x, y) = F(x)$. En este caso, la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{F'}{F}.$$

Observe que el miembro de la derecha sólo depende de x , por lo que, para existir F , el miembro de la izquierda deberá ser también sólo función de x . Si llamamos a éste $R(x)$, F se obtiene de manera inmediata como

$$F(x) = \exp \left\{ \int R(x) dx \right\}. \quad (6.6)$$

Se puede obtener un factor de integración $F(y)$ de manera análoga:

$$F(y) = \exp \left\{ \int S(y) dy \right\},$$

donde ahora $S(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$.

Determinado el factor de integración que convierte la EDO-1 original en exacta, la solución de la ecuación se obtiene aplicando, sobre la ecuación modificada por la inclusión del factor de integración, el protocolo de resolución deducido para las ecuaciones exactas.

Como ejemplo de aplicación, obtenga, mediante la obtención previa de un factor de integración, la solución de la EDO-1 siguiente:

$$y' = -\frac{2 \operatorname{sen}(y^2)}{xy \cos(y^2)}.$$

Solución: $x^4 \operatorname{sen}(y^2) + C = 0$.

6.2.3. Ecuaciones lineales

Una EDO-1 se dice *lineal* si puede escribirse de la forma:

$$y' + p(x)y = r(x), \quad (6.7)$$

en donde las funciones $p(x)$ y $r(x)$ son arbitrarias. Cuando $r(x) = 0$, la ecuación se dice *homogénea*; en caso contrario, *no homogénea*. Observe que todas las EDOs-1 lineales homogéneas son separables:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx;$$

con lo que la solución general es

$$y(x) = C \exp \left\{ - \int p(x) dx \right\}.$$

Tratemos de encontrar ahora una solución general de le EDO-1 lineal no homogénea. El hecho de que $r(x) \neq 0$ hace que la ecuación no sea ahora separable. Intentemos ver si es exacta. Para ello, escribamos la EDO-1 lineal genérica, ecuación (6.7), de la forma (6.2):

$$(p(x)y - r(x)) dx + dy = 0.$$

En este caso, $M(x, y) = p(x)y - r(x)$, y $N(x, y) = 1$, por lo que una EDO-1 lineal genérica sólo será exacta cuando $p(x) = 0$, pero, en este caso, la EDO-1 lineal no homogénea sería separable, por lo que carece de sentido su consideración. ¿Cómo abordar la solución del caso general no homogéneo ($p(x) \neq 0$)?

En la subsección anterior hemos visto que una ecuación no exacta puede convertirse en exacta mediante un factor de integración, si bien no tenemos la seguridad de que dicho factor exista. Intentemos esta aproximación, y tratemos de identificar un factor de integración dependiente de x , $F(x)$. Según vimos en (6.6),

$$F(x) = \exp \left\{ \int R(x) dx \right\}, \quad R(x) = \frac{M_y - N_x}{N}.$$

Si sustituimos para nuestros valores de M y N , obtenemos:

$$F(x) = \exp \left\{ \int p(x) dx \right\} = \exp \{h(x)\}, \quad h(x) = \int p(x) dx.$$

Por tanto, *siempre* vamos a poder convertir una EDO-1 lineal en exacta, pues *siempre* vamos a poder encontrar $F(x)$.

En principio, obtenida la ecuación exacta, podríamos solucionarla siguiendo el protocolo deducido para resolver este tipo de ecuaciones; sin embargo, podemos emplear ciertas regularidades de la ecuación exacta resultante que lo hacen innecesario. La ecuación exacta a resolver es:

$$\exp \{h(x)\} dy + \exp \{h(x)\} (p(x)y - r(x)) dx = 0. \quad (6.8)$$

Considere ahora el siguiente resultado:

$$(\exp \{h(x)\} y)' = \exp \{h(x)\} (p(x)y + y'),$$

en donde hemos usado el hecho de que $h'(x) = p(x)$. Si empleamos este resultado en (6.8), obtenemos que nuestra ecuación exacta de partida puede escribirse como

$$(\exp \{h(x)\} y)' = \exp \{h(x)\} r(x).$$

Si ahora integramos los dos miembros de esta ecuación con respecto a x , obtenemos que

$$y(x) = \exp \{-h(x)\} \int \exp \{h(x)\} r(x) dx, \quad (6.9)$$

con $h(x) = \int p(x) dx$. Esta es la forma general de la solución de cualquier EDO-1 lineal.

Como ejemplo de aplicación de este resultado, se propone resolver la ecuación $y' - y = \exp(2x)$. Solución: $y(x) = C \exp(x) + \exp(2x)$.

Algunas EDOs-1 no lineales, aquellas EDOs-1 que *no* pueden expresarse de la forma (6.7), pueden reducirse a una forma lineal, y ser resueltas mediante el método que acabamos de ver. De entre ellas, la más famosa es la *ecuación de Bernoulli*:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad (6.10)$$

en donde $p(x)$ y $q(x)$ son dos funciones arbitrarias, y n es un entero. Observe que sólo si $n = 0, 1$ la ecuación es lineal. ¿Cómo reducir esta ecuación a lineal fuera de estos dos casos?

Si multiplicamos ambos miembros de (6.10) por $(1 - n)y^{-n}$, obtenemos

$$(1 - n)y^{-n}y' + (1 - n)p(x)y^{1-n} = (1 - n)q(x),$$

que podemos expresar como

$$(y^{1-n})' + (1 - n)p(x)y^{1-n} = (1 - n)q(x).$$

Si llamamos $u = y^{1-n}$, la ecuación anterior se convierte en

$$u' - (1 - n)p(x)u = (1 - n)q(x).$$

Observe que esta EDO-1 es lineal para la función u , por lo que podemos emplear el método de las EDOs-1 lineales para calcular u y, a partir de $u = y^{1-n}$, calcular la solución general y .

Como ejemplo de aplicación, se propone calcular la solución general de $y' + xy = x^3y^3$. Solución: $y = \pm 1/\sqrt{C \exp(x^2) + x^2 + 1}$.

6.2.4. La iteración de Picard

Como su propio nombre indica, la iteración de Picard es un método iterativo que permite calcular soluciones aproximadas de una EDO-1. Supongamos que queremos calcular la solución de la EDO-1 genérica

$$y' = f(x, y), \quad (6.11)$$

con $f(x, y)$ una función arbitraria, y sabiendo que $y(x_0) = y_0$. Esta forma de plantear la EDO-1 es lo que suele denominarse un *problema de valor inicial*: queremos estimar valores futuros de $y(x)$ ($\forall x > x_0$), a partir del conocimiento del valor de la función y en un instante inicial x_0 (y_0).

En principio, nada nos impide integrar ambos miembros de (6.11):

$$\int_{y_0}^y d\theta = \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau))d\tau;$$

es decir:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y(\tau))d\tau.$$

La integración en el miembro derecho de esta ecuación no puede realizarse, ya que desconocemos y (realmente es lo que queremos encontrar); sin embargo, podemos hacer una primera aproximación de la solución si suponemos que $y(\tau) = y_0, \forall \tau$:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y_0) d\tau.$$

Esta aproximación puede refinarse si usamos y_1 en la integral:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y_1(\tau)) d\tau.$$

Este proceso de sucesivas aproximaciones puede extenderse indefinidamente:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\tau, y_{n-1}(\tau)) d\tau.$$

En general, el método converge siempre que en el intervalo de análisis la función $f(x, y)$ no posea un comportamiento “patológico”.

6.3. Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

Aparentemente, las EDOs-2 no deberían introducir una complejidad mucho mayor sobre lo que hemos visto hasta ahora para las EDOs-1; sin embargo, no es así. La incorporación de derivadas de segundo orden en la EDO nos obliga a clasificar a las EDOs-2 en dos categorías: las EDOs-2 lineales y las no lineales. Estas últimas son de muy difícil solución (supera el marco de un curso introductorio como este), por lo que nos limitaremos al estudio y resolución de EDOs-2 lineales.

Una EDO-2 lineal responde a esta estructura:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad (6.12)$$

en donde $p(x), q(x)$ y $r(x)$ son tres funciones arbitrarias. Observe que esta estructura es una generalización de la que vimos para las EDOs-1 lineales (6.7). Al igual que hacíamos entonces, también es posible en este caso clasificar las EDOs-2 lineales en homogéneas o no homogéneas en función de que $r(x)$ sea cero o no, respectivamente.

6.3.1. Ecuaciones homogéneas

Resolver la EDO-2 lineal homogénea consiste en encontrar las funciones $y(x)$ que verifican la ecuación:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (6.13)$$

De cara a obtener la estructura de las soluciones de esta ecuación, vamos a recurrir a nuestros conocimientos de Álgebra Lineal. Considere un operador en el espacio V de las funciones reales de variable real continuas en un determinado intervalo de interés:

$T: V \rightarrow V$. Suponga que este operador transforma funciones según: $T(y(x)) = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x), \forall y(x) \in V$. Observe que el núcleo de este operador sería:

$$\text{Ker}(T) = \{y(x) \in V : y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\}.$$

Es decir, resolver (6.13) es equivalente a calcular $\text{Ker}(T)$.

Considere ahora dos funciones cualesquiera de $\text{Ker}(T)$: $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Necesariamente estas dos funciones verificarán:

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \quad y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0.$$

Sea ahora la combinación lineal $s(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$. Es muy sencillo demostrar que $s(x) \in \text{Ker}(T)$. Con lo que $\text{Ker}(T) = \text{span}(y_1, y_2)$. Si imponemos la independencia lineal de y_1 e y_2 , el conjunto $\{y_1, y_2\}$ sería una base de $\text{Ker}(T)$ en la que podríamos escribir, como combinación lineal de sus elementos, todas las posibles soluciones de (6.13):

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

No es complicado demostrar que la condición necesaria y suficiente para la independencia lineal de $\{y_1, y_2\}$ es:

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0.$$

Esta condición puede escribirse como un determinante empleando el *Wronskiano* de y_1 e y_2 :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Concluimos por tanto, tras este análisis algebraico del problema, que cualquier EDO-2 homogénea queda resuelta, de manera general, una vez dispongamos de dos soluciones que no anulen su Wronskiano. En los dos apartados siguientes vamos a mostrar cómo obtener estas dos soluciones, que constituyen lo que se denomina el *sistema fundamental* de soluciones de la ecuación. Comenzaremos con un subconjunto de EDOs-2 en la que esto es sencillo, las EDOS-2 con coeficientes constantes, y luego volveremos al caso general.

EDOs-2 homogéneas con coeficientes constantes

Estas EDOs-2 responden a la estructura:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{6.14}$$

donde $p, q \in \mathbb{R}$. Dada la naturaleza de esta ecuación, buscamos una función que, al ser derivada reiteradamente, no cambie su dependencia funcional. Esa función podría ser del tipo $y(x) = \exp(\lambda x)$, con λ una constante a determinar. Si sustituimos esta solución tentativa en (6.14), obtenemos la siguiente ecuación polinómica para la constante λ :

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Así pues, $y(x) = \exp(\lambda x)$ será solución de la EDO-2 sólo si λ verifica la ecuación polinómica anterior. Lógicamente, los posibles valores de λ serán:

$$\lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

En función del valor tomado por el discriminante $p^2 - 4q$, podemos considerar tres casos posibles:

1. $p^2 - 4q > 0$: En este caso, λ toma dos valores reales distintos, λ_1, λ_2 , con lo que el sistema fundamental de soluciones estará formado por $\{\exp(\lambda_1 x), \exp(\lambda_2 x)\}$ (es inmediato verificar que su Wronskiano no se anula). Por tanto, la solución general de la ecuación en este caso será:

$$y(x) = \alpha_1 \exp(\lambda_1 x) + \alpha_2 \exp(\lambda_2 x), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $p^2 - 4q < 0$: Ahora λ toma dos valores complejos conjugados¹: $\lambda_1 = -p/2 + i\omega$ y $\lambda_2 = -p/2 - i\omega$, con $\omega = \sqrt{4q - p^2}/2$. La solución general es ahora:

$$y(x) = \exp(-px/2)[\alpha_1 \exp(i\omega x) + \alpha_2 \exp(-i\omega x)], \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Puesto que estamos interesados en soluciones reales, esta solución puede expresarse, sin pérdida de generalidad, como:

$$y(x) = \exp(-px/2)[\alpha_1 \cos(\omega x) + \alpha_2 \operatorname{sen}(\omega x)], \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

3. $p^2 - 4q = 0$: Esta situación conduce a una solución doble para λ : $\lambda_1 = \lambda_2 = -p/2$. Esto supone que sólo obtenemos una solución de la ecuación homogénea, $y_1(x) = \exp(-px/2)$ con la que construir el sistema fundamental. ¿Cómo obtenemos la otra, $y_2(x)$? Podemos emplear el *método de reducción del orden*, basado en suponer que $y_2 = uy_1$, donde u es una función a determinar imponiendo que y_2 verifique la EDO-2 homogénea. Es sencillo comprobar (hágalo) que $u = x$, con lo que la solución general en este caso es:

$$y(x) = (\alpha_1 + \alpha_2 x) \exp(-px/2), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

EDOs-2 homogéneas sin coeficientes constantes

Encontrar, de manera general, un sistema fundamental de soluciones de la ecuación (6.13) es imposible. De hecho, no hay una manera de obtener ni siquiera *una* solución de esta ecuación de forma general. Será preciso, para cada caso concreto de $p(x)$ y $q(x)$, “buscarse la vida” para, por inspección, tratar de obtener una solución. Obtenida una solución (llamémosle y_1), podríamos recurrir al método de la reducción del orden, empleado en el apartado anterior, para obtener una segunda solución y construir así el necesario sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea. Así, si suponemos que $y_2 =$

¹Si no está familiarizado con los números complejos, es muy conveniente que revise el Apéndice C.

vy_1 , y sustituimos y_2 en (6.13), no es difícil llegar (es un buen ejercicio verificar este resultado) a que

$$v(x) = \int \frac{\exp\left\{-\int p(x)dx\right\}}{y_1^2(x)} dx. \quad (6.15)$$

Con la función $v(x)$ así obtenida calculamos y_2 , y obtenemos así el necesario sistema fundamental de soluciones de la homogénea. Pero recuerde que no será posible llegar a él si no conseguimos obtener previamente de alguna forma y_1 .

Como ilustración, considere la ecuación de *Legendre*: $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$. Se trata de una EDO-2 lineal no homogénea y sin coeficientes constantes. La forma de esta ecuación nos permite proponer tentativamente $y_1 = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Si sustituimos en la ecuación, vemos efectivamente que esta función es solución para $k = 1$, con lo que $y_1(x) = x$. Llegado a este punto, podríamos emplear (6.15) y obtener el sistema fundamental, con el que obtendríamos la solución general de la ecuación. Hágalo.

6.3.2. Ecuaciones no homogéneas

La solución general de una EDO-2 no homogénea es de la forma:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

donde $y_h(x)$ es la solución de la ecuación homogénea correspondiente (de acuerdo con todo lo que hemos visto en la subsección anterior), e $y_p(x)$ es una solución particular, sin depender de ninguna constante, de la ecuación no homogénea. Evidentemente, esta *superposición* de soluciones es una consecuencia de la linealidad de la EDO2 bajo análisis.

¿Cómo determinar $y_p(x)$? Si disponemos de la solución de la homogénea, disponemos de un sistema fundamental de soluciones, $\{y_1, y_2\}$, a partir del cual, mediante el *método de variación de parámetros* (MVP)², obtener y_p :

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx,$$

con W el Wronskiano del sistema fundamental de soluciones de la homogénea. Las integraciones en la ecuación anterior no tienen por qué ser sencillas, pero disponemos, en cualquier caso, de un método universal para obtener la solución particular de cualquier EDO-2 lineal, una vez determinado el sistema fundamental.

Si la EDO-2 no homogénea es de coeficientes constantes, podemos emplear un método, el llamado *método de los coeficientes indeterminados* (MCI), para calcular y_p . Este método no es universal para todas las EDOs-2 lineales no homogéneas de coeficientes constantes. Su posible aplicación depende de cómo sea $r(x)$. Pero, si su aplicación es posible, la obtención de y_p suele ser más sencilla por esta vía, dependiendo de la complejidad de $r(x)$.

¿Cómo tiene que ser $r(x)$ para poder emplear el MCI? Es necesario que $r(x)$ conste de una suma de términos cada uno de los cuales tenga un número finito de derivadas linealmente independientes. Por ejemplo, si $r(x) = x^3$, sus derivadas son $3x^2$, $6x$ y 6 ; estas

²La forma de y_p propuesta resulta de la aplicación del método de la reducción del orden, visto con anterioridad.

tres funciones son linealmente independientes. En este caso podríamos usar el MCI. Sin embargo, si $r(x) = 1/x$, no podríamos usarlo ya que, aunque sus derivadas son linealmente independientes, constituyen un conjunto infinito. Observe que si $r(x) = \sin(2x)$, sus derivadas sucesivas son infinitas; sin embargo, sólo el conjunto compuesto por dos de ellas, $\sin(2x)$ y $\cos(2x)$, es linealmente independiente. La inclusión en este conjunto de cualquier otra de las derivadas de $r(x)$ lo hace linealmente dependiente. Por tanto, sí podríamos usar el MCI en este caso.

En la práctica, se suelen usar unas tablas en las que, para determinadas formas de $r(x)$ válidas, se proponen las correspondientes $y_p(x)$ dependientes de unos *coeficientes a determinar* (este es el origen del nombre del método). A continuación se muestra una de dichas tablas para los casos de $r(x)$ más frecuentes en Ingeniería.

$r(x)$	$y_p(x)$
$p_n(x)$	$A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n$
$p_n(x) \exp(ax)$	$(A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n) \exp(ax)$
$p_n(x) \exp(ax) \sin bx$ ó $p_n(x) \exp(ax) \cos bx$	$\exp(ax)[(A_0 + A_1x + \dots + A_nx^n) \cos bx$ $+ (B_0 + B_1x + \dots + B_nx^n) \sin bx]$

Una vez determinada, a partir de la tabla, la $y_p(x)$ a emplear, es necesario, antes de sustituirla en la ecuación para obtener los coeficientes indeterminados, verificar que esta $y_p(x)$ no es solución de la ecuación homogénea (cuando esto ocurre, se dice que hay una *colisión*). Las colisiones pueden ser simples o dobles. Una colisión es *simple* cuando la $y_p(x)$ propuesta por la tabla coincide con la solución de la homogénea de los casos 1 y 2 de la página 78. Por su parte, una colisión es *doble* cuando la $y_p(x)$ propuesta por la tabla coincide con la solución de la homogénea del caso 3 de la página 78.

Detectada la colisión, es necesario actualizar la $y_p(x)$ propuesta por la tabla de acuerdo con el siguiente esquema: Si la colisión es simple, $y_p(x)$ se convierte en $xy_p(x)$. Si la colisión es doble, $y_p(x)$ se convierte en $x^2y_p(x)$.

Se recomienda no avanzar sin trabajar antes estos ejemplos:

- Ejemplo 1: MCI sin colisiones: $y'' + 4y' + 4y = 4x^2 + 6 \exp(x)$.
- Ejemplo 2: MCI con colisión simple: $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 3 \exp(2x)$.
- Ejemplo 3: MCI con colisión doble: $y'' + 4y' + 4y = 3x \exp(-2x)$.

6.4. La transformada de Laplace

La transformada de Laplace de una función de una variable $f(t)$ es *otra* función de una variable $F(s)$, algo que designamos de la manera $F(s) = L(f(t))$. La transformación L será lineal y biyectiva (invertible), con lo que siempre será posible obtener $f(t)$ de la forma $f(t) = L^{-1}(F(s))$. Existen infinidad de posibles transformadas, y el estudiante de Ingeniería de Telecomunicación, empleará unas cuantas a lo largo de sus estudios, especialmente la transformada de Fourier, que puede verse como un caso particular de la transformada de Laplace.

¿Cuál es el sentido de introducir este tipo de transformaciones funcionales? Estas transformaciones permiten trasladar la información contenida en $f(t)$ (en un *dominio temporal*) a un *formato* alternativo (*dominio transformado*). La idea con ello es obtener ventajas en la manipulación de dicha información o en su representación. En el contexto de este capítulo, la pretensión será convertir una EDO en una ecuación algebraica, mucho más sencilla de resolver, y, una vez resuelta ésta, deshacer la transformación para obtener directamente la solución de la EDO. Esta forma de proceder es típica del análisis y la síntesis de circuitos, la dinámica de sistemas continuos, y el estudio de los sistemas realimentados.

6.4.1. Definición y propiedades

Dada una función $f(t)$, definida $\forall t \geq 0$, definimos su *transformada de Laplace* de la forma:

$$L(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt.$$

Observe que la integral que define la transformada es impropia (véase la Sección 2.6), y debe ser convergente. Veamos un par de ejemplos sencillos:

- Ejemplo 1: $f(t) = u(t) = 1, t \geq 0$ (función *escalón*): $F(s) = 1/s$.
- Ejemplo 2: $f(t) = \exp(at), t \geq 0$: $F(s) = 1/(s - a)$.
- Ejemplo 3: $f(t) = \cosh(t), t \geq 0$:

$$F(s) = \frac{L(\exp(at)) + L(\exp(-at))}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - a} + \frac{1}{s + a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}.$$

Observe el uso de la linealidad de L en el Ejemplo 3.

Aparte de la linealidad, es posible emplear otras propiedades que simplifican la obtención de las transformadas de Laplace³:

1. Desplazamiento en s :

$$L(\exp(at)f(t)) = F(s - a).$$

O, alternativamente:

$$\exp(at)f(t) = L^{-1}(F(s - a)).$$

2. Diferenciación:

$$L(f'(t)) = sF(s) - f(0).$$

³Se aconseja deducir estas propiedades a partir de la definición de la transformada de Laplace.

3. Diferenciación de orden n :

$$L(f^{(n)}) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

4. Integración:

$$L\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}.$$

5. Desplazamiento temporal:

$$L(\delta(t-a)) = \exp(-as),$$

en donde hemos introducido una función generalizada (realmente una distribución), muy empleada en Ingeniería, denominada *delta de Dirac*. Esta función se define como:

$$\delta(t) = \infty, t = 0; \quad \delta(t) = 0, t \neq 0; \quad \int_0^\infty \delta(t) dt = 1.$$

6.4.2. Tabla de transformadas

En la sección siguiente vamos a aplicar la transformada de Laplace a la resolución de EDOs. Como se ha dicho, la idea es convertir la EDO, definida en el dominio temporal, en una ecuación algebraica en el dominio transformado. Resuelta la ecuación algebraica, habremos de volver al dominio temporal. Para esto último, las propiedades que acabamos de ver son de gran utilidad, pero es necesario complementar esa información con otra sobre transformadas inversas. En la siguiente tabla, para su referencia, reunimos toda esta información.

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}

$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\text{sen } kt$	$\frac{k}{s^2 + k^2}$
$\text{cos } kt$	$\frac{s}{s^2 + k^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
$\text{senh } kt$	$\frac{k}{s^2 - k^2}$
$\text{cosh } kt$	$\frac{s}{s^2 - k^2}$
$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a - b}$	$\frac{1}{(s - a)(s - b)}$
$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a - b}$	$\frac{s}{(s - a)(s - b)}$
te^{at}	$\frac{1}{(s - a)^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$
$e^{at} \text{sen } kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 + k^2}$
$e^{at} \text{cos } kt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + k^2}$
$e^{at} \text{senh } kt$	$\frac{k}{(s - a)^2 - k^2}$

$e^{at} \cosh kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - k^2}$
$t \operatorname{sen} kt$	$\frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$
$t \operatorname{cos} kt$	$\frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$
$t \operatorname{senh} kt$	$\frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2}$
$t \operatorname{cosh} kt$	$\frac{s^2 + k^2}{(s^2 - k^2)^2}$
$\frac{\operatorname{sen} at}{t}$	$\operatorname{arctg} \frac{a}{s}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
$\operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$

6.4.3. Resolución de EDOs mediante transformada de Laplace

Resumimos el procedimiento a seguir para resolver EDOs mediante la transformada de Laplace:

1. Aplicar L a ambos miembros de la EDO.
2. Resolver la ecuación algebraica resultante para $Y(s)$.
3. Emplear las propiedades de la transformada de Laplace y la tabla de transformadas vistas, respectivamente, en las subsecciones 6.4.1 y 6.4.2, para invertir $Y(s)$ y obtener $y(t)$.

Ilustraremos este procedimiento con un par de ejemplos sencillos.

Ejemplo 1: Resuelva la EDO-2 $y'' - y = t$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$.

Si aplicamos L a los dos miembros de la EDO, obtenemos:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Si usamos en esta ecuación las condiciones iniciales, y despejamos $Y(s)$, podemos expresar el resultado en fracciones simples de la forma:

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \left(\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2} \right).$$

Ahora ya podemos invertir esta ecuación, sin más que identificar, en la parte izquierda de la tabla de transformadas, las funciones correspondientes a los tres sumandos de la ecuación. El resultado es:

$$y(t) = \exp(t) + \sinh t - t.$$

Puesto que la ecuación de este ejemplo es una EDO-2 no homogénea de coeficientes constantes, se recomienda resolver la ecuación por el MCI o por el MVP para verificar que se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 2: Resuelva la EDO-2 $y'' + y' - 6y = 1$ con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

Si aplicamos L a los dos miembros de la EDO, y usamos las condiciones iniciales, obtenemos:

$$(s^2 + s - 6)Y(s) = (s - 2)(s + 3).$$

Si despejamos $Y(s)$ y expresamos el resultado en fracciones simples, podemos escribir:

$$Y(s) = -\frac{1}{6s} + \frac{3}{10(s-2)} - \frac{2}{15(s+3)}.$$

Con la ayuda de la tabla de transformadas, es sencillo invertir esta ecuación y obtener finalmente:

$$y(t) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10} \exp(2t) - \frac{2}{15} \exp(-3t).$$

6.5. Ejercicios propuestos

[E-6.1] $yy' + 25x = 0$

[E-6.2] $y' + 3x^2y^2 = 0$

[E-6.3] $xy' = x + y$

[E-6.4] $xy' = y^2 + y$

[E-6.5] $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$

[E-6.6] $\sinh x \cos y = \cosh x \sin yy'$

[E-6.7] $-yx^{-2} + x^{-1}y' = 0$

[E-6.8] $\sin y + \cos yy' = 0$

$$[\text{E-6.9}] \quad 3(y + 1) = 2xy'$$

$$[\text{E-6.10}] \quad 2 \cos y = \operatorname{tg} 2x \operatorname{sen} yy'$$

$$[\text{E-6.11}] \quad 2 \cos y = \operatorname{sen} yy'$$

$$[\text{E-6.12}] \quad y' + 4y = \cos x$$

$$[\text{E-6.13}] \quad y' + xy = 4x$$

$$[\text{E-6.14}] \quad x^2y' + 2xy = \operatorname{senh} 5x$$

$$[\text{E-6.15}] \quad y' + y = -x/y$$

$$[\text{E-6.16}] \quad y' + 2y = y^2$$

$$[\text{E-6.17}] \quad 9y'' - 30y' + 25y = 0$$

$$[\text{E-6.18}] \quad 16y'' - \pi^2y = 0$$

$$[\text{E-6.19}] \quad y'' - 2\sqrt{2}y' + 2,5y = 0$$

$$[\text{E-6.20}] \quad y'' + y' - 12y = 0$$

$$[\text{E-6.21}] \quad 16y'' - 8y' + 5y = 0$$

$$[\text{E-6.22}] \quad y'' - y = 8 \exp(-3x)$$

$$[\text{E-6.23}] \quad y'' + 3y' + 2y = 4x^2$$

$$[\text{E-6.24}] \quad y'' - 2y' + 5y = 5x^3 - 6x^2 + 6x$$

$$[\text{E-6.25}] \quad y'' + 3y' - 18y = 9 \operatorname{senh}(3x)$$

$$[\text{E-6.26}] \quad y'' + 4y' + 4y = 3x \exp(-2x)$$

$$[\text{E-6.27}] \quad y'' + 6y' + 9y = 50 \exp(-x) \cos x$$

$$[\text{E-6.28}] \quad y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sen}(\exp(-x))$$

$$[\text{E-6.29}] \quad y'' + y = \operatorname{tg}(x)$$

$$[\text{E-6.30}] \quad (1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

$$[\text{E-6.31}] \quad xy'' + y' = 0$$

$$[\text{E-6.32}] \quad 4x^2y'' + 8xy' - 3y = 7x^2 - 15x^3$$

$$[\text{E-6.33}] \quad xy'' - y' = (3 + x)x^2 \exp(x)$$

$$[\text{E-6.34}] \quad x^2y'' - xy' + y = x, \quad y_1 = x$$

$$[\text{E-6.35}] \quad y'' - 2y'/x + 2y/x^2 = x \log x, \quad y_1 = x$$

6.6. Problemas propuestos

[P-6.1] Obtenga razonadamente la solución general de las siguientes EDOs:

1. $y'' - 2y' + y = \frac{\exp(x)}{x}$
2. $y'' - 6y' + 25y = 2 \operatorname{sen}(x/2) - \cos(x/2)$

[P-6.2] Resuelva, por el método que estime oportuno, las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

1. $y' + 4x^2y = (4x^2 - x) \exp(-x^2/2)$.
2. $y'' + 4y' + 5y = 25x^2 + 13 \operatorname{sen} 2x$.

[P-6.3] Resuelva, por el método que estime oportuno, las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

1. $Q'(t) + \frac{2Q(t)}{10 + 2t} = 4$.
2. $x'' + 4x = \operatorname{sen}^2(2t)$.

[P-6.4] Resuelva el problema de valor inicial dado por $y'' + 2y' + 5y = \exp(0,5x) + 40 \cos 10x - 190 \operatorname{sen} 10x$, $y(0) = 0,16$, $y'(0) = 40,08$.

[P-6.5] Sea la EDO $(2xy^2 + y \exp(x))dx + (2x^2y + k \exp(x) - 1)dy = 0$. Se pide:

1. Determine el valor de k para el que la EDO anterior es exacta.
2. Resuelva, para el valor obtenido, la EDO anterior.

[P-6.6] Resuelva la EDO $y'' - y' - 2y = \exp(2x)$, con las condiciones de valor inicial $y(0) = y'(0) = 0$.

[P-6.7] Resuelva, por el método que estime oportuno, las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

1. $y' \cos^2 x + 3y = 1$.
2. $y'' + 3y' + 2,25y = -10 \exp(-1,5x)$.

[P-6.8] Resuelva, por el método que estime oportuno, $y' + 4x^2y = (4x^2 - x) \exp(-x^2/2)$.

[P-6.9] Resuelva, empleando el método que estime oportuno, las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

1. $3y' + xy = \exp(-x^2)$.
2. $y'' - 2y' + y = 4 \cos x$.

[P-6.10] Resuelva, por el procedimiento que estime oportuno, $\frac{dr}{d\theta} = [r + \exp(-\theta)] \operatorname{tg} \theta$.

[P-6.11] Obtenga razonadamente la solución general de las siguientes EDOs:

1. $y'' - 2y' + y = \exp(x) + \exp(2x)$.
2. $y' + y \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} 2x$.

[P-6.12] Resuelva razonadamente la siguiente ecuación diferencial ordinaria: $y' - 3x^2y = \exp(x^3)$

[P-6.13] Resuelva razonadamente las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

1. $(x \cos y - 2y)y' + x + \operatorname{sen} y = 0$.
2. $y'' - 6y' + 25y = 50x^3 - 36x^2 - 63x + 18$.

[P-6.14] Resuelva para y : $y^2/2 + 2y \exp(x) + (y + \exp(x))y' = 0$.

[P-6.15] Resuelva para y : $y'' - 4y' + 4y = \exp(2x) \operatorname{sen} x$.

[P-6.16] Resuelva para y : $y' = -\frac{3x^2y + 8xy^2}{x^3 + 8x^2y + 12y^2}$.

[P-6.17] Resuelva para y : $y'' - 2y' + y = \cos x + 3 \exp(x) + x^2 - 1$.

[P-6.18] Resuelva para y : $y' - \cos^2 x + 3y = 1$.

[P-6.19] Resuelva para y : $y'' - 3y' + 2y = 2x \exp(3x) + 3 \operatorname{sen} x$.

[P-6.20] Resuelva la siguiente EDO: $\frac{dy}{dt} + \frac{45y}{2000 - 5t} = 80$.

[P-6.21] Resuelva la siguiente EDO: $y'' - 6y' - 7y = 8 \exp(-t) - 7t - 6$.

[P-6.22] Resuelva la siguiente EDO: $(x \exp(-y) - \exp(x) \cos y)y' = \exp(x) \operatorname{sen} y + \exp(-y)$.

[P-6.23] Sea la EDO $x^2y'' - xy' + y = x$. Se sabe que $y_1(x) = x$ es solución de la ecuación homogénea. Calcule la solución general de esta ecuación.

[P-6.24] Resuelva la siguiente EDO: $x + 3y^2/x = 2yy'$.

[P-6.25] Resuelva la siguiente EDO: $y'' + 4y = 2 \operatorname{sen}(2x)$.

[P-6.26] Obtenga la solución general de la siguiente EDO: $y'' - 2y' - 8y = 9x \exp(x) + 10 \exp(-x)$.

[P-6.27] Sea la EDO $y'' - 2y'/x + 2y/x^2 = x \log(x)$. Se sabe que $y_1(x) = x$ es solución de la ecuación homogénea. Calcule la solución general de esta ecuación.

[P-6.28] Resuelva la siguiente EDO: $y' = -2/y - 3y/(2x)$.

[P-6.29] Resuelva la siguiente EDO: $y'' + 4y = x^2 \operatorname{sen}(2x)$.

[P-6.30] Resuelva la siguiente EDO: $xy' + (x + 1)y = 6$.

[P-6.31] Resuelva la siguiente EDO: $y'' + 25y = 4x^3 \sin(5x) - 2 \exp(3x) \cos(5x)$.

[P-6.32] Resuelva la siguiente EDO: $x^2 + 2xy + (yx + 2x^2)y' = 0$.

[P-6.33] Resuelva la siguiente EDO: $y'' - 4y' + 4y = \exp(2x)(1 + \cos x)$.

[P-6.34] Obtenga razonadamente la solución general de las siguientes EDOs:

1. $xy' + 3x + y = 0$.

2. $y'' + 2y' + y = 4 \exp(-x)$.

[P-6.35] Obtenga la solución general de las ecuaciones:

1. $xy' + (1 - x)y = \exp(2x)$.

2. $y'' + y = x(\exp(x) - \sin x)$.

[P-6.36] Resuelva la siguiente EDO: $x^2yy' + xy^2 + x^2y^2 + 3 = 0$.

[P-6.37] Resuelva la siguiente EDO: $y'' - 3y' - 4y = 3 \exp(2x) + 2 \sin x - 8 \exp(x) \cos 2x$.

[P-6.38] Resuelva la siguiente EDO: $3x^2 + y^2 = 2xyy'$

[P-6.39] Resuelva la siguiente EDO: $y'' + 2y' + y = x^2 \exp(-x) \cos x$

[P-6.40] Resuelva la siguiente EDO: $xyy' - y^2 = (x + y)^2 \exp(-y/x)$.

[P-6.41] Resuelva la siguiente EDO: $y'' + 2y' + y = \cos^3 x$.

[P-6.42] Resuelva la siguiente EDO: $(y^3 - x)y' = y$.

[P-6.43] Resuelva la siguiente EDO: $y'' - 2y' + 3y = \exp(-x) \cos x$.

Apéndice A

Planteamiento pedagógico

Los ingenieros, para resolver problemas de Ingeniería (véanse las secciones A.3 y A.4), necesitamos *usar* las Matemáticas. Este uso se dirige fundamentalmente en dos direcciones: (1) describir la complejidad y poder modelarla (las Matemáticas como lenguaje), y (2) obtener resultados cuantitativos de nuestros modelos (las Matemáticas como herramienta de cálculo).

En el estudio de las Matemáticas, al menos en el nivel universitario, conviene no perder de vista este *hecho*: No es posible *usar* adecuadamente las Matemáticas sin *comprenderlas*. Es decir, antes de usar bien hay que comprender en profundidad.

A mi juicio, sólo hay una vía para *comprender* las ideas matemáticas: Ser capaz de *reconstruirlas* en lugar de meramente *recordarlas*. Esta necesidad puede ser muy frustrante para el estudiante que inicia sus estudios universitarios, ya que normalmente supone un enorme *cambio de expectativas* con respecto a las que suele traer del Bachillerato.

A.1. Cambio de expectativas

El largo periodo de la enseñanza pre-universitaria genera, en el estudiante que emerge de ella, unos hábitos y unas expectativas que, en muchas ocasiones, no favorecen su integración en la Enseñanza Superior. Sin ánimo de ser exhaustivo:

- En general, el Bachillerato español actual no sitúa su énfasis formativo en pensar; más bien prioriza la memorización acrítica, la recuperación pasiva de datos, y el reconocimiento de patrones más o menos sencillos. En la Universidad tiene valor formativo sólo aquello que nos obliga a *pensar* con claridad para *comprender en profundidad*.
- La comprensión profunda se inicia en clase, pero muy rara vez se culmina en ésta. Es necesario que el alumno prepare con antelación su asistencia a clase, que desarrolle en ella una gran *atención*, sin distracciones, con una actitud activa; pero no debe esperar que ello, por sí mismo, baste para lograr la comprensión profunda que se le va a exigir. Será necesario un *trabajo individual, perseverante y diario, fuera de la clase*. Este trabajo no debería ser el inducido por la cercanía de un examen, como suele ocurrir en el Bachillerato.

- En cuanto a la evaluación, es importante que el alumno no espere que se le va a exigir, en los procesos de evaluación, la reproducción más o menos literal de lo que ha visto en clase, o su aplicación más o menos inmediata. En la evaluación se va a medir precisamente si ha adquirido o no una comprensión profunda, si es capaz de manipular correctamente ideas matemáticas para usarlas en diferentes contextos, si ha desarrollado una *capacidad resolutive* (véase la Subsección A.3).
- El profesor de Bachillerato suele ser alguien que ofrece en clase una exposición sistemática y exhaustiva de los contenidos de la asignatura. El alumno trata de transcribir esta exposición en unos apuntes, que serán la base de su estudio. En la Universidad, el profesor debe verse más como un *agente facilitador del aprendizaje*. Su principal misión consiste en (1) guiar, proponer una estructura óptima (material de estudio, y referencias bibliográficas de consulta) para la comprensión profunda de las ideas fundamentales de la asignatura; y (2) resolver los problemas de comprensión que cada alumno tenga. Para esto último es esencial que el alumno recurra al profesor en sesiones personales de tutoría, en las que pueda plantear sus dificultades y obtener la adecuada realimentación.

A.2. Dinámica docente

La dinámica docente que se va a seguir en las asignaturas de Matemáticas está basada en:

1. Facilitar al alumno, con carácter previo, el *material de estudio* de la asignatura. Se tratará de notas generadas por el propio profesor, o de material bibliográfico básico seleccionado de una fuente preferente a la que los alumnos tengan acceso (libro de texto).
2. Facilitar al alumno, de manera programada en el tiempo, unas *pautas concretas de trabajo autónomo* sobre dicho material. Estas pautas constarán de unas lecturas sugeridas, unos ejercicios de aplicación complementarios, y unos problemas algo más ambiciosos.
3. La realización de *sesiones de discusión*, preferiblemente presenciales, concebidas para poner en común y comentar las dificultades detectadas por los alumnos en su aprendizaje, con el fin de resolverlas colectivamente junto con el profesor. Son, por tanto, sesiones que, bien utilizadas, consolidan el aprendizaje del alumno e incrementan su seguridad.
4. La realización de *tutorías personales*, concebidas no como clases particulares, sino como sesiones en las que el alumno pueda preguntar y comentar sobre su trabajo personal en la asignatura, y validar que éste es de calidad (está bien orientado).

Por parte del alumno, se espera que su actividad autónoma consista en:

- La *lectura comprensiva y reflexiva* (no memorística) del material facilitado en los plazos temporales fijados.

- El *trabajo autónomo* sobre los ejercicios de aplicación y los problemas sugeridos.
- La *generación de dudas y dificultades* sobre los dos procesos anteriores, que se trasladarán a las sesiones de discusión en grupo.

Como se ve, este planteamiento pedagógico requiere la *implicación activa y disciplinada del alumno en el proceso de aprendizaje*, algo que, por ser contrario a la experiencia y expectativas del alumno, no será fácil lograr, al menos inicialmente. Por eso es necesario que se convenza de que este cambio, de un aprendizaje pasivo a uno activo, no es “rentable” sólo en estas asignaturas, sino que su esfuerzo de implicación activa es una muy buena inversión de cara a su éxito futuro como estudiante de una Ingeniería.

A.3. Adquisición de capacidad resolutive

El programa de estudios es exigente, y requerirá mucho trabajo del alumno, un trabajo que, como decíamos, deberá estar supervisado y enfocado personalmente por el profesor a través de las *tutorías*. Es muy importante que el alumno no se desconecte de la asignatura, que siga las pautas que se le ofrecen, que *asista regularmente a clase y participe*, que intente resolver por su cuenta, antes de que sean resueltos conjuntamente en clase, los problemas que se le proponen para el diagnóstico de la adquisición de conceptos y manejo de modelos de referencia. Lamentablemente, esto no es suficiente para desarrollar la *capacidad resolutive* necesaria en Ingeniería, por lo que, si un alumno se queda en esta fase, fracasará. Es preciso que, superada esta *necesaria* fase de adquisición de conocimientos, el alumno ponga a prueba su madurez matemática con problemas de exámenes de otros años (los Problemas propuestos al final de cada capítulo). Poco a poco irá comprobando que su *capacidad resolutive* se incrementa, que su capacidad de análisis mejora, que ha perdido el miedo a los problemas, y los ve, cada vez más, como retos con los que consolidar esta capacidad.

Conviene no olvidar que enfrentarse a problemas es la única vía para verificar la comprensión profunda de las ideas. No es infrecuente, en estos primeros pasos en la Universidad, *crear haber entendido* algo y descubrir, ya después del examen, que *no* se había entendido, con la consiguiente frustración. La realización *sistemática y deliberada* de problemas permite *verificar que uno ha entendido realmente, y consolidar buenos hábitos de análisis* que facilitan pensar con claridad y poder así enfrentarse a problemas cada vez más sofisticados. Quizás el mejor hábito de análisis consista en, ante un problema, no centrarse tanto en buscar la solución a toda costa por analogía con otros problemas, como en formularse las preguntas adecuadas, aquellas cuya respuesta nos conduzca de manera *natural* a la solución. En relación con esto último, debe evitarse repetir una y otra vez los mismos problemas; no es un método eficaz de aprendizaje, y genera una falsa seguridad. Siempre es mejor dedicar el tiempo a enfrentarse a problemas de naturaleza lo más diversa posible

Una última observación: nunca se facilitan problemas resueltos, ni soluciones de los problemas que se proponen en clase. Esto es deliberado. A diferencia de lo que suele ocurrir en el Bachillerato, nuestro énfasis no se halla tanto en *llegar a la respuesta correcta* en un conjunto de *escenarios tipo*, como en *discutir críticamente* las posibles vías que conduzcan a dicha solución, pues ello enriquecerá nuestro conocimiento de la disciplina; todo ello sin

perjuicio de que deba alcanzarse finalmente la solución al problema planteado. En este sentido, debe combatirse un hábito muy pernicioso: convertirse en un *lector de problemas resueltos*. No favorece la comprensión profunda, y suele generar también la mencionada falsa seguridad en los alumnos.

A.4. Metodología de resolución de problemas

Como acabamos de decir, uno de los principales objetivos de las asignaturas de Matemáticas de primer curso es desarrollar la *capacidad resolutive* de los estudiantes (véase “Matemáticas y GIST: Guía para el Estudio”). La Ingeniería tiene como foco la resolución de problemas. Es más, la aspiración de todo ingeniero debería ser convertir la resolución de problemas en algo estimulante, divertido incluso, no en algo *problemático*. Por tanto, si el estudiante de Ingeniería no desarrolla esta capacidad, es difícil que progrese en sus estudios.

Los estudiantes que emergen del Bachillerato español suelen tener bastante interiorizada una metodología de resolución de problemas que podríamos denominar de *identificación-selección* (IS). Básicamente, el estudiante, ante un determinado problema, debe *identificar* a qué tipología de las estudiadas pertenece éste, y *seleccionar* el método de resolución asociado a dicha tipología. Esta metodología puede ser útil con problemas de una complejidad limitada, pero resulta inviable con problemas más complejos, del tipo de los que abordan los ingenieros.

Una metodología alternativa, apta para la resolución de problemas complejos, tendría las siguientes fases:

1. Comprensión del problema
2. Reflexión mediante Modelos de Referencia adecuados
3. Generación de una estrategia de resolución

Explicaremos cada una de estas fases con algo de detenimiento.

A.4.1. Comprensión del problema

En la metodología IS el alumno, nada más enfrentarse al problema, busca *clasificarlo*. Esta clasificación depende fuertemente de establecer relaciones de analogía entre el problema facilitado y las tipologías de problemas conocidas. En la mayoría de los casos sencillos, es posible hacer esto sin haber comprendido bien el problema. Realmente, no hace falta. Sin embargo, si el problema tiene una cierta complejidad, es muy probable que éste no *encaje* en ninguna de las tipologías conocidas, con el consiguiente bloqueo del estudiante. Cuando esto ocurre, es conveniente abandonar el proceso de búsqueda de analogías e invertir el tiempo y la energía en comprender bien el problema.

La clave para comprender un problema es determinar, sin ambigüedad, qué se nos pide en él. Unas veces será obtener un resultado numérico (por ejemplo, el volumen de un objeto), pero otras será determinar las condiciones que hacen posible algo que se prescribe en el enunciado (por ejemplo, bajo qué condiciones el volumen de un objeto es máximo).

Evidentemente, no es posible saber qué hay que obtener en un problema si no se es capaz de leer comprensivamente su enunciado. Esto puede resultar ofensivo para el estudiante universitario, pero es un hecho que los estudiantes suspenden exámenes por no hacer una lectura comprensiva de sus enunciados.

A.4.2. Reflexión mediante Modelos de Referencia adecuados

Una vez determinado claramente el objetivo del problema, lo siguiente es *pararse a pensar*. Lo primero en lo que hay que pensar es en los *modelos de referencia* que pudieran estar implicados en la resolución del problema. Un Modelo de Referencia (MR) es un esquema teórico, generalmente de naturaleza matemática, de una realidad compleja, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento. Cualquier disciplina está constituida por un conjunto de MR interrelacionados formando una red. El estudiante debe estar familiarizado con el uso y las limitaciones de estos MR. Precisamente en eso consistirá el *estudio* de una disciplina.

A.4.3. Generación de una estrategia de resolución

Determinados los MR potencialmente implicados en la resolución del problema, lo siguiente será combinarlos para sintetizar una estrategia tentativa de resolución del problema. Esta estrategia inicial puede que no sea la definitiva, ni siquiera la mejor de las posibles, pero constituye el inicio de un diálogo concreto con el problema, del que emanará una estrategia que haga viable alcanzar la solución. La estrategia constará de un Planteamiento y un Desarrollo. En el Planteamiento se especificará la secuencia de acciones que nos llevarán a la solución; en el Desarrollo ejecutaremos, sobre los datos concretos del problema, este Planteamiento. En ocasiones puede que obstáculos en el Desarrollo nos lleven a reformular alguna porción del Planteamiento. Resolver un problema es siempre una actividad que involucra una gran creatividad. Debe verse como un reto.

Conocer una metodología, por buena que sea, no basta para desarrollar la capacidad resolutoria. Es necesario acostumbrarse a *usarla bien*. El profesor, en las Sesiones de Taller, ilustrará este uso ante los estudiantes, pero la asimilación de la metodología sólo se consigue con sesiones individuales de *práctica deliberada*. Estas sesiones deberán ser frecuentes, intensas y cortas. Supondrán un esfuerzo cognitivo grande, especialmente al principio. Es posible que el estudiante tenga la impresión de que le resulta más *rentable* seguir empleando la metodología IS, pero, a la larga, la metodología descrita le proporciona una mayor seguridad acerca de la eficacia real de su aprendizaje.

A.5. Actitud

Como decíamos al principio de este apéndice, un principio básico en cualquier proceso de aprendizaje exitoso es partir de una motivación clara. Esta motivación se traduce en una actitud positiva que el alumno debe sostener a lo largo del proceso. El fracaso, o la amenaza del fracaso, suele ser el elemento que más erosiona esta deseada actitud. Podríamos decir que, al menos en los inicios de la vida universitaria, la secuencia real de progreso en la adquisición de la necesaria capacidad resolutoria es la siguiente:

1. Intentar.
2. Fracasar.
3. Reintentar.
4. Fracasar.
5. **Preguntar (Tutoría).**
6. Reintentar.
7. Resolver.

Este proceso de aprendizaje exige en el estudiante tres disposiciones muy concretas (las tres “C”):

- **Confianza en uno mismo:** Es muy difícil trabajar sobre un problema si uno, de partida, cree que no va a poder resolverlo. Por eso es muy recomendable ir progresivamente abordando problemas cada vez más complejos, hasta perder el miedo al fracaso. Enfrentarse tempranamente a problemas complejos (sin pasar antes por los Ejercicios propuestos) puede ser muy frustrante y desalentador.
- **Concentración:** Las matemáticas exigen educar nuestra capacidad de concentración; lamentablemente, vivimos en un mundo en el que, de manera natural, nos rodean numerosísimas fuentes de distracción, de entre las cuales, por su capacidad para interrumpir nuestra concentración, destaca la mensajería instantánea asociada a las redes sociales. Es muy importante acostumbrarse a usar el *modo avión* de nuestros dispositivos para garantizar tramos de estudio con concentración plena. Al principio, no será fácil, pero poco a poco uno comprueba que incrementa su capacidad de concentración, con lo que el desgaste psicológico, inducido por las permanentes interrupciones, desaparece. Sin este autocontrol, es difícil alcanzar los niveles de concentración necesarios para lograr el éxito.
- **Coraje:** La perseverancia, alimentada por el coraje personal para perseguir un objetivo, es fundamental en todo el proceso de aprendizaje anteriormente descrito. Querer algo es importante, pero no dejar de quererlo lo es mucho más.

Finalmente, es importante tener una *intención general positiva* ante el trabajo: cada vez que se trabaje, es necesario acostumbrarse a querer hacerlo siempre bien, se trate de un examen final, una prueba parcial, o un problema al que uno se enfrenta en la mesa de la cocina de su casa. Sólo así se consolida una mejora, por muy pequeña que inicialmente parezca, en la capacidad resolutiva.

Apéndice B

Cómo estudiar una Ingeniería

El estudiante de una Ingeniería debe anticipar que, cuando sea Ingeniero, se va a dedicar fundamentalmente a *resolver problemas*, y que uno de sus mayores recursos como profesional será *saber pensar con claridad sobre cuestiones complejas*. Por tanto, la mejor inversión que puede hacer el estudiante es: (1) acostumbrarse al *aprendizaje profundo* de las disciplinas que estudia, y (2) desarrollar en ellas una alta *capacidad resolutive*.

El aprendizaje profundo y la capacidad resolutive se adquieren y desarrollan a partir del *estudio activo* y la *práctica deliberada*.

B.1. Estudio activo

Para estudiar bien hay que tener un buen material de estudio. Esto puede parecer una obviedad, pero muchos estudiantes fracasan por no trabajar sobre el material adecuado. Este material debe ser facilitado por el profesor. Estará formado por libros, presentaciones, y apuntes, fundamentalmente.

Para estudiar bien hay que leer. Y hay que hacerlo de una determinada manera: No se puede leer un texto técnico como se lee el “Marca” o un volumen de “Juego de tronos”.

La mejor forma de *leer para estudiar* es leer tratando de identificar y extraer del texto las ideas principales y sus relaciones. Con ellas se podrán ir elaborando pequeños modelos de referencia que serán la base del estudio. De manera general, un *Modelo de Referencia* (MR) es un esquema teórico, generalmente de naturaleza matemática, de una realidad compleja, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento. Cualquier disciplina está constituida por un conjunto de MR interrelacionados formando una red. La responsabilidad del estudiante es entender estos MR, conocer sus limitaciones, y aprender a usarlos de manera individual mediante ejemplos sencillos; más adelante deberá identificar las interrelaciones entre los distintos MR, y su posible integración. Todas estas acciones son *activas* y requieren que el estudiante *piense escribiendo y dibujando esquemas o mapas conceptuales*. La *visualización* de las ideas es crucial en esta etapa.

Para estudiar bien hay que dudar en diálogo con el material de estudio: ¿Tengo claras cuáles son las ideas principales? ¿Seguro que no me dejo nada importante sin identificar? ¿Cuáles son las ideas totalmente nuevas para mí? ¿Cuáles puedo relacionar con cosas que ya sé? ¿Entiendo bien el significado de todos los términos empleados? ¿Qué partes del

material entiendo peor?

Si uno avanza sin hacerse estas preguntas, avanzará en falso, sobre un terreno quebradizo. *Es muy peligroso. Casi suicida.*

B.2. Práctica deliberada

Tras una familiarización, lo más intensiva posible, con los principales MR de la disciplina, llega el momento de *practicar su uso* para autoevaluar el aprendizaje profundo de los MR, y alcanzar la necesaria capacidad resolutive. Esto debe hacerse progresivamente, en dos fases:

- Fase I: Realización de ejercicios con una orientación clara al uso de *un* MR concreto. Esta fase puede darse por finalizada si el estudiante es capaz de enfrentarse con éxito a este tipo de ejercicios para *todos* los MR correspondientes al bloque de estudio del que se trate.
- Fase II: Realización de problemas de examen. Estos problemas son más complejos, en el sentido de que se plantean para que el estudiante tenga que usar creativamente varios MR de manera conjunta en contextos más exigentes que los de los ejercicios de la Fase I.

En ambas fases se aconseja emplear la metodología propuesta en la Sección A.4.

Es muy recomendable no intensificar demasiado la práctica deliberada asociada a cada bloque de materia. Aunque inicialmente no lo parezca, es mucho más eficaz distribuir las prácticas de los distintos bloques. Así, si una materia determinada está compuesta por tres bloques A, B, y C, es posible una aproximación *intensiva* del tipo:

- Sesión 1: Teoría A
- Sesión 2: Práctica A
- Sesión 3: Práctica A
- Sesión 4: Práctica A
- Sesión 5: Teoría B
- Sesión 6: Práctica B
- Sesión 7: Práctica B
- Sesión 8: Práctica B
- Sesión 9: Teoría C
- Sesión 10: Práctica C
- Sesión 11: Práctica C
- Sesión 12: Práctica C

Esta forma de proceder tiende a generar, al final de cada bloque, una sensación de dominio en el alumno, pero conviene no perder de vista que, una vez que se da por terminado un bloque, el trabajo realizado, aunque intenso, tiende a ser olvidado, pues no hay previsto, quizás hasta el examen, un mecanismo de reactivación de estos contenidos.

Como decimos, es mucho más eficaz a la larga una aproximación *distribuida* del tipo:

- Sesión 1: Teoría A
- Sesión 2: Práctica A
- Sesión 3: Teoría B
- Sesión 4: Práctica B
- Sesión 5: Teoría C
- Sesión 6: Práctica C
- Sesión 7: Práctica A,B
- Sesión 8: Práctica A,B
- Sesión 9: Práctica A,B,C
- Sesión 10: Práctica A,B,C
- Sesión 11: Práctica A,B,C
- Sesión 12: Práctica A,B,C

El estudiante que emplea esta aproximación tiende a pensar que esta forma de proceder es más ineficiente, pero suele ser porque al principio, en las sesiones iniciales, quizás tenga la sensación de no avanzar a la suficiente velocidad. Sin embargo, esto *no* es lo importante. Lo importante es el grado de consolidación de la capacidad resolutive *al final* del proceso, tras las 12 sesiones de trabajo.

Se opte por la aproximación intensiva o la distribuida, conviene en cualquier caso espaciar las sesiones de trabajo en el tiempo, pues esto favorece la maduración progresiva. Como regla general, no deberían programarse para el mismo día más de dos sesiones seguidas de trabajo. Esto obliga a organizar el estudio diario entre varias asignaturas de la forma:

- Tramo de dos sesiones Asignatura x
- Tramo de dos sesiones Asignatura y
- Tramo de dos sesiones Asignatura z

Obsérvese que en las transiciones entre asignaturas, de x a y, o de y a z, necesitaremos unos tiempos para la *recuperación contextual* de la segunda asignatura. Esto va a suponer un esfuerzo adicional, pero que contribuye decisivamente al aprendizaje profundo.

B.3. El papel de la motivación

Es triste reconocer que, alrededor de la motivación, proliferan los *cantamañanas de ocasión* que logran seducir a muchos por la vía de la manipulación de las emociones (*emocionalismo*), haciéndoles creer que todo es posible, por muy complicado que parezca, sin más que *quererlo*. Quizás con esta receta se pueda ganar el campeonato de paddle de la “urba”, pero no convertirse en ingeniero.

En nuestro caso, la mayor o menor motivación del estudiante debe dirigirse en tres direcciones: (1) educar la concentración, (2) educar la perseverancia, y (3) gestionar el fracaso.

B.3.1. Educar la concentración

El estudio de disciplinas técnicas, de naturaleza compleja, exige educar nuestra capacidad de concentración; lamentablemente, vivimos en un mundo en el que, de manera natural, nos rodean numerosísimas fuentes de distracción, de entre las cuales, por su capacidad para interrumpir nuestra concentración, destaca la mensajería instantánea asociada a todo tipo de redes sociales. Es muy importante acostumbrarse a usar el “modo avión” de nuestros dispositivos para garantizar tramos de estudio con concentración plena. Al principio, no será fácil, pero poco a poco se comprueba un aumento de la capacidad de concentración, y se reduce el desgaste psicológico inducido por las permanentes interrupciones.

B.3.2. Educar la perseverancia

Saber lo que hay que hacer para alcanzar el éxito, pero hacerlo sólo una tarde o dos, no vale para nada. Los estudios universitarios son asimilables a una carrera de fondo. Casi todo el mundo entiende que para correr un maratón hay que entrenar a diario y durante mucho tiempo, pero poca gente entiende que lo mismo pasa con el Álgebra Lineal o el Cálculo. Es necesario planificar el tiempo de estudio, y *someterse* a esa planificación, sabiendo que posiblemente sea necesario, en función de la evolución de las circunstancias, reevaluar dicha planificación inicial y modificarla. El progreso académico es incompatible con la pasividad y la inconstancia.

B.3.3. Gestionar el fracaso

El fracaso es inevitable. Vivimos en una cultura que idolatra el éxito y oculta el fracaso. Sin embargo, el fracaso para el estudiante es tan necesario como el dolor para el médico: el dolor permite identificar la enfermedad; el fracaso académico permite detectar que nuestro estudio no es el adecuado.

Ante el fracaso académico caben dos posibilidades: huir (“esto no es lo mío”, “no valgo para esto”), o aprender de él, y *gestionarlo*. Si se opta por lo segundo, es preciso tener muy presente que toda gestión de un fracaso debe arrancar de un análisis objetivo de sus causas. Descartando la indolencia o la irresponsabilidad, urge hacerse las siguientes preguntas y tratar de darles, con la mayor franqueza, respuesta:

- ¿Qué parte de mi preparación en cada asignatura me ha servido y qué parte no?
- ¿Qué podría haber hecho, y no he hecho, que me habría servido?
- ¿Qué cosas he hecho bien, pero tarde?
- ¿Qué mecanismos de ayuda ofrecidos por los profesores he usado y cuáles no?
- ¿Qué voy a hacer a partir de ahora para mejorar mis posibilidades de éxito?

Desde mi punto de vista, las cuatro primeras preguntas deben conducir a erradicar de la dinámica de estudio seguida las malas actitudes y los malos hábitos. Entre ellos pueden estar, y no trato de ser exhaustivo: la falta de asistencia a clase, la falta de atención en clase, la mala gestión del tiempo, la ausencia de planificación de las tareas, no usar las tutorías (trabajar sin supervisión externa), no trabajar lo suficiente con posterioridad a las clases, no anticipar los contenidos de las clases, no seguir las recomendaciones de los profesores, comer mal, no descansar lo suficiente, etc. Esta erradicación exigirá un esfuerzo deliberado y sostenido, un compromiso diario que debería, en esencia, constituir la respuesta a la quinta pregunta.

En conclusión: Hay un método para estudiar eficazmente una Ingeniería. Un método que sabemos que funciona, y cuya aplicación requiere un esfuerzo bien dirigido. Ese método es el que se condensa en este documento.

Apéndice C

Manipulación de números complejos

Uno de los cuerpos más empleados es el de los números complejos, que suele denominarse mediante la letra \mathbb{C} . Sobre este conjunto se definen dos operaciones internas, que suelen designarse mediante los símbolos convencionales $+$ y \cdot , para referirse, respectivamente, a la suma y producto de números complejos, con lo que la estructura suele escribirse así: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Analicemos, antes de ver propiamente el sentido de las operaciones, la estructura del conjunto \mathbb{C} .

Los elementos $z \in \mathbb{C}$ suelen representarse de la forma $z = a + ib$, donde a y b son dos números reales cualesquiera, e $i = \sqrt{-1}$. A a se le llama la *parte real* de z , y a b la *parte imaginaria*. Si reunimos a ambas en un par ordenado, (a, b) , vemos que z puede verse como un punto de \mathbb{R}^2 , y, consecuentemente, ser representado en el plano como si del punto (a, b) se tratara. Tendríamos así que la parte real se correspondería con la abscisa del punto, y la parte imaginaria con la ordenada. Este marco para la representación se denomina el diagrama de Argand¹

Recuerde que un punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ puede representarse también de manera polar, (r, θ) , donde r (el llamado *módulo*) es la distancia del punto al origen de coordenadas, y θ (la llamada *fase* o *argumento*) es el ángulo compuesto por el punto, el origen de coordenadas y el eje de abscisas. Obviamente, la relación entre ambas representaciones es:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}(b/a),$$

o, de manera inversa,

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \operatorname{sen} \theta.$$

Los números complejos admiten también una representación polar o *fasorial*. A partir de lo que acabamos de ver:

$$z = a + ib = r \cos \theta + ir \operatorname{sen} \theta = r \exp(i\theta),$$

donde en la última igualdad hemos empleado la fórmula de Euler:

¹Esto es consecuencia de que \mathbb{R}^2 y \mathbb{C} son isomorfos.

$$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Como se ha dicho al principio, las dos operaciones que dotan a \mathbb{C} de la estructura de cuerpo son la suma y el producto de números complejos. Vamos a verlas, de manera separada, en las dos siguientes secciones.

C.1. Suma de números complejos

Considere $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$. Se define la suma de z_1 y z_2 como $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$. Es decir, la suma de dos números complejos es un número complejo tal que su parte real es la suma de las partes reales de cada uno de los números complejos, y su parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias de cada uno de los números complejos. Observe que no es fácil sumar dos números complejos si éstos están dados en su forma polar. De hecho, resulta necesario convertirlos previamente a su forma natural ($a + ib$).

C.2. Producto de números complejos

Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, su producto, $w = z_1 \cdot z_2$, será también un número complejo. La forma más directa de llegar a w consiste en partir de las representaciones polares de z_1 y z_2 :

$$w = z_1 \cdot z_2 = r_1 \exp(i\theta_1) \cdot r_2 \exp(i\theta_2) = r_1 r_2 \exp(i(\theta_1 + \theta_2));$$

es decir, w es un número complejo con un módulo resultado de multiplicar los módulos de los dos números complejos, y con una fase que es la suma de las fases de los dos números complejos.

Si el producto se plantea a partir de las representaciones naturales de los dos números complejos, $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$, entonces, sin más que operar, obtenemos:

$$w = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

A la vista de las dos aproximaciones anteriores al producto, resulta evidente, especialmente si el producto se extiende a más números complejos, que este tipo de cálculos deben realizarse empleando las representaciones polares de los números involucrados.

C.3. Conjugación de números complejos

Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, se llama *conjugado* de z , que representaremos como z^* , al número complejo $a - ib$. Si z viene dado en su forma polar ($z = r \exp(i\theta)$), entonces $z^* = r \exp(-i\theta)$. Se recomienda verificar la plena equivalencia de ambas aproximaciones.

La conjugación de números complejos permite calcular las partes reales e imaginarias de un número complejo mediante las siguientes expresiones:

$$\operatorname{Re}\{z\} = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im}\{z\} = \frac{z - z^*}{2i}.$$

Por otra parte, y aunque este es un resultado que contextualizaremos mejor más adelante en este texto, es posible calcular el módulo de un número complejo z valiéndose de la conjugación:

$$|z| = \sqrt{z \cdot z^*} = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$