

COMUNICACIÓN DE DATOS:

INTRODUCCIÓN: Modelo de transmisión fiable y eficiente.



Fuente Discreta:

Alfabeto fuente: $A_F = \{0, 1\}$ (fuente binaria)

$$A_F = \{a, b, c, d\}$$

vector de probabilidades: $\vec{P} = \{0,7, 0,1, 0,1, 0,1\}$

simétricas: $\vec{P} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$

CANALES IDEALES: sin errores.

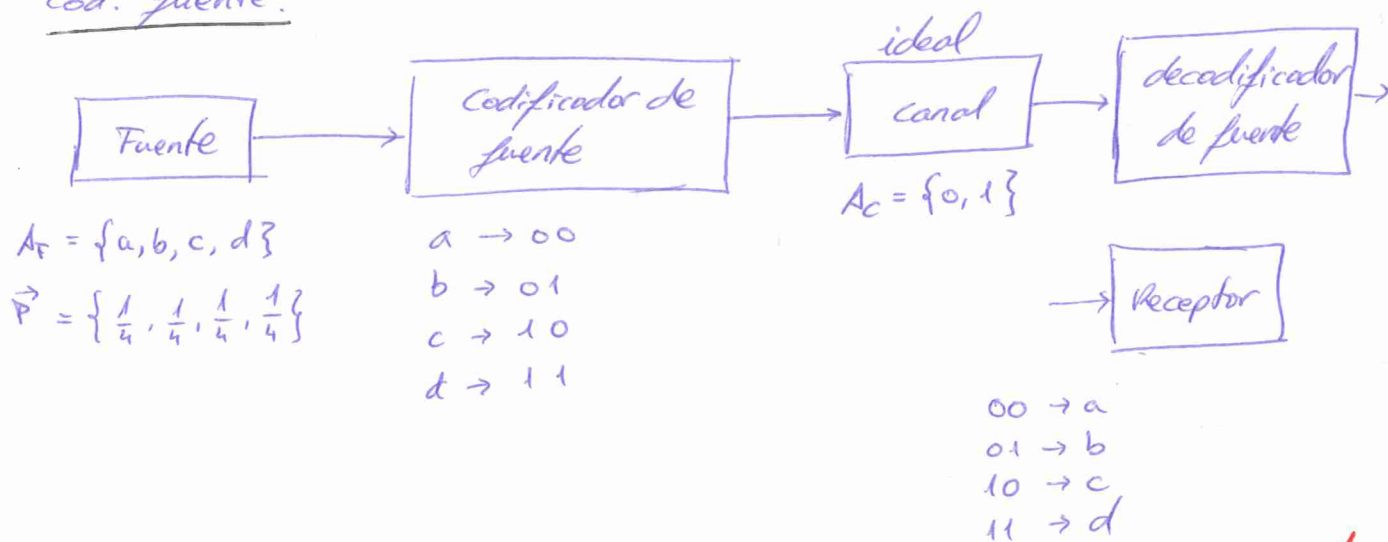
caracterizados por un alfabeto de canal (A_C : conjunto de símbolos que puede transmitir el canal)

$$A_C = \{a, b, c, d\}$$

Problema: $A_C = \{0, 1\}$

* Si A_F y A_C son distintos $\Rightarrow$ codificación de fuente.

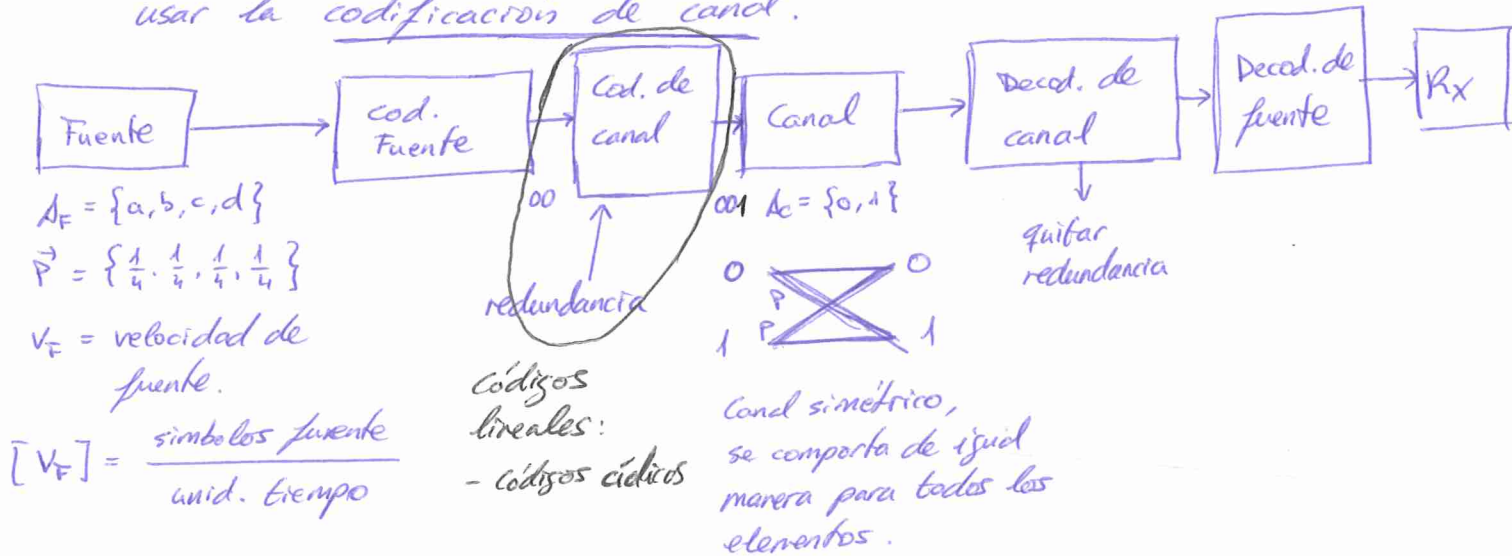
Cod. fuente:



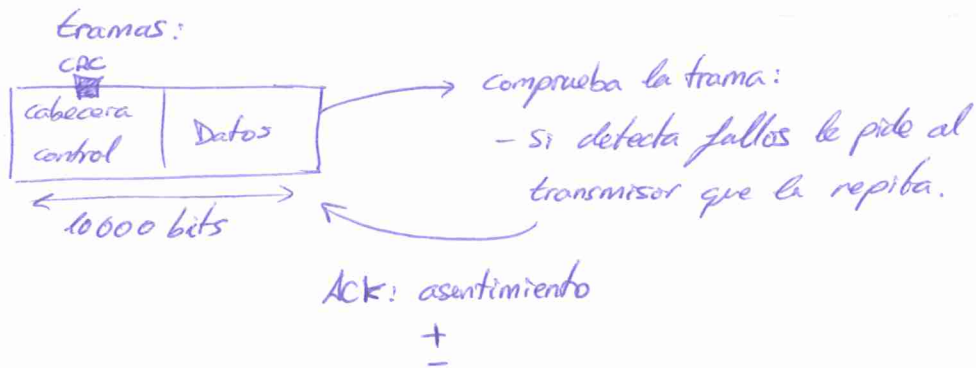
En la realidad no existen canales ideales: los canales cometen errores!



* Para conseguir fiabilidad, si el canal no es ideal, se debe usar la codificación de canal.

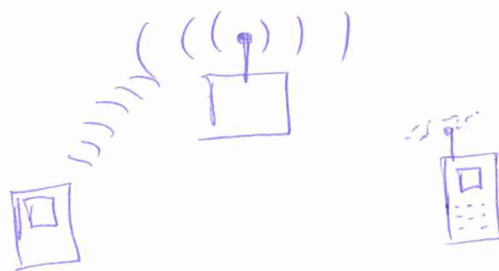


"Estrategia ARQ:"



"Protocolos MAC" (Control de Acceso al Medio)

wifi



Problema $\rightarrow$ colisión.

TEMA 1: CONCEPTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE LA INFORMACIÓN.

1 - ENTROPÍA PROPIEDADES.

1.1. Entropía.

Sea X una v.A. con $P_X = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$

Se define la entropía de X como:

$$H_s(X) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \log_s \frac{1}{P_i}$$

$s=2 \Rightarrow H_2(): \text{bits}$

NOTA: $\log_2 a = \frac{\ln a}{\ln 2}$

Ejemplo: Sea X , $P_X = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right\}$

$H_2(X)?$

$$H_2(X) = \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \left(\frac{1}{8} \log_2 8 \right) \cdot 2 = 1,75 \text{ bits.}$$

El sistema equiprobable es el que tiene mayor incertidumbre.

Propiedades de la entropía:

a) $H(x) \geq 0$. Son positivas por definición.

$$H(x) = 0 \Rightarrow \text{Determinista.} \\ \vec{P} = \{1\}$$

b) $H(x) \leq \log n \iff H_{\max} = \log n$

La entropía es máxima si $P_i = \frac{1}{n} \forall i$.
(símbolos equiprobables)

c) Propiedad de partición:

Sea X una v.a. y sea X_1, X_2 dos particiones en esa v.a. de cumplir que:

$$H(x) = H(p) + p \cdot H(X_1) + (1-p) \cdot H(X_2)$$

siendo p , la masa de probabilidad de X_1 .

Ejemplo: $\vec{P}_x = \left\{ \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}}_{X_1}, \underbrace{\frac{1}{8}, \frac{1}{8}}_{X_2} \right\}$

o porque X_1 solo depende de un valor.
 $\nearrow$ $P_{X_1} = \frac{1/2}{1/2} = 1$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} H_2(x) &= H_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot H(X_1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot H_2(X_2) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{2 \text{ bits}}} \end{aligned}$$

$$P_{X_2} = \left\{ \frac{1/8}{1/2}, \frac{1/8}{1/2}, \frac{1/8}{1/2}, \frac{1/8}{1/2} \right\} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$H_2(X_2) = \log_2 4 = 2 \text{ bit.}$$

$$H_2\left(\frac{1}{2}\right) = H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \log_2 2 = 1 \text{ bit.}$$

1.2. Entropía conjunta. $H(X, Y)$

Sea X, Y dos V.A. con vector de probabilidad:

$$P_X = \{P_{X1}, P_{X2}, \dots, P_{Xn}\}, \quad P_Y = \{P_{Y1}, P_{Y2}, \dots, P_{Yn}\}$$

$H(X, Y) \equiv$ es una medida de la incertidumbre que existe a la vez sobre X e Y .

$$H(X, Y) = \sum_i \sum_j P_{ij} \log \frac{1}{P_{ij}}$$

$P_{ij} \equiv$ probabilidad conjunta.

$$P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

1.3. Entropía condicionada. $H(X/Y)$

Sea X e Y dos V.A. con vectores de probabilidad.

$$P_X = \{P_{X1}, P_{X2}, \dots, P_{Xn}\}, \quad P_Y = \{P_{Y1}, P_{Y2}, \dots, P_{Yn}\} \text{ Se define la}$$

entropía condicionada:

$H(X/Y)$: como la incertidumbre que existe sobre X conocido Y .

NOTA: $H(X/Y) \leq H(X)$

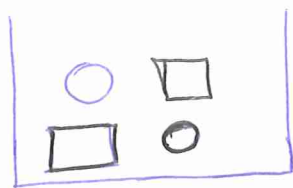
$$H(X/Y) = \sum_j H(X/Y = y_j) \cdot P(Y = y_j)$$

$$H(X/Y = y_j) = \sum_i P(X = x_i / Y = y_j) \cdot \log \frac{1}{P(X = x_i / Y = y_j)}$$

OTRA FORMA:

$$H(X/Y) = H(X, Y) - H(Y)$$

Ejemplo: Experimento: una extracción sin restitución.



a) Incertidumbre sobre la forma?

$$F = \{ \text{esfera, cubo} \}$$

$$\vec{P}_F = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$H_2(F) = \log_2 2 = 1 \text{ bit.}$$

b) Cuanta incertidumbre existe sobre la forma de la segunda extracción si la 1ª era cubo?

$$F' = \{ \text{esfera, cubo} \}$$

$$P_{F'} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

$$H(F') = H_2\left(\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \log_2\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \log_2(3) = 0,918 \text{ bits.}$$

c) Que incertidumbre existe sobre el color y la forma de la 1ª extracción?

$$H_2(C, F)?$$

$$H_2(C, F) = \sum_i \sum_j P_{ij} \log \frac{1}{P_{ij}}$$

$$C: \{ n, v \}$$

$$P_C = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$

Entropía conjunta: $\rightarrow H(C, F)$

NOTA: $P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i/Y=y_j) \cdot P(Y=y_j)$

posibilidades

$$P(C=n, F=e) = \frac{1}{4}$$

$$P(C=v, F=e) = \frac{1}{4}$$

$$P(C=n, F=c) = \frac{2}{4}$$

$$P(C=v, F=c) = 0$$

0,75 bits

$$H_2(C, F) = \frac{1}{4} \cdot \log_2 4 + \frac{2}{4} \log_2 \frac{4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \log_2 4 = \underline{\underline{1,5 \text{ bits}}}$$

d) Cuanta incertidumbre existe sobre el color si se sabe que la forma es cubo?

$$H(C/F=C) = 0$$

e) " " " " forma es esfera?

$$\begin{aligned} H(C/F=e) &= \sum_i P(C=c_i/Y=y_j) \cdot \log \frac{1}{P(C=c_i/Y=y_j)} = \\ &= P(C=n/F=e) \cdot \log \frac{1}{P(C=n/F=e)} + P(C=v/F=e) \cdot \log \frac{1}{P(C=v/F=e)} = \\ &= \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 2 = \log_2 2 = \underline{\underline{1 \text{ bit.}}} \end{aligned}$$

f) Cuanta incertidumbre existe sobre el color si se sabe la forma?

$$\begin{aligned} H(C/F) &= \sum_j H(C/F=F_j) \cdot P(F=F_j) = \\ &= \underbrace{H(C/F=e)}_{\log_2 2} \cdot \underbrace{P(F=e)}_{1/2} + \underbrace{H(C/F=c)}_0 \cdot P(F=c) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \text{ bits.}}} \end{aligned}$$

1.4. Regla de la cadena.

$$H(X, Y) = H(X/Y) + H(Y) = H(Y/X) + H(X)$$

si X e Y son independientes: $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$

1.5. Información mutua

Sean X, Y 2 v.a. se define la información mutua entre

$$X, Y: I(X; Y) = \underbrace{H(X)}_{\text{incertidumbre sobre } X} - \underbrace{H(X/Y)}_{\text{incertidumbre que queda de } X \text{ conocido } Y} = H(Y) - H(Y/X)$$

incertidumbre que se elimina de X por conocer Y .

Una variable aporta información sobre otra cuando

NOTA: Una variable aleatoria aporta información sobre otra si reduce su incertidumbre.

Boletín de problemas:

Problema 4:

a) X : "Legalidad del dado"

$$A_X = \{l, nl\}$$

$$P_X = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

Y : "Resultado de 1 tirada"

$$A_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P_Y = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15} \right\}$$

$H(X/Y) \equiv$ incertidumbre sobre X conocido Y

$I(X; Y) \equiv$ cuanta incertidumbre se elimina sobre la legalidad del dado si se conoce el resultado de la 1 tirada.

$$I(X; Y) = H(X) - \underbrace{H(X/Y)}_{P(X/Y)} = H(Y) - \underbrace{H(Y/X)}_{P(Y/X)} = \underbrace{H(Y)}_{P_Y} - H(Y/X)$$

$$\begin{aligned} P_Y: \quad & \boxed{P(Y=1) = P(Y=1/X=l) \cdot P(X=l) + P(Y=1/X=nl) \cdot P(X=nl)} \\ & = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{18} + \frac{2}{9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \\ & \boxed{P(Y=2) = P(Y=2/X=l) \cdot P(X=l) + P(Y=2/X=nl) \cdot P(X=nl)} \\ & = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3/5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

Cálculo $H(Y)$:

$$\boxed{H_2(Y) = \frac{1}{3} \cdot \log_2 3 + \left(\frac{2}{5} \log_2 \frac{15}{2} \right) \cdot 5 = 0,528 + 5,814 = 6,342}$$

resto de los números

$$\begin{aligned}
 H(Y/X) &= \sum_i H(Y/X=x_i) \cdot P(X=x_i) = \underbrace{H(Y/X=1)}_{\log_2 6} \cdot \underbrace{P(X=1)}_{\frac{2}{3}} + \\
 &+ \underbrace{H(Y/X=nl)}_{\text{calcularla}} \cdot \underbrace{P(X=nl)}_{\frac{1}{3}} = \log_2 6 \cdot \frac{2}{3} + 1,69 \cdot \frac{1}{3} = 1,72 + 0,56\bar{3} = \\
 &= \underline{\underline{2,283}}
 \end{aligned}$$

incertidumbre $\nearrow$ son independientes $\rightarrow$ máxima

calculo $H(Y/X=nl)$:

$$\begin{aligned}
 H(Y/X=nl) &= P(Y=1/X=nl) \cdot \log \frac{1}{P(Y=1/X=nl)} + \\
 &+ \left(P(Y=2/X=nl) \cdot \log \frac{1}{P(Y=2/X=nl)} \right) \cdot 5 = \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \log_2 \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{15} \cdot \log_2 15 \right) \cdot 5 = 0,39 + 1,3 = \underline{\underline{1,69}}
 \end{aligned}$$

Solución

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y/X) = 6,342 - 2,283 = \underline{\underline{4,059}}$$

b) ¿ $H(X/Y)$? Y' : Resultado de 2 tiradas.

$$\begin{aligned}
 A_Y = \{ & (1,1), (1,2), \dots (1,6) \\
 & (2,1), (2,2) \dots \\
 & \vdots \\
 & (6,1), \dots (6,6) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= \{ (1,1), (1,x), (x,x) \} \\
 &\quad \downarrow \quad (x,1) \quad \downarrow \\
 &\quad \frac{1}{9} \quad \downarrow \quad \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \quad \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \\
 &\quad \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{45}
 \end{aligned}$$

NOTA: La información que aporta una v.a por si sola es su incertidumbre

Problema 10.

a) C : "color"

$$A_C = \{v, r, n\}$$

$$P_C = \left\{ \frac{2}{38}, \frac{18}{38}, \frac{18}{38} \right\}$$

$$H_2(C) = H_2\left(\frac{2}{38}, \frac{18}{38}, \frac{18}{38}\right) = \frac{2}{38} \cdot \log_2 \frac{38}{2} + 2 \cdot \left(\frac{18}{38} \cdot \log_2 \frac{38}{18} \right) = 1,24 \text{ bits}$$

b) $H(C, N)$

N : N°

$$A_N = \{0, \dots, 37\}$$

$$P_N = \left\{ \frac{1}{38}, \dots, \frac{1}{38} \right\}$$

un solo elemento
(máximo)

$$H(C, N) = \underbrace{H(C/N)}_{\leftarrow 0} + \underbrace{H(N)}_{\log_2 38} = \underbrace{H(N/C)}_{\text{Difícil de calcular}} + \underbrace{H(C)}$$

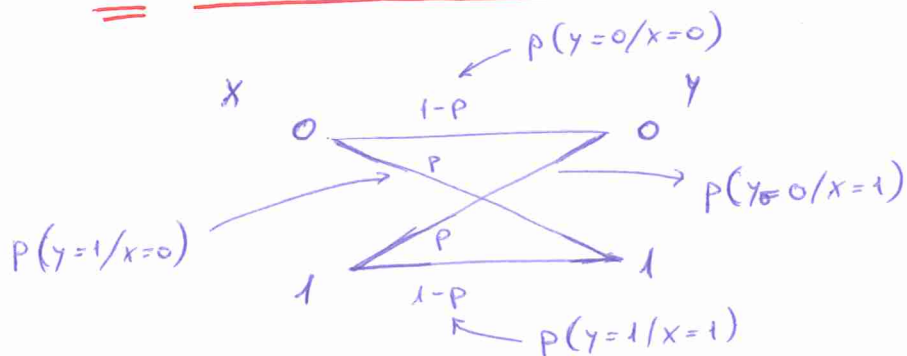
porque si conozco el N° sabemos el color (la duda es 0)

$$\underline{H(C, N) = \log_2 38 = 5,25 \text{ bits}}$$

$$c) \quad H(N/C) = \underbrace{H(C, N)}_{\text{apartado b}} - \underbrace{H(C)}_{\text{apartado a}}$$

$$\boxed{H(N/C) = 5,25 - 1,24 = 4,01 \text{ bits}}$$

1.6. PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN.



Matriz de transición:

$$Q_{r \times s} = \begin{pmatrix} P(Y=1/X=1) & \dots & P(Y=s/X=1) \\ \vdots & & \vdots \\ P(Y=1/X=r) & \dots & P(Y=s/X=r) \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 n° de n°
 entradas. salidas.

$$Q_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1-P & P \\ P & 1-P \end{pmatrix}$$

NOTA: Cada fila de Q suma 1.

Matriz de probabilidades conjuntas:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P(X=1, Y=1) & \dots & P(X=1, Y=s) \\ \vdots & & \vdots \\ P(X=r, Y=1) & \dots & P(X=r, Y=s) \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $P(Y=1)$ $P(Y=s)$

$\rightarrow P(X=1)$
 $\rightarrow P(X=r)$

NOTA: La suma de todos los valores de la matriz es 1.

$$\sum_i \sum_j P_{ij} = 1$$

$$P(x=1, y=1) = P(y=1/x=1) \cdot P(x=1)$$

$$P_{ij} = Q \cdot \text{multiplicando cada fila de } Q \text{ por } P(x=x_i)$$

Problema 9.

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow P(x=1) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \\ \rightarrow P(x=2) = \frac{1}{3} \\ \rightarrow P(x=3) = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P(y=1) & P(y=2) & P(y=3) \\ \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

a) Entropía conjunta $\rightarrow H(x, y)$?

$$\boxed{H(x, y) = H_2\left(\frac{7}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{1}{4}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{7}{24}\right) = 2 \cdot \left(\frac{7}{24} \cdot \log_2\left(\frac{24}{7}\right)\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{24} \cdot \log_2(24)\right) + \frac{1}{4} \cdot \log_2 4 = 1,37 + 0,76 + 0,5 = 2,63 \text{ bits}}$$

$$b) \boxed{H(y) = \log_2 3 = 1,58 \text{ bits}}$$

como la variable Y es indep. su entropía es máxima.

$$c) \boxed{H(x/y) = \underbrace{H(x, y)}_{\text{apartado a}} - \underbrace{H(y)}_{\text{apartado b}} = 2,63 - 1,58 = 1,05 \text{ bits}}$$

Examen enero 2014. (dictado)

Repetic

1. Si la matriz de transición:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y las probabilidades de los elementos de entrada: $P_x = \left\{ \frac{1-\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2} \right\}$

Calcule $H(X/Y)$?

Obtenemos la matriz de probabilidades conjuntas.

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q \cdot \frac{\alpha}{2} & p \cdot \frac{\alpha}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \cdot \frac{\alpha}{2} & q \cdot \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\alpha}{2} \end{pmatrix}$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$H(X, Y) = \underbrace{H(X/Y)} + H(Y)$$

$$H(X/Y) = H(X, Y) - H(Y)$$

• Calculamos $H(Y)$: cada probabilidad de Y se obtiene con la suma de cada columna de P_{ij}

$$P(Y=1) = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$P(Y=2) = q \cdot \frac{\alpha}{2}$$

$$P(Y=3) = 2p \cdot \frac{\alpha}{2}$$

$$P(Y=4) = q \cdot \frac{\alpha}{2}$$

$$P(Y=5) = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$H_2(Y) = H_2 \left(\overbrace{\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}}^{Y_1 (1-\alpha)}, \overbrace{\frac{q \cdot \alpha}{2}, p \cdot \alpha, q \cdot \frac{\alpha}{2}}^{Y_2 (\alpha)} \right)$$

$$\begin{aligned} H_2(Y) &= H_2(1-\alpha) + (1-\alpha) \cdot \underbrace{H(Y_1)}_{(1)} + \alpha \cdot \underbrace{H(Y_2)}_{(2)} = \\ &\rightarrow H_2(1-\alpha) = H_2(1-\alpha, \alpha) = H_2(\alpha) \\ &= H_2(\alpha) + (1-\alpha) \cdot 1 + \alpha \cdot H_2\left(\frac{q}{2}, p, \frac{q}{2}\right) \end{aligned}$$

$$(1) H_2(Y_1) = H_2\left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha}, \frac{1-\alpha}{1-\alpha}\right) = H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \log_2 2 = 1 \text{ bit.}$$

$$(2) H_2(Y_2) = H_2\left(\frac{q}{2}, p, \frac{q}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{q}{2} + p + \frac{q}{2} = 1 \\ p = 1 - q \end{cases} \rightarrow \frac{q}{2} + (1-q) + \frac{q}{2} = 1 \quad \text{queda en función de } q.$$

• Calculamos $H(X, Y)$!

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= H \left(\overbrace{\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2}}^{Z_1 (1-\alpha)}, \overbrace{\frac{q \cdot \alpha}{2}, p \cdot \frac{\alpha}{2}, p \cdot \frac{\alpha}{2}, q \cdot \frac{\alpha}{2}}^{Z_2 (\alpha)} \right) = \\ &= H_2(1-\alpha) + (1-\alpha) \cdot H(Z_1) + \alpha \cdot H(Z_2) \\ &= H_2(\alpha) + (1-\alpha) \cdot \log_2 2 + \alpha \cdot H\left(\frac{q}{2}, \frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{p}{2}\right) = \\ &= H_2(\alpha) + (1-\alpha) + \alpha \cdot H_2\left(\frac{q}{2}, \frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{p}{2}\right) \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{aligned} H(X/Y) &= H(X, Y) - H(Y) = \left[H_2(\alpha) + (1-\alpha) + \alpha \cdot H_2\left(\frac{q}{2}, \frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{p}{2}\right) \right] - \left[\cancel{H_2(\alpha)} + \cancel{(1-\alpha)} + \alpha \cdot H_2\left(\frac{q}{2}, p, \frac{q}{2}\right) \right] \\ &= \alpha \left[H_2\left(\frac{q}{2}, \frac{p}{2}, \frac{q}{2}, \frac{p}{2}\right) - H_2\left(\frac{q}{2}, p, \frac{q}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Problema 1.

$$Q_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 3/4 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $p(y=1/x=1)$ $p(y=2/x=1)$ $p(y=4/x=4)$

$$\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline 1 & p(y=1/x=1) \cdot 1. \\ 2 & p(y=2/x=1) \cdot 2. \\ 3 & 3. \\ 4 & 4. \end{array}$$

a) X Mutua $I(x; y)$

X Conjunta $H(x, y) \rightarrow$

condicionada $H(x/y) \rightarrow$ que duda hay sobre la entrada si conoces la salida

$$\vec{P}_x = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right\}$$

Regla de la cadena:

$$H(x, y) = H(x/y) + H(y)$$

$$H(x/y) = H(x, y) - H(y)$$

$$p_{i,j} = p(x=x_i, y=y_j)$$

Obtenemos la matriz de probabilidades conjuntas multiplicando la fila i -ésima de Q por $p(x=x_i)$ $i=1 \dots n$.

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} & 0 \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} & 0 \cdot \frac{1}{8} \\ 0 \cdot \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} & 0 \cdot \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & 0 \\ 0 & \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ \frac{1}{32} & 0 & \frac{1}{32} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$$p(y=1) \quad p(y=2) \quad p(y=3) \quad p(y=4)$$

La suma de la j -ésima columna de P_{ij} nos da $P(Y=Y_j)$

$$P(Y=1) = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}$$

$$P(Y=3) = \frac{4}{32}$$

$$P(Y=2) = \frac{5}{32}$$

$$P(Y=4) = \frac{9}{32}$$

$$H(X,Y) = H_2\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}, \frac{3}{16}\right) =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \log_2\left(\frac{8}{3}\right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot \log_2 16\right) + 6 \cdot \left(\frac{1}{32} \cdot \log_2(32)\right) + \frac{3}{16} \cdot \log_2\left(\frac{16}{3}\right) = \underline{2,92 \text{ bits}}$$

$$H(Y) = H_2\left(\frac{7}{16}, \frac{5}{32}, \frac{4}{32}, \frac{9}{32}\right) = \frac{7}{16} \cdot \log_2 \frac{16}{7} + \frac{5}{32} \log_2 \frac{32}{5} + \dots =$$

$$= \underline{1,83 \text{ bits}}$$

Nota: $\log_2 a = \frac{\ln a}{\ln 2}$

solución

$$H(X/Y) = 2,92 - 1,83 = \underline{1,09 \text{ bits}}$$

11 de Junio 2007.

Repetir

Problema 1.

$$P_{ij} = \begin{matrix} & \begin{matrix} p(Y=1) & p(Y=2) & p(Y=3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \\ \frac{7}{24} \\ \frac{1}{24} \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \uparrow \\ \frac{1}{24} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} \end{matrix} & \begin{matrix} \uparrow \\ 0 \\ \frac{1}{24} \\ \frac{7}{24} \end{matrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} p(X=1) = \frac{1}{3} \\ p(X=2) = \frac{1}{3} \\ p(X=3) = \frac{1}{3} \end{matrix}$$

a) ¿ $H(Y)$? (solo habla de una variable.)

(La incertidumbre es máxima)

$\log_2 \uparrow$
nº de elementos

Por ser equiprobables.

$$H_2(Y) = H_2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \log_2 3 = 1,59 \text{ bits}$$

b) $H(y)$ si $x = x_1$ no puede ser.

$$x' = \{x_2, x_3\}$$

$$P'_{ij} = \frac{P_{ij}}{1 - \text{prob. eliminada}} = \frac{P_{ij}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{P_{ij}}{\frac{2}{3}}$$

$$\text{prob. eliminada} = \frac{7}{24} + \frac{1}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$P'_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} \cdot \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} & \frac{1}{24} \cdot \frac{3}{2} \\ 0 \cdot \frac{3}{2} & \frac{1}{24} \cdot \frac{3}{2} & \frac{7}{24} \cdot \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$P'_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{7}{16} \end{pmatrix} \rightarrow P(x=x_2) = \frac{8}{16}$$

$$\rightarrow P(x=x_3) = \frac{8}{16}$$

$$P_{x'} = \left\{ \frac{8}{16}, \frac{8}{16} \right\}$$

$$P_y = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{7}{16}, \frac{8}{16} \right\}$$

$$H_2(y) = H_2\left(\frac{1}{16}, \frac{7}{16}, \frac{8}{16}\right) = \underline{\underline{1,27 \text{ bits.}}}$$

3 septembre 2009.

Sin ver

Problema 1.

1. $\delta H(S, E)?$

$$S = \{\text{sexo}\}$$

$$S = \{H, M\}$$

$$P_S = \{0,7, 0,3\}$$

$$E = \{\leq 30, 31-40, >40\}$$

$$P_E = \{0,25, 0,55, 0,2\}$$

E/s	H	M
≤ 30	0,05	$2\alpha = 0,2 \rightarrow P(E \leq 30) = 0,25$
31-40	$0,55 - 0,1 = 0,45$	$\alpha = 0,1 \rightarrow P(E = 31-40) = 0,55$
> 40	0,2	0 $\rightarrow P(E > 40) = 0,2$

$\downarrow$
 $P(S=M) = 0,3 = 3\alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 0,1}}$

$$H(s, E) = H_2(0,05, 0,2, 0,45, 0,1, 0,2) =$$

$$= 0,05 \cdot \log_2 \frac{1}{0,05} + \dots$$

b)

E/s	H	M
≤ 30	$\frac{0,05}{0,35} = \frac{1}{7}$	$\frac{0,2}{0,35} = \frac{4}{7}$
31-40	0	$\frac{0,1}{0,35} = \frac{2}{7}$
> 40	0	0

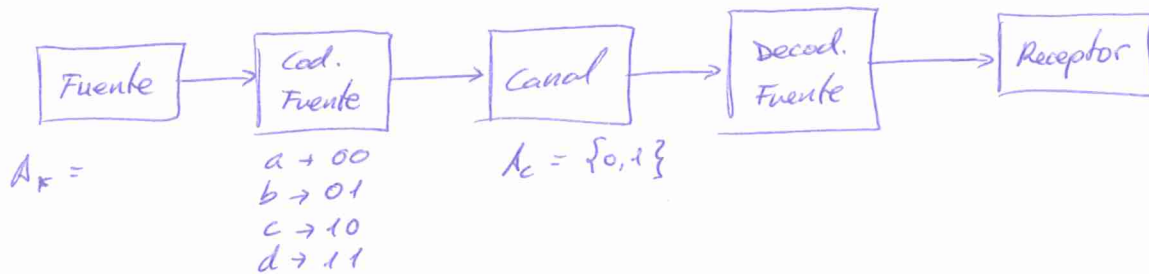
$$\text{prob. eliminada} = 0,45 + 0,2 = 0,65$$

$$P_{ij}' = \frac{P_{ij}}{1-0,65} = \frac{P_{ij}}{0,35}$$

$$H(E, s) = H_2\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$$

2. Codificación de fuente.

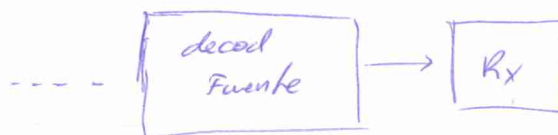
2.1. Introducción.



Definiciones:

- Códigos univocamente decodificables: son códigos con una única interpretación en el receptor.

Ejemplo:



$a \rightarrow 0$
 $b \rightarrow 00$
 $c \rightarrow 001$
 $d \rightarrow 0011$

100000
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_c \underbrace{\quad\quad}_a \underbrace{\quad\quad}_a \underbrace{\quad}_b$

- Códigos instantáneos o prefijos: Son aquellos códigos univocamente decodificables en los que ninguna palabra código es prefijo de otra.

$a \rightarrow 1$
 $b \rightarrow 01$
 $c \rightarrow 001$
 $d \rightarrow 0001$

- Longitud media de un código: Indica el número medio de símbolos que contiene cada palabra código. Se calcula:

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^n l_i \cdot p_i$$

en media

Ejemplo:

A_F	$\vec{P}$	P.C	l_i
a	$1/4$	1	1
b	$1/4$	01	2
c	$1/4$	001	3
d	$1/4$	0001	4

$$\bar{L} = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = 2,5 \frac{\text{bits}}{\text{símbolo-fuente.}}$$

Se busca una transmisión eficiente $\Rightarrow \bar{L}$ sea lo menor posible.

• Códigos compactos: Tienen la $\bar{L}$ menor posible. No existen otros con $\bar{L}$ menor.

• Códigos óptimos: son aquellos que tienen la $\bar{L}$ mínima

teórica: $\bar{L}_{\min} = \frac{1}{s} (P_{\text{fuente}})$

indica el tamaño del A_c
canal binario: $s=2$.

2.2. Algoritmo de Huffman.

Es un método para obtener códigos compactos.

• Caso binario ($s=2$)

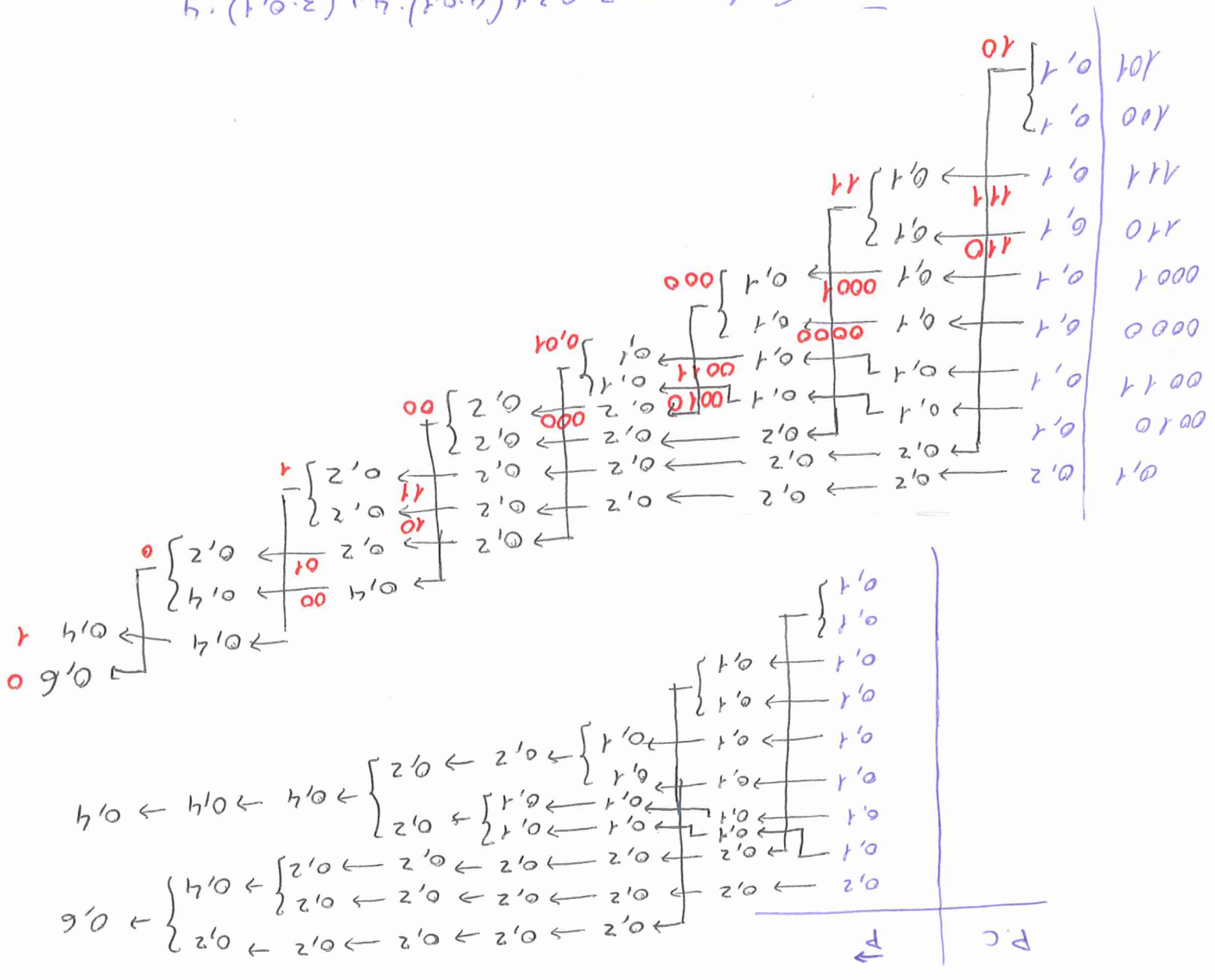


Sea una fuente con vector de probabilidades:

$$\vec{P} = \{0,2, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1, 0,1\}$$

$$\boxed{I = 3,2 \text{ bit subitudo/punte.}}$$

$$h.(1'0 \cdot 8) + h.(1'0 \cdot 4) + 2'0 \cdot 2 = 2'0 \cdot 17 \cdot 3 = 7$$



100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

~~CODIFICACION DE FUENTE~~

Eficiencia:

$$\eta = \frac{H_s(\vec{p})}{L}$$

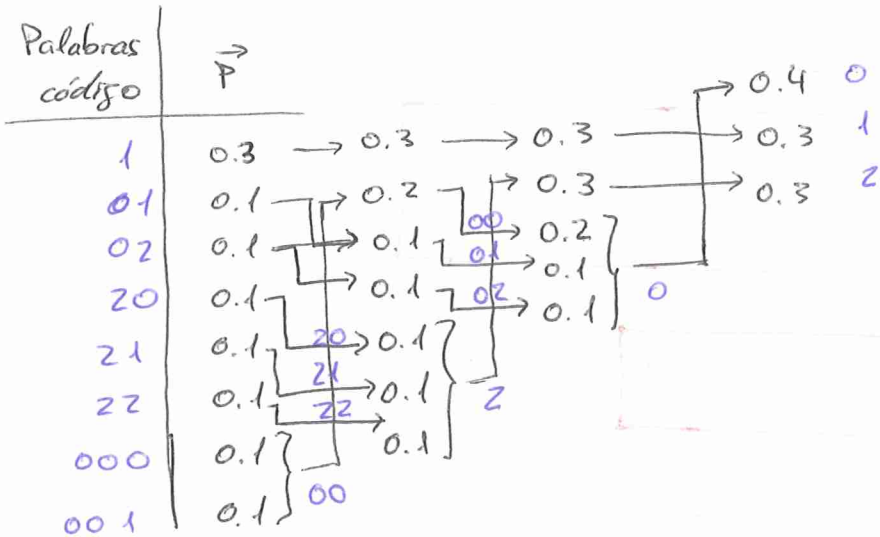
s: tamaño del Ac.
(canal binario. $s=2$)

Códigos óptimos $\Rightarrow \eta = 1 \Leftrightarrow \bar{L} = \bar{L}_{\min} = H_S(\bar{p})$

- caso general del algoritmo de Huffman.

Ej: Obten la longitud media de un código ternario compacto para la fuente con vector de probabilidades:

$$\vec{P} = \{0.3, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1\}$$



resto de dividir

$$s' = z + (n-z) \overline{\text{mod}} (s-1)$$

n : n° de simb. fuente.

s: tamaño del alfabeto de cad.

$$s^1 = 2 + (8-2) \bmod (3-1)$$
$$= 2 + 6 \bmod 2 = 2 + 0 = 2$$

En las siguientes etapas se agrupa de 5 en 5.

$$\bar{L} = \sum_i L_i \cdot p_i = 1 \cdot 0,3 + \overset{n^\circ \text{ de bits}}{(2 \cdot 0,1)} \cdot 5 + \overset{n^\circ \text{ de bits}}{(3 \cdot 0,1)} \cdot 2$$

$$\bar{L} = 1,9 \text{ u. ternarios / simb. fuente.}$$

2.3. Cotas de la longitud media de códigos compactos.

Th. Mc. Millan

Si el código es univocamente decodificable se cumple:

$$\sum_{i=1}^n s^{-L_i} \leq 1$$

Th. Kraft.

Si se cumple $\sum_{i=1}^n s^{-L_i} \leq 1$ entonces se puede construir

un código univocamente decodificable tomando:

$$L_i = \log_s \frac{1}{p_i} \quad \forall i: 1 - n.$$

Propiedad:

$$\bar{L} \geq H_s(\vec{P})$$

Justificación:

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^n L_i \cdot p_i = \sum_{i=1}^n \log_2 \frac{1}{p_i} \cdot p_i \geq \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{p_i} \cdot p_i = H_s(\vec{P})$$

↑
Kraft

$$\lceil a \rceil \geq a$$

$$\lceil 2,999 \rceil = 3 \geq 2,999 \dots 9$$

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

Propiedad:

$$\bar{L} < H_S(\vec{p}) + 1$$

Justificación:

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \sum_i l_i \cdot p_i = \sum_i \left\lceil \log_2 \frac{1}{p_i} \right\rceil \cdot p_i < \sum_i \left(\log_2 \frac{1}{p_i} + 1 \right) \cdot p_i = \\ &= \underbrace{\sum_i \log_2 \frac{1}{p_i} \cdot p_i}_{H_S(\vec{p})} + \underbrace{\sum_i p_i}_1\end{aligned}$$

Por tanto:

$$H_S(\vec{p}) \leq \bar{L} < H_S(\vec{p}) + 1$$

2.4. Extensión de fuente.

Propiedad: Si $\log_2 \frac{1}{p_i}$ entero $\forall i: 1 \dots n$ entonces

$\bar{L} = H_S(\vec{p}) \equiv$ código óptimo.

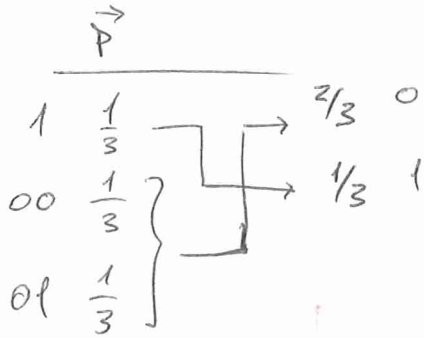
En general, los códigos compactos tienen $\eta \leq 1$.

La extensión de fuente consiste en codificar los símbolos fuente en grupos de m símbolos (extensión de fuente de orden m). Esto consigue mejorar la eficiencia de los códigos compactos (que no son óptimos).

Ejemplo: Obtén un código compacto binario para una fuente ternaria simétrica cuya eficiencia supere el 96%

Sol: $\vec{P} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$

Para sacar el código compacto binario utilizamos Huffman.



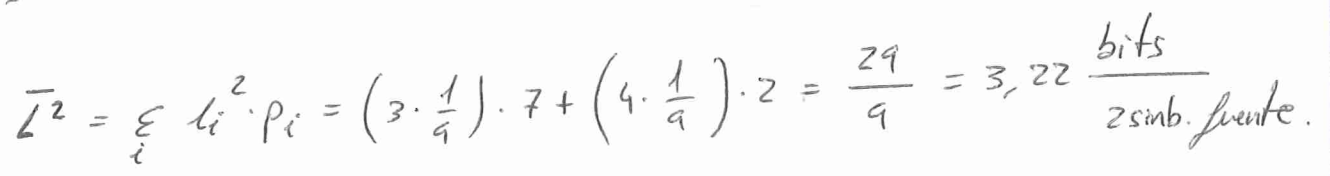
$$\bar{L} = \sum_i L_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \text{ bits/symb. fuente.}$$

$$\gamma = \frac{H_2(p)}{I} = \frac{\log_2 3}{5/3} = 0,95$$

Obtendremos otro código con eficiencia mayor usando extensión de fuente. Probamos extensión de fuentes de orden 2.

$$\vec{A}^2 = \left\{ \underset{aa}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}, \underset{ab}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}, \underset{ac}{\frac{1}{9}}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9} \right\}$$

obtenemos el código de la fuente extendida.



La eficiencia del nuevo código:

14

2.5. Th. de Shannon de codificación de fuente.

Aumentando el orden de la extensión de fuente se puede aproximar la longitud media de los códigos compactos tanto como se desee al límite teórico (la entropía de la fuente)

$$H_S(\vec{p}) \leq \bar{L} < H_S(\vec{p}) + \frac{1}{m}$$

$$H_S(\vec{p}) = H_S(x, \dots, x) = m \cdot H_S(\vec{p})$$

↑

La entropía de la fuente extendida se puede ver como la entropía conjunta de m fuentes independientes.

$$H_S^m(\vec{p}) \leq \bar{L}^m < H_S^m(\vec{p}) + 1$$

$$m \cdot H_S(\vec{p}) \leq m \cdot \bar{L} < m \cdot H_S(\vec{p}) + 1$$

3 de septiembre 2009.

Problema 2.

$$\vec{p} = \{\alpha, 2\alpha\}$$

$$\alpha + 2\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\vec{p} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

Th. Shannon de codificación fuente.

$$H_S(\vec{p}) \leq \bar{L} < H_S(\vec{p}) + \frac{1}{m}$$

m = orden de ext. de fuente.

$$m = 8$$

$$\bar{L} < H_2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8}$$

2.6. Cálculo de la $\bar{L}$ de códigos compactos.

1) Si $\log_s \frac{1}{p_i} = \text{entero } \forall i \Rightarrow \bar{L} = H_s(\vec{p})$

Ejemplo: Calcular la $\bar{L}$ de un código compacto binario para una fuente simétrica con 32 símbolos.

Sol: $p_i = \frac{1}{32} \forall i, s=2$

$\log_2 \frac{1}{1/32} = \log_2 32 = 5.$

$\bar{L} = H_2(\vec{p}) = \log_2 32 = 5 \frac{\text{bits}}{\text{simb. fuente}}$

2) Si la fuente cumple que $p_i = \frac{1}{n} \forall i$ (símbolos equiprobables) entonces ~~existen~~ en el código compacto asociado hay palabras código de longitud j ó $j+1$, tal que:

$s^j \leq n = \text{de palabras código} < s^{j+1}$ (caso binario: $s=2$)

$s^j \leq \text{" " " " } < s^{j+1}$ (en general)

Ejemplo: Obtener la longitud media de un código binario compacto para una fuente con 9 símbolos equiprobables.

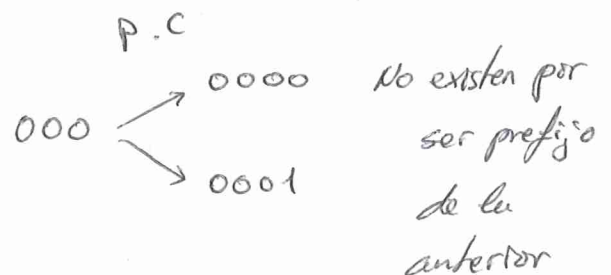
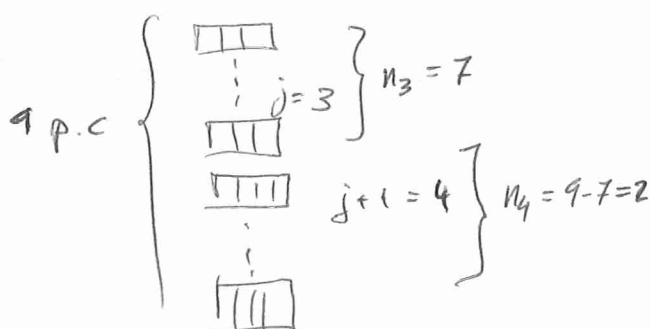
Sol: $p_i = \frac{1}{9} \forall i$

~~$\log_2 \frac{1}{1/9} = \log_2 9 \equiv \text{entero}$~~

Las palabras código cumplen:

$2^j \leq 9 < 2^{j+1}$

$j=3$



Por cada palabra de longitud j $\exists$ dos combinaciones de $j+1$ bits que no pueden ser p.c.

Supongamos que existen n_3 palabras código de $l=3$.

$$n_3 + \underbrace{2^4 - 2 \cdot n_3}_{\text{posible combinaciones con } l=4} \geq n^{\circ} \text{ de p.c.} = 9$$

con $l=4$

$$n_3 \leq 7$$

$$\bar{L} = \sum_i l_i \cdot p_i = \overset{n^{\circ} \text{ bits}}{\underbrace{(3)}_{\uparrow}} \cdot \frac{1}{9} \cdot \overset{n^{\circ} \text{ bits}}{\underbrace{(7)}_{\uparrow}} + \underbrace{(4)}_{\uparrow} \cdot \frac{1}{9} \cdot 2$$

$$\bar{L} = \frac{29}{9} \text{ bit/simb. fuente.}$$

Si no se cumplen los 2 primeros hay que utilizar Huffman.

Examen 15 junio 2010

Problema 2.

Repetir
(fácil)

fente simétrica $\Rightarrow$ símbolos equiprobables.

$$p_i = \frac{1}{243} \quad \forall i$$

a) ??

código compacto binario $\Rightarrow s=2$

$$\eta = \frac{H_2(\vec{p})}{\bar{L}}$$

$$\text{Si } \log_2 \frac{1}{p_i} = \text{entero} \Rightarrow \bar{L} = H_2(\vec{p})$$

$$\log_2 \frac{1}{p_i} = \log_2 \frac{1}{\frac{1}{243}} = \log_2 243 \neq \text{entero} \Rightarrow \text{El código no es óptimo.}$$

Como $P_i = \frac{1}{243} \forall i$ entonces las palabras código tienen 2 longitudes posibles: j o $j+1$

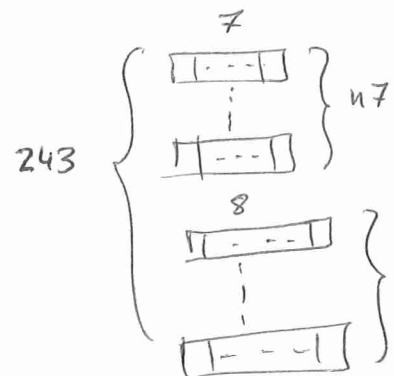
$$2^j \leq \text{nº de palabras código} < 2^{j+1}$$

$$2^j \leq 243 < 2^{j+1} \Rightarrow \boxed{j=7}$$

por cada una de n_7 hay 2 que no pueden existir.

$$n_7 + \underbrace{2^8 - 2n_7}_{\text{posibles combinaciones binarias con 8 bits}} \geq \text{nº de p.c.}$$

binarias con 8 bits



$$n_7 \leq 256 - 243 = 13 \Rightarrow \underline{\underline{n_7 = 13}}$$

$$\rightarrow n_8 = 243 - 13 = \underline{\underline{230}}$$

$$\bar{L} = \sum_i L_i \cdot P_i = \left(\overset{\substack{\uparrow \\ \text{nº bits}}}{7} \cdot \frac{1}{243} \right) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ n_7}}{13} + \left(\overset{\substack{\uparrow \\ \text{nº bits}}}{8} \cdot \frac{1}{243} \right) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ n_8}}{230}$$

$$\boxed{\bar{L} = 7,94 \text{ bits/simb. fuente}}$$

$$\boxed{\eta = \frac{H_2(\bar{P})}{\bar{L}} = \frac{\log_2 243}{7,94} = \underline{\underline{0,997}}}$$

b) $s=3 \quad \eta = \frac{H_3(\bar{P})}{\bar{L}}$

• Se cumple que $\log_3 \frac{1}{\frac{1}{243}} \cdot \log_3 243 = 5$

$\Downarrow$

el código $\rightarrow$ óptimo $\Rightarrow \boxed{\eta=1}$

*. Calcular lo mismo con un código cuaternario ($s=4$)

a) - $\log_4 243 \neq \text{entero} \Rightarrow \text{código no es óptimo.}$

$$- p_i = \frac{1}{243} \quad \forall i \Rightarrow l_i \begin{matrix} \nearrow j \\ \searrow j+1 \end{matrix}$$

$$s^j \leq n^\circ \text{ de p.c} < s^{j+1}$$

$$j = 3$$

$$4^j \leq 243 < 4^{j+1}$$

$$n_j + s^{j+1} - s \cdot n_j \geq n^\circ \text{ de p.c}$$



$$n_3 + 4^4 - 4 \cdot n_3 > 243$$

$$n_3 \leq \frac{256 - 243}{3} = \frac{13}{3} = 4, \dots$$

$$\Rightarrow n_3 = 4$$

$\Downarrow$

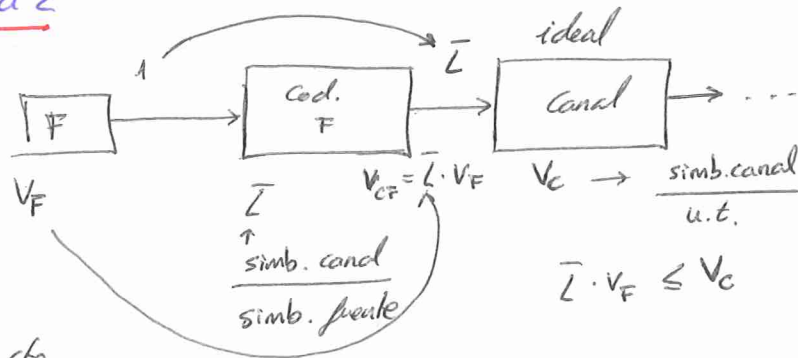
$$n_4 = 243 - 4 = 239$$

$$\bar{L} = \sum_i l_i p_i = \left(3 \cdot \frac{1}{243} \right) \cdot \underset{n_3}{4} + \left(4 \cdot \frac{1}{243} \right) \cdot \underset{n_4}{239}$$

$$\bar{L} = 3,98 \quad \frac{\text{u. cuaternarias}}{\text{simb. fuente}}$$

$$\eta = \frac{H_4(\vec{p})}{\bar{L}} = \frac{\log_4 243}{3,98} = 0,995$$

Problema 2



cte
" $\bar{L}_{\min} \cdot V_{F\max} \leq V_C$

$\Downarrow$
 $H_2(\vec{p})$ siempre que pueda
hacer extensión de fuente.

a) $P_i = \frac{1}{16} V_i$
 $V_C = 8 \cdot V_F$

$F \rightarrow$ fracción de uso.

$F = \frac{\bar{L} \cdot V_F}{V_C}$ $\xrightarrow{\text{bits u.t.}}$ $\xrightarrow{\text{simb. fuente u.t.}}$ canal irá completo cuando $\bar{L} \cdot V_F = V_C$ (adimensional)

$F = \frac{\text{tasa de entrada de información al canal}}{\text{tasa de trans. del canal.}}$

¿Es óptimo? $\rightarrow \log_2 \frac{1}{P_i} = \log_2 16 = 4$ (entero) $\Rightarrow$ es óptimo

$\bar{L} = H_2(\vec{p}) = \log_2 16 = 4 \text{ bits}$

$\boxed{F = \frac{4 \cdot V_F}{8 \cdot V_F} = \frac{1}{2}}$

b)

$$S = 8$$

$$P_i = \frac{1}{16} V_i$$

Régimen de trans. dos veces mayor que fuente. $V_c = 2 \cdot V_F$

$$F = \frac{\text{tasa de entrada de inform. al canal}}{\text{velocidad de transmisión de inf. por el canal}} = \frac{\bar{L} \cdot V_F}{V_c} = \frac{\bar{L} \cdot V_F}{2V_F}$$

Cálculo $\bar{L}$:

Como $P_i = \frac{1}{16} V_i$, $l_i \begin{matrix} \nearrow j \\ \searrow j+1 \end{matrix}$

$$8^j < 16 < 8^{j+1}$$

$$j=1$$

$$16 \left\{ \begin{matrix} \square \\ \vdots \\ \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{matrix} \right\}_{n_1}$$

$$n_1 + 8^2 - 8 \cdot n_1 \geq 16$$

$$n_1 \leq \frac{64-16}{7} = 6,85 \Rightarrow \boxed{n_1 = 6}$$

$$\boxed{n_2 = 16 - 6 = 10}$$

$$\bar{L} = \sum_i l_i P_i = \left(1 \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot \underset{\uparrow n_1}{6} + \left(2 \cdot \frac{1}{16}\right) \cdot \underset{\uparrow n_2}{10}$$

$$\boxed{\bar{L} = \frac{26}{16} = 1,625 \frac{\text{u. octarias}}{\text{simb. fuente}}}$$

$$F = \frac{\bar{L}}{2} = \frac{1,625}{2}$$

Boletín problemas num 2.

Problema 4.

a) Dice mínimo $\Rightarrow$ óptimo. $H_2(\vec{p})$.

Problema 1.

a) $s=4$
 $p_i = \frac{1}{6}$

$$\eta = \frac{H_4(\vec{p})}{\bar{L}}$$

Como $\log_4 \frac{1}{p_i} = \log_4 6$ no es un entero entonces no es óptimo

Como $p_i = \frac{1}{6} \forall i \Rightarrow l_i \begin{matrix} \nearrow j \\ \searrow j+1 \end{matrix}$

$$s^j \leq \text{numero de palabras código} < s^{j+1}$$

$$4^j \leq 6 < 4^{j+1}$$

$$j=1$$



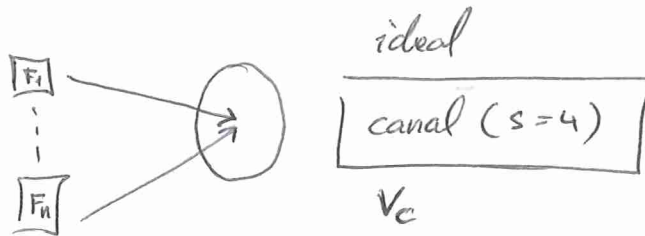
$$n_1 + 4^2 - 4 \cdot n_1 \geq 6$$

$$n_1 \leq \frac{16-6}{3} = \frac{10}{3} = 3,33 \Rightarrow \boxed{n_1=3}$$

$$\boxed{\bar{L} = \sum_i l_i p_i = \left(1 \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot 3 + \left(2 \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot 3 = 1,5 \text{ u. cuaternarias}}$$

$$\boxed{\eta = \frac{\log_4 6}{1,5}} = 0,86$$

Repetir b)



La norma que se debe cumplir es que:

Tasa de entrada de inf. al canal $\leq$ Tasa de trans de inform por el canal

$$\sum_{i=1}^N \bar{L}_i \cdot V_{Fi} \leq V_C \quad N: \text{n}^\circ \text{ de fuentes.}$$

$$N_{\max} \cdot \bar{L}_{\min} \cdot V_F \leq V_C \quad (N \text{ ser\'a max cuando } L_{\min})$$

$\uparrow$ const $\uparrow$ const

$$N_{\max} \leq \frac{V_C}{\bar{L}_{\min} \cdot V_F} = \frac{10 \cdot \cancel{V_F}}{\bar{L}_{\min} \cdot \cancel{V_F}}$$

$$\bar{L}_{\min} = H_4(\vec{p}) = \log_4 6 \text{ u. cuaternarias} = 1,29 \text{ u. cuaternarias}$$

$$N_{\max} = \frac{10}{1,29} = 7,75$$

no se utiliza la del apartado anterior puesto que el ^{cod. F} canal es diferente.
(haciendo extensi3n de fuente)

repetir

Problema 3

Tasa de entrada de inform. al canal $\leq$ tasa de transmisión de inf. por el canal.

$$N_{\max} \cdot \bar{L}_{\min} \cdot V_F \leq V_C \rightarrow \text{Velocidad canal}$$

↑
tasa media de inform. mínima

↙
Velocidad fuentes

nº de fuentes máxima

$$N_{\max} \leq \frac{V_C}{\bar{L}_{\min} \cdot V_F} = \frac{1000}{0,63 \cdot 100} = 15,87 \text{ fuentes}$$

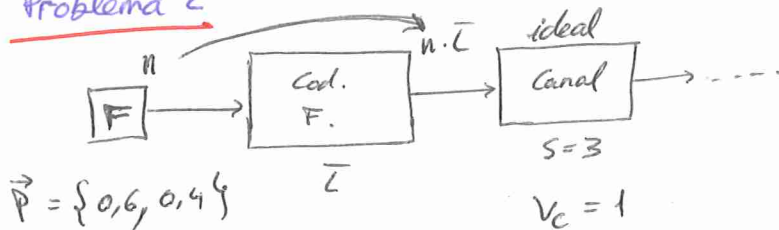
$$\bar{L}_{\min} = H_3\left(\frac{1}{2}\right) = \log_3 2 = 0,63 \text{ u. ternarias}$$

porque el canal es ternario

$$N_{\max} = 15 \text{ fuentes}$$

repetir

Problema 2



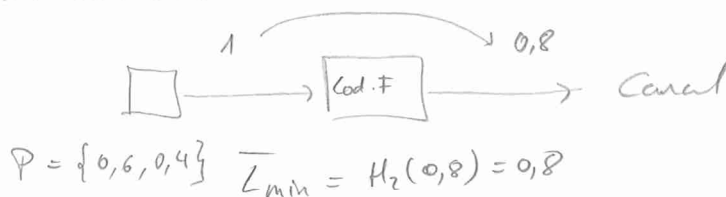
$T_n \rightarrow$ tiempo que se tardan en enviar los símbolos por el canal.

$$T_n = \frac{n \cdot \bar{L}}{V_C} \rightarrow T_{n\min} = \frac{n \cdot \bar{L}_{\min}}{V_C} = 0,61 \cdot n \text{ u.t}$$

$$\bar{L}_{\min} = H_3(\vec{P}) = 0,61 \text{ u. ternarias.}$$

$$H_3 = 0,6 \cdot \log_3 \frac{1}{0,6} + 0,4 \cdot \log_3 \frac{1}{0,4} = 0,61$$

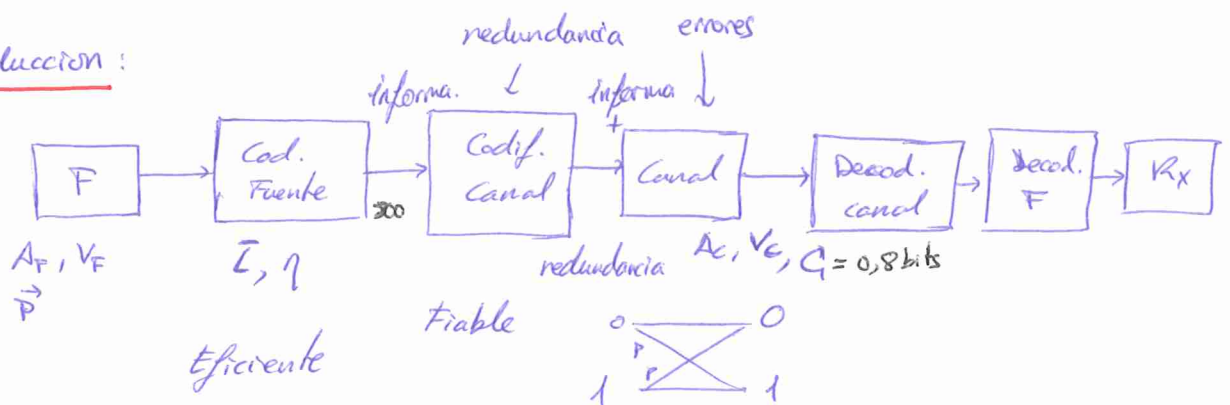
Sentido cod. fuente



$$\vec{P} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \bar{L}_{\min} = H_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

NOTA: si A_F y A_C son iguales conviene hacer codificación de fuente siempre que $\bar{L} < 1$. Esto sucede si los símbolos fuentes no son equiprobables.

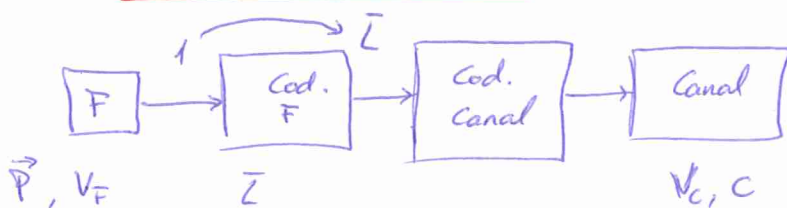
Introducción:



C : capacidad

C = porción de símbolos de canal que son de información.

CODIFICACIÓN DE CANAL



$$\bar{L}_C = \frac{\text{n.º medio de simb. canal}}{\text{símbolo de información}}$$

$$\bar{L}_{C \min} = \frac{1}{C}$$

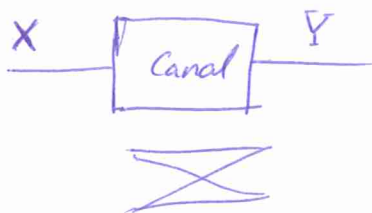
→ No puede existir un codi. de canal con $\bar{L}_C$ menor para garantizar transmisión fiable.

$$C \equiv \frac{\text{simb. de información}}{\text{simb. de canal}}$$

2. CAPACIDAD

Def. Capacidad

Sea X la v.a que representa la entrada de un canal y sea Y la v.a que indica la salida. Se define la capacidad del canal.



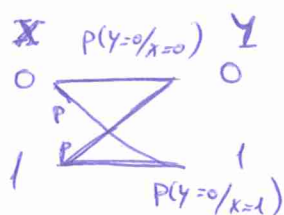
$$C \triangleq \max (I(X; Y))$$

Canales conocidos:

a) Canal simétrico: se dice que un canal es simétrico si cumple:

1. Las filas de su matriz de transición tienen los mismos valores (en cualquier orden).
2. Las columnas de la matriz de transición suman todo lo mismo.

Ejemplo:



$Q_{r \times s}$
 $\uparrow$ n° entradas
 $\uparrow$ n° salidas

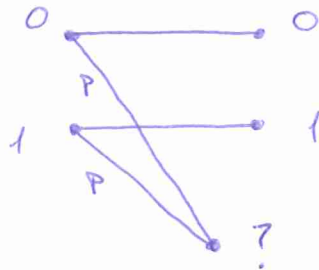
$$P(Y/X) = \begin{pmatrix} P(Y=0/X=0) & P(Y=1/X=0) \\ P(Y=0/X=1) & P(Y=1/X=1) \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1-P & P \\ P & 1-P \end{pmatrix}$$

$$C = \log s - H(\text{fila de } Q)$$

$\uparrow$
 n° salidas

b) Canal con borrado: La salida de este canal o es igual a la entrada o es un símbolo distinto de cualquier posible entrada.

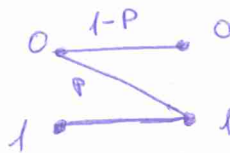


$$C = (1-P) \log H$$

↑
nº de entradas

c) Canal en Z.

$$Q = \begin{pmatrix} 1-P & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



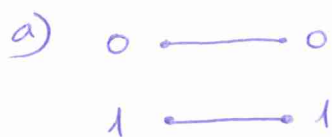
$$C = \log \left(1 + (1-P) \cdot P \frac{P}{1-P} \right)$$

d) Si un canal se comporta del mismo modo para todos los elementos de entrada entonces la información mutua entre la entrada y la salida se hace máxima si los símbolos de entrada son equiprobables.

$$C = \max (I(X; Y)) = I(X; Y) \Big|_{P(x=x_i) = \frac{1}{n} \forall i}$$

Ejemplos:

Calcula la capacidad de los siguientes canales (en bits):



$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C} = \log_2 2 - H_2(1) = \log_2 2 = \underline{\underline{1 \text{ bit}}}$$

$$I(x; Y) = H(X) - \underbrace{H(X/Y)}_{\substack{\text{Cogamos este camino por} \\ \text{ser el mas fácil}}} = \underbrace{H(Y) - H(Y/X)}$$

$$I(x; Y) = \underbrace{H(Y)} - H(Y/X)$$

• $H(Y)$: $P(Y=0) = P(Y=0/X=0) \cdot P(X=0) + P(Y=0/X=1) \cdot P(X=1) = 0,7 \cdot \frac{1}{2} + 0,2 \cdot \frac{1}{2} = 0,45$

$$P(Y=?) =$$

$$P(Y=1) = P(Y=1/X=0) \cdot P(X=0) + P(Y=1/X=1) \cdot P(X=1) =$$

• $H(Y/X)$: $H(Y/X) = \sum_i \underbrace{H(Y/X=x_i)}_{H(\text{fila } i\text{-ésima de } Q)} \cdot P(X=x_i) =$

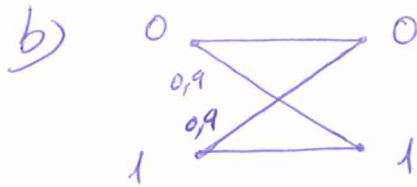
$$H(\text{fila}) \cdot \frac{1}{2} + H(\text{fila}) \cdot \frac{2}{3}$$

$$= H(\text{fila de } Q)$$

↑
las 2 filas de Q son iguales.

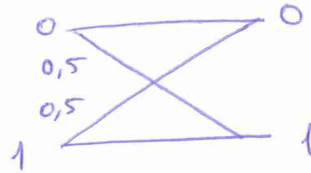
Nota: No hay ningún canal binario con capacidad mayor de 1 bit puesto que este es el ideal y tiene capacidad 1.

Si un canal no es binario puede tener capacidad mayor que un bit.



$$C_1 = \log_2 2 - H_2(0.1) > 0$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

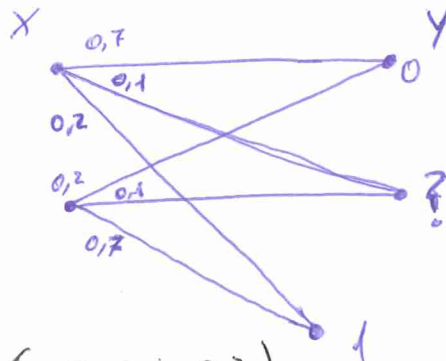


$C_2 = 0 \rightarrow$ La salida no da información sobre la entrada.

$$C_2 = \log_2 2 - H_2(0.5) = \log_2 2 - \log_2 2 = 0$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

c) calcular la capacidad en bits del siguiente canal.



$$Q_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Como las columnas de la matriz de transición Q no suman lo mismo no es simétrico.

No es un canal con borrado

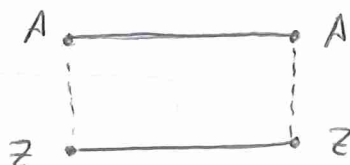
Como el canal se comporta del mismo modo para todos los elementos de entrada se cumple:

$$C = I(X; Y) \Big|_{P(x=x_i) = \frac{1}{2} \quad \forall i = 0, 1}$$

Examen 2007.

Problema 3.

a)



$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{26}$$

$$C = \log_2 26 - H_2(1) = \log_2 26 - \log_2 1 = \underline{\underline{4,7 \text{ bits}}}$$

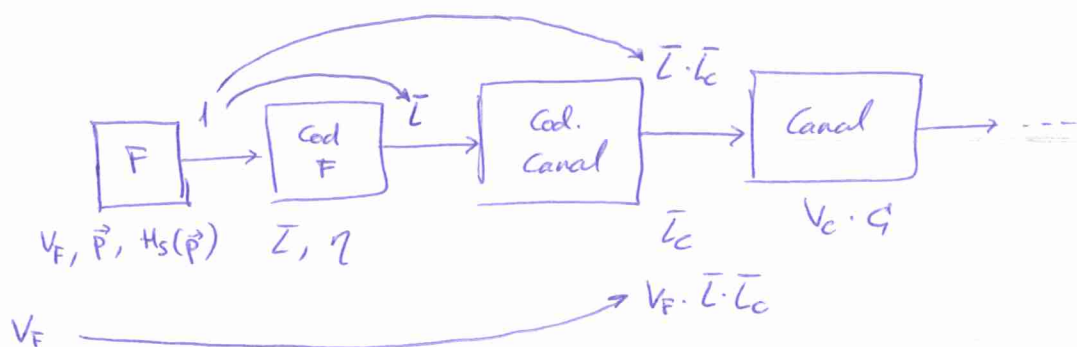
b)

$$Q =_{26 \times 26} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Canal simétrico todas las columnas suman lo mismo.

$$C = \log_2 26 - H_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$C = \log_2 26 - 1 \text{ bits} = 4,7 - 1 = \underline{\underline{3,7 \text{ bits}}}$$



3. Th. de Shannon de codificación de canal.

La tasa de entrada de información al canal $\leq$ Tasa. de trans. info. por el canal.

$$V_F \cdot \bar{L} \cdot \bar{L}_c \leq V_c \rightarrow V_F \cdot \bar{L} \leq V_c \cdot \frac{1}{\bar{L}_c}$$

$$\frac{\text{simb. fuente}}{\text{u. t}} \times \frac{\text{simb. informa.}}{\text{simb. fuente}} \leq \frac{\text{simb. canal}}{\text{u. t}} \times \frac{\text{simb. inf}}{\text{simb. de canal}}$$

Caso de codificadores óptimos:

$$\bar{L}_{\min} = H_S(\vec{p})$$

$$\bar{L}_{\min} = \frac{1}{C}$$

El teorema de Shannon queda:

$$V_F \cdot H_S(\vec{p}) \leq V_C \cdot C$$

Problema 9.

Para transmitir sin error por el canal hay que cumplir el Th. de Shannon de codif. de canal.

$$\sum_{i=1}^N V_{F_i} \cdot \bar{L}_i \leq V_C \cdot \frac{1}{\bar{L}_C}$$

Como en este caso las fuentes son todas iguales se cumple:

$$N \cdot V_F \cdot \bar{L} \leq V_C \cdot \frac{1}{\bar{L}_C}$$

↓
nº de fuentes

Supongo codificadores óptimos para obtener las velocidades de fuente máximas:

$$V_F \leq V_C \cdot \frac{1}{\bar{L}_{C\min}} \cdot \frac{1}{\bar{L}_{\min}} \cdot \frac{1}{N}$$

$$\bar{L}_{\min} = H_S(\vec{p}) = H_2(\vec{p}) = \underline{0,5 \text{ bits}}$$

canal binario
dice transmite 1000 dígitos binarios.

$$\bar{L}_{C\min} = \frac{1}{C} = \frac{1}{0,7} \text{ bits}$$

$$V_{F\max} \leq 1000 \cdot \frac{1}{0,5} \cdot \frac{1}{1/0,7} \cdot \frac{1}{64} \Rightarrow V_{F\max} \leq 21,87 \frac{\text{simb. fuente}}{\text{segundo}}$$

$$V_{F\max} = 21,87 \frac{\text{bits}}{s}$$

(no tiene que ser entero. Es una velocidad no una capacidad)

Problema 1. Dada la matriz de transición:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Se transmiten símbolos con: $P_X = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$

a) $I(X; Y)$

b) Idem si no se transmiten x_1 ni se recibe y_4

a) Calculamos la matriz de probabilidades conjuntas P_{ij} :

P_{ij} : cada una de sus filas se obtiene multiplicando cada fila de Q por la correspondiente probabilidad de los símbolos transmitidos.

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} & \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{28} & \frac{2}{28} & 0 & \frac{3}{28} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow p(x=1) \\ \rightarrow p(x=2) \\ \rightarrow p(x=3) \end{matrix}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $p(y=1) \quad p(y=2) \quad p(y=3) \quad p(y=4)$

$$I(X; Y) = H(X) - H(X/Y) = \underbrace{H(Y) - H(Y/X)}_{\text{utilizamos esta.}}$$

• Calculamos $H(Y)$:

$p(y=y_j)$ se obtiene como la suma de la j -ésima columna de P_{ij} .

$$p(y=1) = \frac{3}{20} + \frac{2}{28} = 0,22$$

$$p(y=2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{28} = 0,4$$

$$p(y=3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = 0,13$$

$$p(y=4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{3}{28} = 0,24$$

$$\begin{aligned}
 \underline{H(Y)} &= H_2(0,22, 0,4, 0,13, 0,24) = \\
 &= 0,22 \cdot \log_2 \frac{1}{0,22} + 0,4 \cdot \log_2 \frac{1}{0,4} + 0,13 \cdot \log_2 \frac{1}{0,13} + 0,24 \cdot \log_2 \frac{1}{0,24} = \\
 &= \boxed{1,89 \text{ bits}} \quad \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0,4805 & 0,5287 & 0,3826 & 0,444 \end{array} \quad \boxed{1,8859}
 \end{aligned}$$

• Calculamos $H(Y/X)$: Aplico regla de la cadena.

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y/X)$$

$$H(Y/X) = \underbrace{H(X, Y)}_{P_{ij}} - \underbrace{H(X)}_{P_X} = 1,35 \text{ bits}$$

$$H_2(x) = H_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$H(X, Y) = \sum_i \sum_j P_{ij} \cdot \log \frac{1}{P_{ij}} = H_2\left(\frac{2}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{3}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{2}{28}, \frac{2}{28}, \frac{3}{28}\right)$$

b)

No se transmite X_1

No se recibe Y_4

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{2}{28} & \frac{2}{28} & 0 & \frac{3}{28} \end{pmatrix}$$

No existen.

No se recibe $Y=4$.

Es necesario reescalar los valores de la nueva matriz de probabilidades conjuntas:

$$P'_{ij} = \frac{P_{ij}}{1 - \text{probabilidad eliminada}} = \frac{1}{1 - 0,657} = \frac{1}{0,343}$$

$$\text{prob. eliminada} = 0 + \frac{2}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{3}{28} = 0,657.$$

$$P'_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{0,343} & 0 & \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{0,343} \\ \frac{2}{28} \cdot \frac{1}{0,343} & \frac{2}{28} \cdot \frac{1}{0,343} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P'_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} & 0 & \frac{7}{48} \\ \frac{5}{24} & \frac{5}{24} & 0 \end{pmatrix}$$

$$I(x'; y') = H(y) - H(y/x')$$

• $H(y)$:

$$p(y'=1) = \frac{7}{16} + \frac{5}{24}$$

⋮

• $H(y'/x')$:

$$H(x', y') = H(x') - H(y'/x')$$

$$H(y'/x) = H(x', y') - H(x)$$

Examen 20 Enero 2011.

Problema 1. Considera una familia de canales con matriz de probabilidad de transición:

$$\begin{pmatrix} 1-p & p-E & E \\ E & p-E & 1-p \end{pmatrix}$$

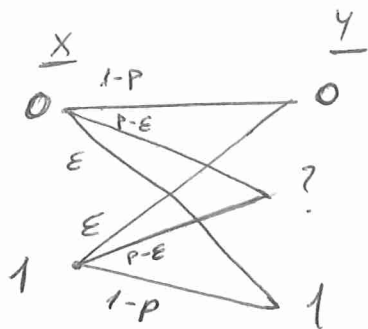
- a) Demuestre que la capacidad se alcanza para entradas equiprobables.
b) En que casos la capacidad es nula.

a) $C = \max \{ I(x; y) \} = \max \{ H(y) - H(y/x) \} \stackrel{①}{=}$

$$H(y/x) = \sum_i \underbrace{H(y/x=x_i)}_{A(\text{Fila } i\text{-ésima de } Q)} \cdot p(x=x_i) = H(1^{\text{a}} \text{ fila}) \cdot p(x=x_1) +$$

$$+ H(1^{\text{a}} \text{ fila}) \cdot p(x=x_2) = \underbrace{H(\text{fila de } Q)}_{\substack{\text{iguales} \\ \Downarrow \text{constante}}} = \text{cte.}$$

② $\max \{ H(y) \} - H(y/x)$



$$P(Y=0) = P(Y=0/X=0) \cdot P(X=0) + P(Y=0/X=1) \cdot P(X=1) =$$

$$= \underline{(1-p) \cdot P(X=0) + \epsilon \cdot P(X=1) = a}$$

$$P(Y=1) = P(Y=1/X=0) \cdot P(X=0) + P(Y=1/X=1) \cdot P(X=1) =$$

$$= \underline{\epsilon \cdot P(X=0) + (1-p) \cdot P(X=1) = b}$$

$$P(Y=?) = P(Y=?/X=0) \cdot P(X=0) + P(Y=?/X=1) \cdot P(X=1) =$$

$$= p - \epsilon \cdot P(X=0) + p - \epsilon \cdot P(X=1) = p - \epsilon \underbrace{(P(X=0) + P(X=1))}_{=1} = p - \epsilon$$

$$\textcircled{*} \max \{ H(Y) \} = \max \left\{ H \left(\overbrace{a, b}^{Y_2}, \overbrace{p-\epsilon}^{Y_1} \right) \right\} =$$

$$= \max \left\{ \underbrace{H(p-\epsilon)}_{cte.} + (p-\epsilon) \cdot \underbrace{H(Y_1)}_{\substack{0 \text{ y solo hay} \\ \text{un valor.}}} + (1-(p-\epsilon)) \cdot H_2(Y_2) \right\}$$

$$H(p-\epsilon) + \max \{ H(Y_2) \} \cdot (1-(p-\epsilon))$$

$$Y_2 = \{ \quad , \quad \}$$

$$P_{Y_2} = \left\{ \frac{a}{1-(p-\epsilon)}, \frac{b}{1-(p-\epsilon)} \right\} = \left\{ \frac{(1-p)P(X=0) + \epsilon \cdot P(X=1)}{1-(p-\epsilon)}, \frac{\epsilon \cdot P(X=0) + (1-p)P(X=1)}{1-(p-\epsilon)} \right\}$$

Se $p(X=0)$ e $p(X=1)$ son iguales, son equiprobables y obtenemos la capacidad.

Y_2 es una variable binaria, entonces el máximo de Y_2 se obtiene si sus valores son equiprobables, esto sucede si $p(X=x_0) = p(X=x_1) \Rightarrow \underline{p(X=x_3) = p(X=x_1) = \frac{1}{2}}$

Por tanto, se obtiene la capacidad cuando las entradas son equiprobables. $\frac{1}{2}$

b)

$$C = \max \{ I(X; Y) \} = H(p-\epsilon) + \max \{ H(y_2) \cdot (1-(p-\epsilon)) - H(y/x) \}$$

$$= H(p-\epsilon) + \log_2 2 \cdot (1-(p-\epsilon)) - H(\text{fila de } Q)$$

$$= H(p-\epsilon) + 1-p+\epsilon - \underbrace{H(1-p, p-\epsilon, \epsilon)}$$

$$\vec{p}_{x_2} = \left\{ \frac{p-\epsilon}{p-\epsilon} \right\} = \{1\}$$

$$H(\overbrace{1-p}^{x_1}, \overbrace{\epsilon}^{x_2}, \overbrace{p-\epsilon}^{x_3}) = H(p-\epsilon) + (p-\epsilon) \cdot \underbrace{H(x_2)}_0 + 1-(p-\epsilon) \cdot H(x_1)$$

$$C = H(p-\epsilon) + 1-(p-\epsilon) - [H(p-\epsilon) + 1-(p-\epsilon) \cdot H(x_1)] =$$

$$= H(p-\epsilon) - H(p-\epsilon) + 1-(p-\epsilon) - [1-(p-\epsilon) \cdot \underbrace{H(x_1)}_{\text{Variable binaria}}] = 0 \Leftrightarrow H(x_1) = 1$$

Para esto $H(x_1) = H\left(\frac{1-p}{1-(p-\epsilon)}, \frac{\epsilon}{1-(p-\epsilon)}\right) \Rightarrow \boxed{\epsilon = 1-p}$

Examen 12 julio 2011.

Problema 1.

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix}$$

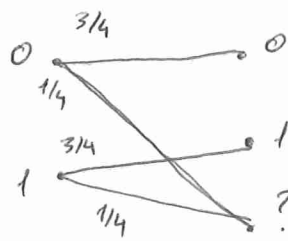
La matriz de transición Q se obtiene dividiendo cada fila de la matriz de probabilidades conjuntas entre la correspondiente probabilidad de entrada

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix} \rightarrow p(x=1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow p(x=2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} & 0 & \frac{1/6}{1/3} \\ 0 & \frac{1/4}{1/3} & \frac{1/12}{1/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{12} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{12} \end{pmatrix}$$

No es simétrico.

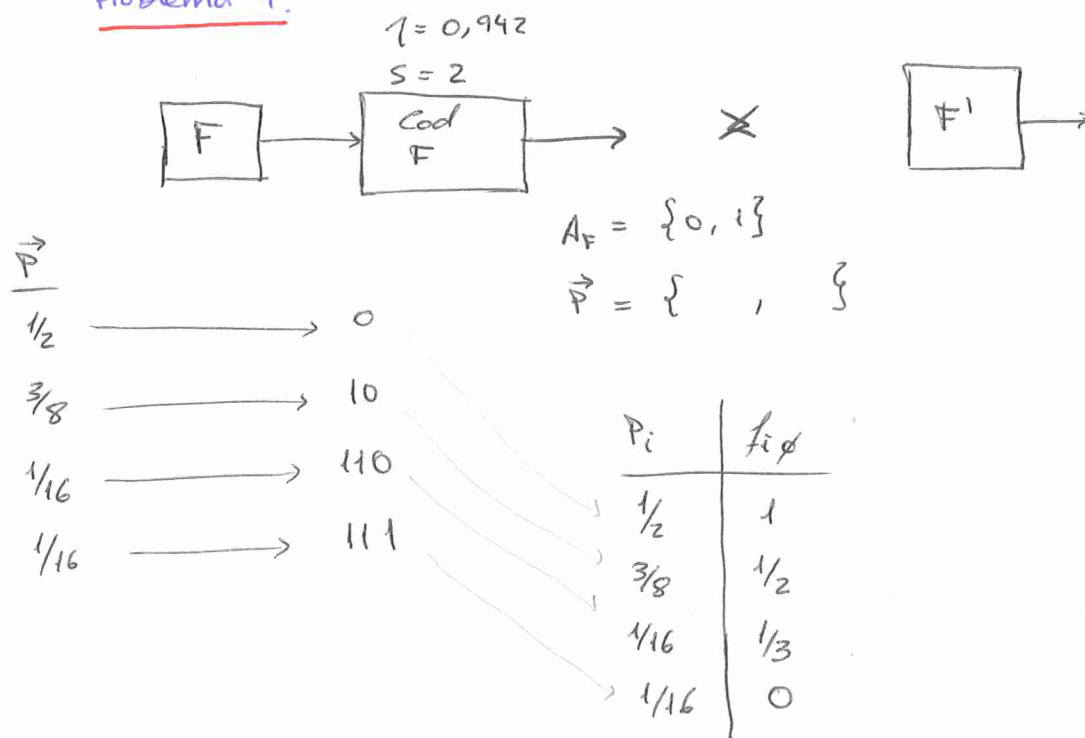


$\Rightarrow$ Canal con borrado (o sale lo mismo que hay a la entrada o algo distinto)

$$\left[C = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ptos de} \\ \text{no fallo}}}{(1-p)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n}^\circ \text{ de entradas}}}{\log M} = \frac{3}{4} \cdot \log_2 2 = \frac{3}{4} \text{ bits} \right]$$

Examen 23 mayo de 2014

Problema 4.



$$\boxed{P(x'=0) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot 0 \approx 0,7}$$

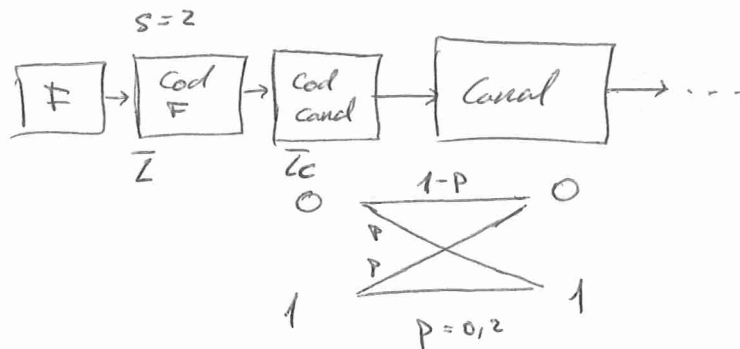
calculamos la función de "0" generados por el codificador fuente.

$$P(x'=0) = \sum_i p_i \cdot f_{i0} \quad \text{siendo} \quad p_i : \text{probabilidad de cada código}$$

$f_{i0} : \text{función de ceros en cada palabra código.}$

Problema 2.

$$P_i = \frac{1}{48}$$



Codificador fuente ideal:

$$\bar{L}_{\min} = H_2(\vec{p}) = \log_2 48 = \text{bits}$$

Codificador de canal:

$$\bar{L}_{c\min} = \frac{1}{C}$$

$$C = \log_2 2 - H_2(p) = 1 - H_2(0,2)$$

Examen Enero 2012

Problema 2.

$$H(x_1) = 1 \text{ bit}$$

1

$$H(x_2) = 0,5 \text{ bits}$$

2

$$H(x_3) = 0,25 \text{ bits}$$

3

$$H(x_4) = 0,25 \text{ bits}$$

4

ideal

$S=2$

Canal

0 — 0

1 — 1

Para que la transmisión sea fiable se debe cumplir:

$$V_F \cdot \bar{L} \leq V_C$$

Para que

$$V_{F\max} \cdot \bar{L}_{\min} \leq \frac{V_C}{4}$$

↓ entropía ↓ porque son 4

$V_i = 1, 2, 3, 4$

$$V_{F1} \cdot H(x_1) \leq \frac{V_C}{4}$$

$$V_{F1} \leq \frac{V_C}{4 \cdot H(x_1)} = \frac{V_C}{4} \quad \frac{\text{simb. fuente}}{\text{segundo}}$$

y tienen que compartir el canal a partes iguales.

$$V_{F1max} = \frac{V_c}{4}$$

$$V_{F2max} = \frac{V_c}{4 \cdot H_2(x_2)} = \frac{2 V_c}{4}$$

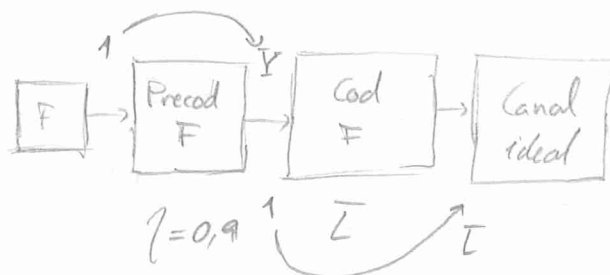
$$V_{F3max} = \frac{V_c}{4 \cdot H_2(x_3)} = V_c \text{ bps}$$

$$V_{F4max} = \frac{V_c}{4 \cdot H(x_4)} = 2 V_c \text{ bps}$$

Problema 3

$$S = 2$$

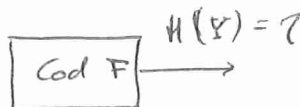
$$\eta = 0,9$$



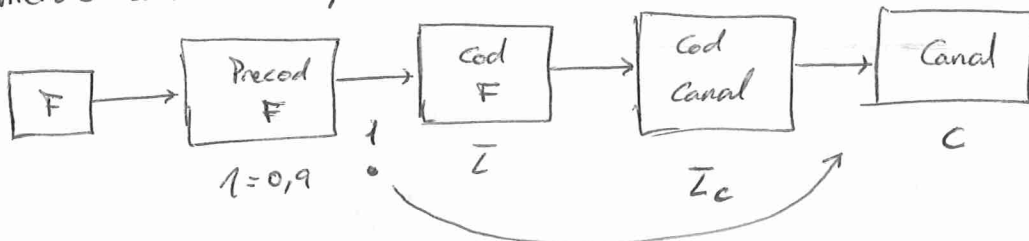
$$\bar{L} = \frac{\text{simb. canal}}{\text{simb. precod.}}$$

$$\bar{L} = \bar{L}_{min} = H(Y) = \eta = 0,9 \quad \frac{\text{simb. de canal}}{\text{simb. precodificado}}$$

Nota: La entropía a la salida de un codificador de fuente es su eficiencia.



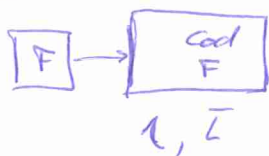
Suponiendo canal de capacidad c :



$$\frac{\text{simb. de informa}}{\text{simb. precodificado}} \times \frac{\text{simb. de canal}}{\text{simb. de informa}} = \eta \cdot \frac{1}{c}$$

$\uparrow$ $\bar{L}_{min}$ $\uparrow$ $\bar{L}_{cmin}$

- Codificador de fuente.



- Códigos compactos.

$$H_s(p) \leq \bar{L} < H_s(\vec{p}) + 1/m \rightarrow \text{orden de la extensión de fuente.}$$

$$\eta = \frac{H_s(p)}{\bar{L}}$$

- Códigos óptimos:

$$\eta = 1 \Leftrightarrow \bar{L}_{\min} = H_s(\vec{p})$$

Cálculo de $\bar{L}$ de códigos compactos:

$$1) \text{ si } \log_s \frac{1}{p_i} \equiv \text{entero } \forall i \Rightarrow \bar{L} = \bar{L}_{\min} = H_s(\vec{p})$$

$$2) p_i = \frac{1}{n} \forall i \Rightarrow l_i \begin{matrix} \nearrow j \\ \searrow j+1 \end{matrix}$$

$$s^j < n^{\circ} \text{ de p.c.} < s^{j+1}$$

$$n_j + s^{j+1} - s \cdot n_j \geq n^{\circ} \text{ de p.c.}$$

$$p.c. \left\{ \begin{matrix} \boxed{} \\ \end{matrix} \right\} n_j$$

3) Huffman.

Ejemplo: Dada una fuente ternaria sin memoria con

$\vec{P} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$ construye un código cuaternario de eficiencia mayor que $\frac{3}{4}$. Cuantifique la eficiencia.

$$\eta = \frac{H_4(\vec{P})}{\bar{L}}$$

Calculamos la $\bar{L}$ del código compacto. No es óptimo. No existe un código óptimo para la fuente puesto que $\log_4 \frac{1}{P_i}$ no es entero $\forall i$

$$\left(\log_4 \frac{1}{1/2} = \log_4 2 = 0,5 \text{ no es entero} \right)$$

Aplicamos Huffman:

	$\vec{P}$
0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}$

$$\bar{L} = 1 \frac{\text{símbolo cuaternario}}{\text{símbolo fuente}}$$

$$\boxed{\eta} = \frac{H_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)}{1} = \frac{1}{2} \cdot \log_4 2 + \left(\frac{1}{4} \cdot \log_4 4\right) \cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

Esta codificación no nos sirve. Tenemos que mejorar la eficiencia.

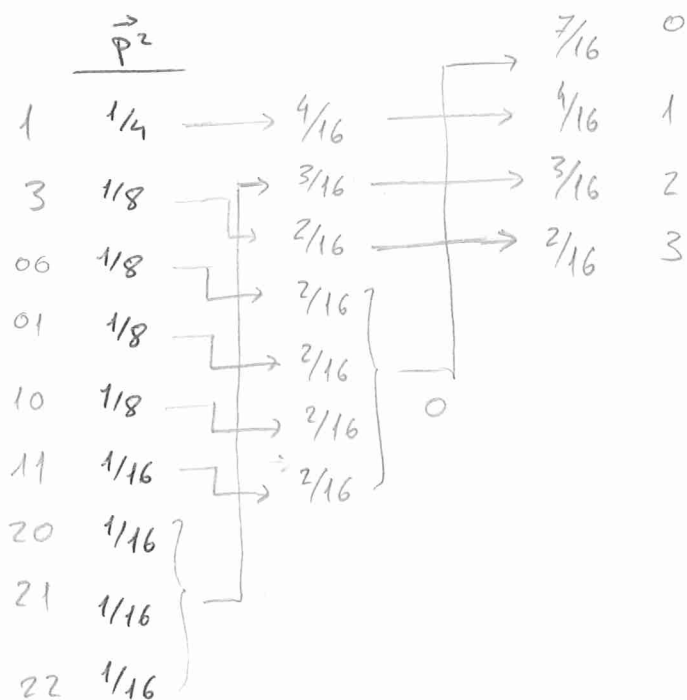
Para mejorar la eficiencia con extensión de fuente:

Aplicamos extensión de fuente de orden 2: (codificador los símbolos fuente de 2 en 2)

$$A_F = \{a, b, c\} \quad A_F^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$$

$$\vec{P} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\} \quad \vec{P}^2 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$\vec{P}^2 = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16} \right\}$$



$$s' = z + (n-z) \bmod (s-1) = z + (9-2) \bmod (4-1) = 2+1=3$$

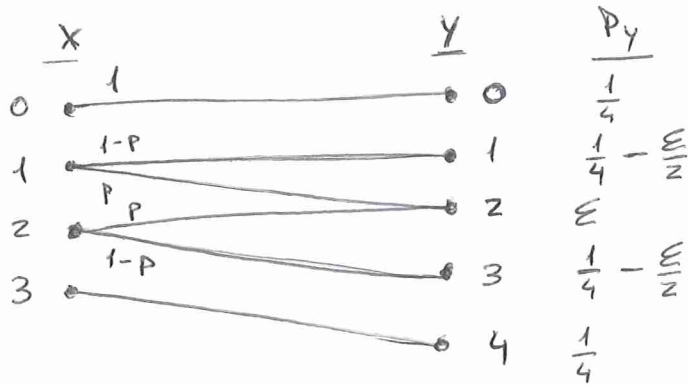
$$\bar{L}^2 = \sum_i l_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + \left(2 \cdot \frac{1}{8}\right) \cdot 3 + \left(2 \cdot \frac{1}{16}\right) \cdot 4 = \frac{13}{8} \quad \frac{4 \text{ cuaternarios}}{2 \text{ simb. fuente}}$$

$$\bar{L} = \frac{\bar{L}^2}{2} = \frac{13}{16} \quad \frac{4 \text{ cuaternarios}}{\text{simbolos fuente}}$$

$$\boxed{\eta} = \frac{H_4(\vec{p})}{\bar{L}} = \frac{3/4}{13/16} = \boxed{0,92}$$

Problema 1.

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{matrix} \text{entradas} & \rightarrow & \begin{matrix} 7 \times 5 \\ \uparrow \\ \text{salidas} \end{matrix} \end{matrix}$



Cálculo de $H(Y)$:

$$H_2\left(\underbrace{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}_{Y_1}, \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{2}, \epsilon}_{Y_2}\right) = H_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} H_2(Y_1) + \frac{1}{2} H_2(Y_2) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot H_2(Y_2) =$$

(K)

$$H_2(Y_1) = H\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ bit}$$

$$Y_1 = \left\{ \frac{1/4}{1/2}, \frac{1/4}{1/2} \right\}$$

(*) $H_2(Y_2) = H_2\left(\underbrace{\frac{1/4 - \epsilon/2}{1/2}, \frac{1/4 - \epsilon/2}{1/2}}_{Y_4}, \underbrace{\frac{\epsilon}{1/2}}_{Y_3}\right) = H_2(2\epsilon) + 2\epsilon \cdot H(Y_3) +$

$\frac{1/4}{1/2} \rightarrow$ ponderado de antes

$$= H_2(2\epsilon) + 2\epsilon \cdot H_2(Y_3) + (1-2\epsilon) \cdot H_2(Y_4) = H_2(2\epsilon) + (1-2\epsilon) \cdot 1 =$$

$$= H_2(2\epsilon) + 1 - 2\epsilon$$

$$H_2(Y) = 1,5 + \frac{1}{2} (H_2(2E) + 1 - 2E)$$

- Calculo $H(Y/X)$:

$$H(Y/X) = \sum_i H(Y/X=x_i) \cdot P(X=x_i) \quad \textcircled{A}$$

$$P(X=0) = \frac{P(Y=0)}{P(Y=0/X=0)} = \frac{1/4}{1} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3) = \frac{P(Y=4)}{P(Y=4/X=3)} = \frac{1}{4}$$

$P(Y=1) = P(Y=2)$ por el comportamiento del canal y el valor de las probabilidades de Y son equiprobables.

$$\begin{aligned} \textcircled{B} &= H_2(1^\circ \text{ fila de } 0) \cdot \frac{1}{4} + H_2(2^\circ \text{ fila } 0) \cdot \frac{1}{4} + H_2(3^\circ \text{ fila}) \cdot \frac{1}{4} + H_2(4^\circ \text{ fila}) \cdot \frac{1}{4} = \\ &\quad \textcircled{0} \text{ (duda 0) entra 1, sale 1.} \\ &= H(p) \cdot \frac{1}{4} + H(p) \cdot \frac{1}{4} = \frac{H_2(p)}{2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow I(X; Y) = H(Y) - H(Y/X) = 1,5 + \frac{1}{2} (H_2(2E) + 1 - 2E) - \frac{H_2(p)}{2}$$

$$P(Y=2) = E = P(Y=2/X=1) \cdot P(X=1) + P(Y=2/X=2) \cdot P(X=2) =$$

$$= P \cdot \frac{1}{4} + P \cdot \frac{1}{4} = \frac{P}{2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{P}{2}}$$

$$\rightarrow I(X; Y) = 1,5 + \frac{1}{2} \left(H\left(2 \cdot \frac{P}{2}\right) + 1 - 2 \frac{P}{2} \right) - \frac{H(p)}{2} =$$

$$= 1,5 + \frac{1}{2} (H(p) + 1 - P) - \frac{H(p)}{2} =$$

$$= 1,5 + \frac{H(p)}{2} + \frac{1}{2} - \frac{P}{2} - \frac{H(p)}{2}$$

$$I(X; Y) = 1,5 + \frac{1}{2} - \frac{P}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{2}}$$

Th. de Shannon de codificación de canal.

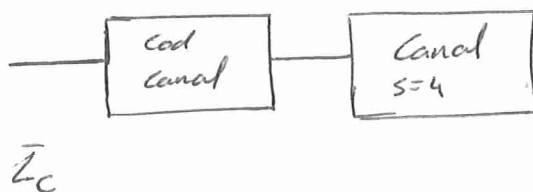
$$V_F \cdot \bar{L} \cdot \bar{L}_C \leq V_C$$

$$\boxed{V_F \cdot \bar{L} \leq V_C \cdot \frac{1}{\bar{L}_C}}$$

Cod. optimos $\rightarrow$ $\boxed{V_F \cdot H_2(\vec{p}) \leq V_C \cdot C}$

Problema 11

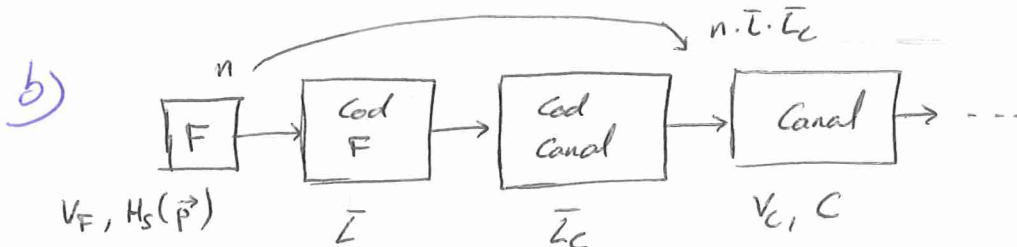
a)



$$\bar{L}_C = \frac{1}{C} = 3 \text{ u. cuaternarias}$$

$$C = \frac{1}{3} \text{ \#. Cuaternarias}$$

$$\boxed{C = \frac{1/3}{\lg_4 2} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3} \text{ bits}}$$



$$t_n = \frac{n \cdot \bar{L} \cdot \bar{L}_C}{V_C}$$

Para que sea mínimo

$$t_{n \min} = \frac{n \cdot \bar{L}_{\min} \cdot \bar{L}_{\min}}{V_C}$$

$$t_{n \min} = \frac{n \cdot H_4(\vec{p}) \cdot 1/C}{V_C}$$

$$H_4(\vec{p}) = \log_4 2 = 0,5 \text{ u. cuaternarias}$$

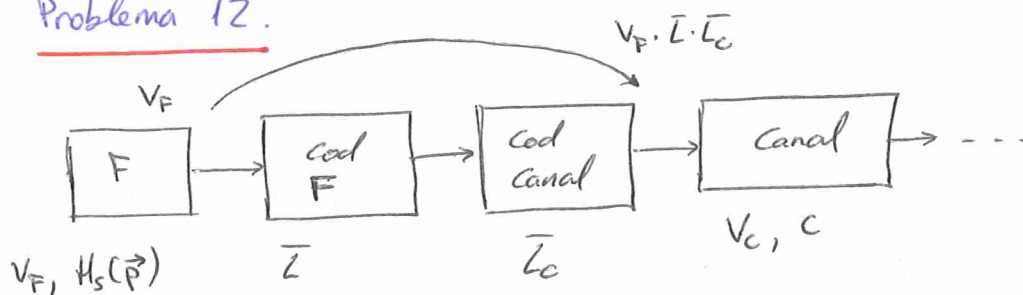
$$C = \frac{1}{3} \text{ u. cuaternarias (apart. a) (unidades del canal)}$$

$$t_{n \min} = \frac{n \cdot 0,5 \cdot 3}{1000} \text{ segundo}$$

5. 370 000

2 370 000

Problema 12.



Tasa de entrada de información al canal $\leq$ tasa de transmisión de inf. por el canal.

$$N \cdot V_F \cdot \bar{L} \cdot \bar{L}_c \leq V_c$$

cod. ideal:

$$N \cdot V_F \cdot H_3(\vec{p}) \cdot \frac{1}{C} \leq V_c$$

$$N \leq \frac{V_c \cdot C}{V_F \cdot H_3(\vec{p})} = \frac{1000 \cdot \frac{1}{2}}{100 \cdot H_3(0,1)} = \frac{5}{H_3(0,1)} = \begin{matrix} \text{si fuese (no es)} \\ 7,78 \end{matrix}$$

$$C = \frac{1}{2} C_{\text{ideal}} = \frac{1}{2} \text{ u. ternarias}$$

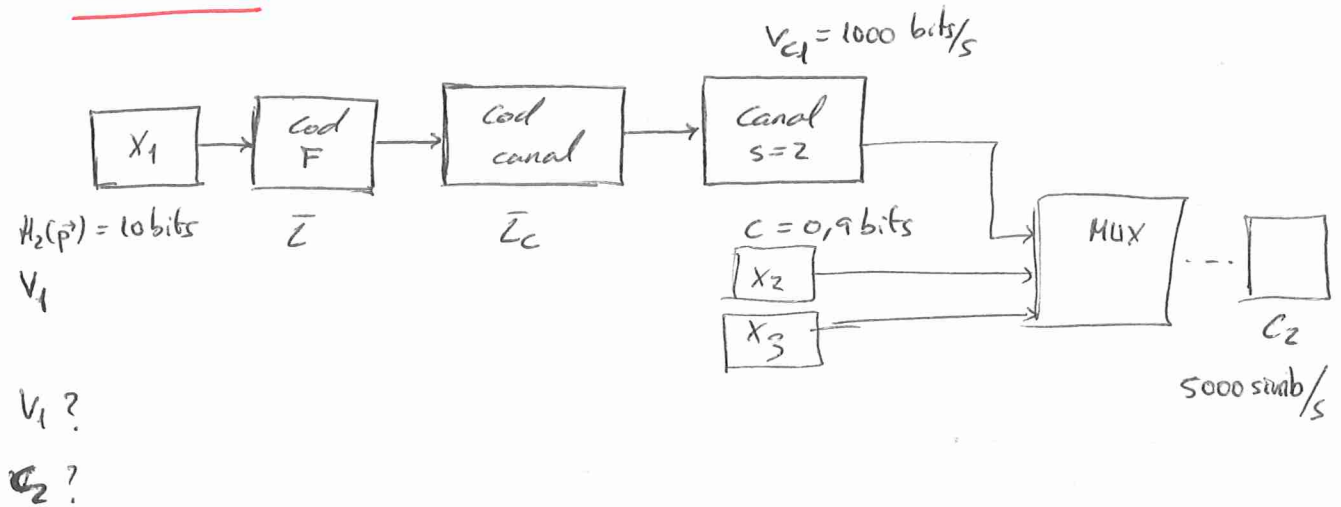
1 u. ternaria

$$H_3(\vec{p}) = H_3(0,1) \text{ u. ternarias}$$

$$N_{\max} = \left\lfloor \frac{5}{H_3(0,1)} \right\rfloor$$

Examen 21 de octubre de 2013

Problema 5



Para que la transmisión sea fiable se debe cumplir el th. de Shannon de codificación de canal:

En el 1º canal:

$$V_1 \cdot \bar{L}_1 \leq V_{c1} \cdot \frac{1}{\bar{L}_{c1}}$$

$$V_1 \cdot H_2(\bar{p}) \leq 1000 C_1 \rightarrow \boxed{V_1 \leq \frac{1000 \cdot 0,9}{10} = 90 \frac{\text{simbs}}{s}}$$

Se debe cumplir el th. de Shannon en el 2º canal.

$$\boxed{V_1 \cdot H(X_1) + V_2 \cdot H(X_2) + V_3 \cdot H(X_3) \leq V_{c2} \cdot C_2}$$

$$90 \cdot 10 + 50 \cdot 10 + 25 \cdot 10 \leq 5000 C_2$$

$$C_2 \geq$$

Problema 6.

$$H(x_1) = 1 \text{ bit/simb}$$

$$X_1 \quad V_1 = 1000 \frac{\text{simb}}{\text{s}}$$

M
L
X

$$H(x_2) = 2 \text{ bit}$$

$$X_2 \quad V_2 = 100 \frac{\text{simb}}{\text{s}}$$

$$H(x_3) = 3 \text{ bit}$$

$$X_3 \quad V_3 = 50 \frac{\text{simb}}{\text{s}}$$

Canal
ternario

$$C = \frac{1}{2} C_{\text{ideal}}$$

$$V_{\text{min}}?$$

Th. Shannon:

$$V_1 \cdot H(x_1) + V_2 \cdot H(x_2) + V_3 \cdot H(x_3) \leq V_c \cdot C$$

→ Tanto la Capacidad como las entropías tienen que estar en unidades ternarias.

Paso las entropías a u. ternarias:

$$H(x_1) = \frac{1}{\log_2 3} = 0,633$$

$$H(x_2) = \frac{2}{\log_2 3} = 1,266$$

$$H(x_3) = \frac{3}{\log_2 3} = 1,9$$

$$V_c \geq \frac{1000 \cdot \frac{1}{\log_2 3} + 100 \cdot \frac{2}{\log_2 3} + 50 \cdot \frac{3}{\log_2 3}}{\frac{1}{2}}$$

$$V_{\text{min}} = \frac{\text{simb}}{\text{s}}$$

b)

$$F_{uso} = \frac{\text{tasa de entrada}}{\text{tasa de trans del canal}}$$

$$F_1 = \frac{V_1 \cdot H(x_1)}{V_c \cdot C} =$$

$$F_2 = \frac{V_2 \cdot H(x_2)}{V_c \cdot C} =$$

$$F_3 = \frac{V_3 \cdot H(x_3)}{V_c \cdot C} =$$

Comunicación de Datos

21 de octubre de 2013

Nombre: _____ D.N.I.: _____

1. (2 puntos) De un grupo de estudiantes, el 25 % no están convenientemente preparados para la universidad. Sin embargo, el 25 % de estos son aceptados tras una prueba de selección, que es superada por el 50 % de los estudiantes.

a) Al oír el resultado de la prueba, ¿cuánta información recibe un estudiante que está suficientemente preparado?

b) Ídem si la selección se decide tirando una moneda al aire.

a) Un estudiante preparado supera la prueba de selección con una probabilidad p tal que

$$\frac{3}{4}p + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

esto es, $p = 7/12$, de modo que obtiene una información igual a $H(7/12) \approx 0,98$ bits.

b) Si la selección es completamente aleatoria hay igual probabilidad de ser aceptado o rechazado, con independencia de la preparación. Así entonces, la información recibida es $H(1/2) = 1$ bit.

2. (1 punto). ¿Tienen redundancia los mensajes de una fuente decimal de vector de probabilidades

$$\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/16, \dots, 1/16)?$$

¿Puede cuantificarla? Razónelo.

En la medida en que todo mensaje de una fuente discreta es una representación simbólica, una fuente dada es un codificador específico. En este caso el alfabeto es decimal y el código es una asignación uno a uno. Como las probabilidades no son potencias decimales, esta fuente (o código) posee redundancia, de valor igual a la diferencia entre la longitud $L = 1$ y la entropía decimal $H_{10}(X)$, que es la mínima longitud posible.

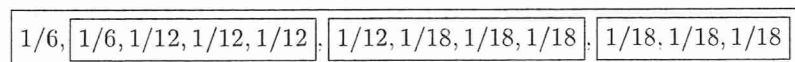
$$L - H_{10}(X) \approx 0,097.$$

3. (2 puntos) Calcule la eficiencia de los códigos compactos cuaternarios de los conjuntos de símbolos con probabilidades dadas por los siguientes vectores:

a) $\mathbf{p} = (1/6, 1/6, 1/12, 1/12, 1/12, 1/12, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18)$

b) $p_i = 1/512$ para todo i .

a) La codificación Huffman de estos símbolos —una de ellas— tiene la estructura



Por tanto, el código compacto tiene todas sus palabras de longitud 2, excepto la correspondiente a uno de los símbolos con probabilidad $1/6$, que es de longitud 1. La longitud del código es $L = 2 - 1/6 = 11/6$ y la eficiencia

$$\eta = \frac{H_4(X)}{L} \approx 94\%.$$

b) Un código compacto cuaternario para esta fuente uniforme consta de 170 palabras de longitud 4 y 342 palabras de longitud 5. Tiene una longitud de $L \approx 4,66$ y su eficiencia es $\eta = \log_4 512/L \approx 96,4\%$.

4. (1,5 puntos) Obtenga la capacidad del canal con matriz de probabilidades de transición

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n & \varepsilon & \varepsilon \\ & & & & \varepsilon & \varepsilon & p_n & \dots & p_2 & p_1 \end{bmatrix}.$$

Si se calcula $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$ tenemos que

$$H(X|Y) = 2\varepsilon H(X)$$

ya que sólo hay incertidumbre acerca del símbolo transmitido para dos de los posibles símbolos de salida del canal. En consecuencia $I(X; Y) = (1 - 2\varepsilon)H(X)$ es máxima con entradas equiprobables y la capacidad del canal es $C = 1 - 2\varepsilon$ bits/símbolo.

Trabajando de una manera más convencional, si calculamos $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X)$ tenemos que

$$H(Y|X) \stackrel{(1)}{=} H(p_1, p_2, \dots, \varepsilon, \varepsilon) \stackrel{(2)}{=} H(2\varepsilon) + 2\varepsilon \log 2 + (1 - 2\varepsilon)H\left(\frac{p_1, p_2, \dots, p_n}{1 - 2\varepsilon}\right)$$

donde (1) es por tener Q filas con los mismos elementos y (2) resulta de aplicar la propiedad de partición; y

$$\begin{aligned} H(Y) &= H(\alpha p_1, \dots, \alpha p_n, \varepsilon, \varepsilon, \bar{\alpha} p_1, \dots, \bar{\alpha} p_n) \stackrel{(3)}{=} H(2\varepsilon) + 2\varepsilon \log 2 + (1 - 2\varepsilon)H\left(\frac{\alpha p_1, \dots, \alpha p_n, \bar{\alpha} p_1, \bar{\alpha} p_n}{1 - 2\varepsilon}\right) \\ &\stackrel{(4)}{=} H(2\varepsilon) + 2\varepsilon \log 2 + (1 - 2\varepsilon)(H(\alpha) + H\left(\frac{p_1, \dots, p_n}{1 - 2\varepsilon}\right)) \end{aligned}$$

donde (3) es por la aplicación de la propiedad de partición y (4) por una segunda aplicación de la misma propiedad. Cancelando términos comunes se llega a $I(X; Y) = (1 - 2\varepsilon)H(\alpha)$, que es máxima si $\alpha = 1/2$, es decir, con entradas equiprobables. La capacidad es $C = 1 - 2\varepsilon$ bits.

5. (1,5 puntos) En cierto sistema de comunicaciones, los mensajes de una fuente discreta sin memoria X_1 de entropía 10 bits por símbolo y tasa de transmisión v_1 se transmiten a través de un canal binario de capacidad 0,9 bits/símbolo y régimen 1000 símbolos/s. La salida de este canal se multiplexa con otras dos fuentes, X_2 y X_3 , de entropías $H(X_2) = H(X_3) = 10$ bits por símbolo y velocidades $v_2 = 50$ y $v_3 = 25$ símbolos/s, y los mensajes multiplexados se transmiten por otro canal de capacidad C_2 cuya tasa de transmisión es de 5000 símbolos/s. Si el receptor ha de recuperar fidedignamente los mensajes de las tres fuentes, acote los valores de v_1 y C_2 .

La transmisión es fiable si lo es por los dos canales. Para que lo sea por el primero debe cumplirse que

$$v_1 H(X_1) < v_{c1} C_1 \Rightarrow v_1 < \frac{v_{c1} C_1}{H(X_1)} = 90 \text{ símbolos/s;} \quad (1)$$

para que lo sea por el segundo, sobre el que se multiplexan las fuentes X_2 y X_3 más la salida del primer canal, es necesario y suficiente que

$$v_1 H(X_1) + v_2 H(X_2) + v_3 H(X_3) < v_{c2} C_2 \Rightarrow C_2 > \frac{10v_1 + 750}{5000} \text{ bits/símbolo.} \quad (2)$$

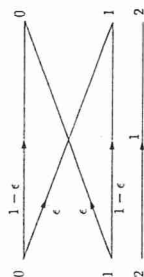
Las condiciones (1) y (2) delimitan las combinaciones (v_1, C_2) factibles para la transmisión fiable. Gráficamente

6. (2 puntos) Tres fuentes discretas sin memoria independientes de entropías 1 bit por símbolo, 2 bits por símbolo y 3 bits por símbolo, respectivamente, comparten un canal ternario de capacidad la mitad del ideal. Si la primera emite 1000 símbolos por segundo, la segunda 100 símbolos por segundo y la tercera 50 símbolos por segundo:

- ¿Cuál es la tasa mínima de transmisión del canal que hace posible enviar sin error los mensajes de las tres fuentes?
- Con esa tasa mínima, ¿qué fracción de su régimen de transmisión dedica el canal a cada fuente?

y determine $q(i)$, la probabilidad de usar el canal i -ésimo. Interprete C como el promedio de las capacidades de los canales individuales más la información aportada por la selección de un canal.

b) Use el resultado anterior para determinar la capacidad del canal de la figura.



Problema 6. Considere un canal óptico síncrono por el que se envían señales binarias (luz, no luz). A la salida de dicho canal, un fotodetector sólo se excita cuando recibe luz, fallando con una probabilidad $p = 0.1$. Con el objeto de mejorar la transmisión, se considera el uso de dos canales de estos de las siguientes formas:

a) Se envía la misma señal por los dos canales.

b) Se envían señales complementarias.

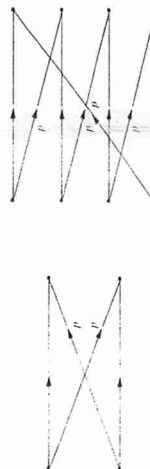
¿Cuál es la mejor alternativa?

Problema 7. Dada una fuente cuyo alfabeto tiene 61 símbolos equiprobables, los cuales se transmiten a través de un canal binario síncrono sin memoria con probabilidad de error $p = 0.2$.

a) ¿Cuál es el número mínimo de caracteres binarios necesarios para transmitir un símbolo de la fuente con un porcentaje de errores tan pequeño como se quiera?

b) Si se transmite por el canal a razón de 10 caracteres binarios por segundo, ¿cuál es la velocidad de transmisión de información?

Problema 8. Suponga una fuente binaria sin memoria que genera ambos símbolos equiprobablemente. Suponga que se considera la utilización de dos canales alternativos para la transmisión de los mensajes de la fuente.

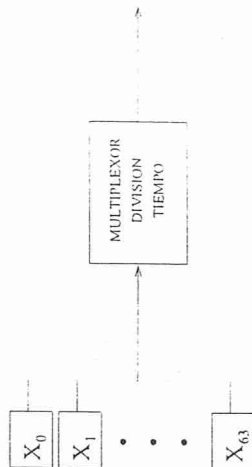


a) ¿Cuál es más conveniente, si ambos canales transmiten un símbolo por unidad de tiempo y el coste de transmisión de todos los símbolos es siempre el mismo? ¿Por qué?

b) ¿Existe alguna combinación de los parámetros régimen de transmisión y coste por símbolo del canal 2 para la que ambas alternativas sean equivalentes?

Problema 9. X_i ($i = 0, 1, \dots, 63$) es una fuente binaria de entropía 0.5 bits/símbolo, y el multiplexor coge en el j -ésimo intervalo ($j = 0, 1, 2, \dots$) el símbolo de la fuente X_i ($i = j \bmod 64$).

Si se quieren enviar los mensajes codificados por dichas fuentes sobre un canal de capacidad 0.7 bits/símbolo y capaz de transmitir 1000 dígitos binarios por segundo, ¿cuál es la máxima velocidad a la que se pueden transmitir símbolos de cada una de las fuentes dadas sin error?



Problema 10. Suponga una fuente binaria sin memoria de entropía máxima. Suponga que se considera la utilización simultánea de dos canales para la transmisión de los mensajes de la fuente en el menor tiempo posible. Sea uno un canal binario de capacidad 0.8 bits, y el otro un canal ternario de capacidad 0.8 unidades de información ternarias. Si cada uno de los canales tiene un régimen de transmisión de 1000 símbolos por segundo, ¿cuál es el tiempo mínimo necesario para transmitir de manera fiable un mensaje de la fuente de longitud n arbitrariamente grande?

Problema 11.

a) ¿Cuál sería la capacidad en bits de un canal cuaternario cuyo codificador ideal para transmisión fiable tuviese una longitud de código 3?

b) ¿Cuál sería, en media, el tiempo mínimo necesario para transmitir una secuencia aleatoria de n símbolos binarios equiprobables si el régimen de transmisión del canal es de 1000 símbolos por segundo?

Problema 12. Considere una clase de fuentes que generan símbolos de un alfabeto binario (representamos tales símbolos por 0 y 1) a razón de cien por unidad de tiempo, de forma que una secuencia típica de símbolos de dicha fuente contiene un 10% de ceros. Suponga que tales secuencias han de transmitirse a través de un canal ternario de capacidad unitaria de uno ideal que transmite mil símbolos por unidad de tiempo. ¿Cuántas fuentes de esa clase pueden multiplexarse sobre dicho canal?

Problema 3 (2 puntos). Considere una máquina de escribir de 26 teclas.

- a) Si pulsar una tecla da como resultado la impresión de la letra asociada, ¿cuál es la capacidad en bits?
- b) Ahora suponga que pulsando una tecla se imprime la letra correspondiente o la siguiente (equiprobablemente). Así, $A \rightarrow A$ o B , ..., $Z \rightarrow Z$ o A . ¿Cuál es la capacidad?

Solución.

- a) Si no hay error entre la tecla pulsada y la impresa, la capacidad es igual a la entropía de la letra elegida, $\log_2 26$.
- b) Si cada pulsación puede dar lugar, equiprobablemente, a una de dos letras, la idéntica y la siguiente, entonces la situación corresponde a la de un canal con matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

que es *simétrico*. En consecuencia, la capacidad del canal es

$$C = \log_2 26 - H_2(1/2) = \log_2 26 - 1 \text{ bits.}$$

aik6

CONSULTORIA Y FORMACIÓN

C/Torrecedeira, 90 bajo-2 Telf: 886 11 24 84

CIF: B36878817



Problema 1

- Determine la eficiencia de un código cuaternario compacto de una fuente que genera seis símbolos equiprobablemente.
- ¿Cuál es el número máximo de fuentes como la anterior que se pueden multiplexar sobre un canal ideal cuaternario con un régimen de transmisión 10 veces superior al de cada una de las fuentes?

Problema 2. Considere una fuente que genera, a intervalos regulares, símbolos de un alfabeto binario (representemos tales símbolos por 0 y 1), de forma que una secuencia típica de símbolos de dicha fuente contiene un 60 % de ceros. Suponga que tales secuencias han de transmitirse a través de un canal ideal ternario que transmite un símbolo por unidad de tiempo. ¿Cuál es el tiempo mínimo necesario para enviar sin error una secuencia de n símbolos de la fuente (n suficientemente grande)?

Problema 3. Considere una clase de fuentes que generan símbolos de un alfabeto binario (representemos tales símbolos por 0 y 1) a razón de **cien** por unidad de tiempo, de forma que una secuencia típica de símbolos de dicha fuente contiene un 50 % de ceros. Suponga que tales secuencias han de transmitirse a través de un canal ideal ternario que transmite **mil** símbolos por unidad de tiempo. ¿Cuántas fuentes de esa clase pueden multiplexarse sobre dicho canal?

Problema 4. Dada una fuente cuyo vector de probabilidades es $\vec{p} = (1/8, 1/2, 1/8, 1/4)$, se pide:

- Calcule la longitud mínima de un código binario.
- Ídem de uno ternario.
- Obtenga un código ternario compacto con longitud de bloque unitaria y calcule su eficiencia.

Problema 5. Dada una fuente cuaternaria sin memoria cuya distribución de probabilidades es $\{0,5, 0,25, 0,125, 0,125\}$, construya —con símbolos de un alfabeto también cuaternario— un código unívocamente decodificable cuya eficiencia sea de al menos el 90 %.

Problema 6. Una fuente ternaria de información genera símbolos con probabilidades 0,4, 0,3 y 0,3.

- Calcule la cantidad de información por símbolo.
- Calcule las probabilidades de todos los posibles mensajes de dos símbolos.
- Calcule la cantidad de información por mensaje de dos símbolos.
- Calcule la redundancia de un código binario compacto para los mensajes de dos símbolos.
- Calcule la tasa de transmisión (bits por segundo) para el código del apartado anterior si la duración de cada símbolo de la fuente es, respectivamente, de 1, 2 y 3 ms.

Problema 7. Aunque las longitudes de las palabras de un código de longitud variable compacto son funciones complicadas de las probabilidades de los mensajes $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, puede decirse que los símbolos menos probables se codifican mediante palabras más largas. Suponga que las probabilidades de los mensajes se dan en en orden decreciente $p_1 > p_2 \geq \dots \geq p_m$.

- Demuestre que, para cualquier código Huffman binario, si $p_1 > 2/5$, entonces al símbolo más probable le corresponde una palabra de longitud 1.



Examen de Fundamentos de Telemática

5 de septiembre de 2007

Nombre: _____

D.N.I.: _____

Problema 1 (2 puntos). Considere un año natural de 365 días y elija uno de ellos al azar (por ejemplo, 13 de marzo).

- ¿Cuánta información proporciona el mes?
- ¿Cuánta información proporcionan el mes y el día del mes?
- ¿Cuánta información proporciona el día del mes si el mes es conocido?

Solución. Sea M la variable aleatoria que señala el mes de la fecha escogida y sea D la que indica el día del mes.

a) Se pide $H(M)$, que vale

$$\begin{aligned} H(M) &= H\left(\frac{31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30, 31}{365}\right) \\ &= \frac{28}{365} \log \frac{365}{28} + 4 \times \frac{30}{365} \log \frac{365}{30} + 7 \times \frac{31}{365} \log \frac{365}{31} \\ &= \log \frac{365}{365} - \frac{28}{365} \log 28 - 4 \times \frac{30}{365} \log 30 - 7 \times \frac{31}{365} \log 31 \approx 3,58 \text{ bits.} \end{aligned}$$

b) $H(M, D) = \log 365 \approx 8,51$ bits.

c) $H(D|M) = H(M, D) - H(M)$ por la regla de la cadena. Por tanto,

$$H(D|M) = \frac{28}{365} \log 28 + 4 \times \frac{30}{365} \log 30 + 7 \times \frac{31}{365} \log 31 \approx 4,92 \text{ bits.}$$

Problema 2 (2 puntos).

- Considere una fuente que emite 16 símbolos equiprobablemente. Para transmitir sin error los mensajes de dicha fuente, se emplea un canal ideal binario con régimen de transmisión 8 veces mayor que el de la fuente, y un codificador compacto que codifica los símbolos de la fuente uno a uno. ¿Qué fracción de tiempo se usará el canal?
- ¿Idem si se emplea un canal ideal "octario" con régimen de transmisión dos veces mayor que el de la fuente.

Solución

a) Como la fuente genera 16 símbolos equiprobables, la codificación compacta en binario de tales símbolos uno a uno es óptima, dando lugar a palabras de 4 bits por cada símbolo de fuente. El codificador de fuente emitirá símbolos binarios a tasa $4v_f$ y la fracción de tiempo que el canal está en uso será

$$\frac{4v_f}{c_r} = \frac{4v_f}{8v_f} = \frac{1}{2}.$$

b) En este caso, la codificación compacta de los símbolos uno a uno no produce un código óptimo, sino un código de 6 palabras de un símbolo "octario" y 10 de dos símbolos "octarios" (hasta aplicar el algoritmo de Huffman). Así pues, la longitud del código es

$$L_f = \frac{1}{16} (1 \times 6 + 2 \times 10) = \frac{13}{8} \text{ símbolos octarios / símbolo de fuente.}$$

Y la fracción de tiempo que se utiliza el canal será

$$\frac{L_f v_f}{c_r} = \frac{(13/8)v_f}{2v_f} = \frac{13}{16}.$$

Examen de Fundamentos de Telemática

15 de junio de 2010

Nombre: _____ D.N.I.: _____

Problema 1 (2 puntos). Sea el canal con matriz de probabilidades de transición

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 3/4 \end{pmatrix}$$

- a) Se transmiten los símbolos con una distribución de probabilidad $(1/2, 1/8, 1/8, 1/4)$. A la recepción de un símbolo, ¿cuánta información falta, en media, para saber con seguridad el símbolo transmitido?

- b) Calcule la información transmitida por símbolo si se sabe que ni se transmite x_1 ni se recibe y_4 .

- a) La información que falta para poder determinar sin error el símbolos transmitido es

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y).$$

Para calcularla, partiremos de la matriz de probabilidades conjuntas de (X, Y)

$$\text{diag}(1/2, 1/8, 1/8, 1/4) \cdot \begin{pmatrix} 3/4 & 1/8 & 0 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 0 & 1/8 & 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 & 0 & 1/32 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/32 & 0 & 1/8 & 3/16 \end{pmatrix} = R.$$

Así, tenemos que

$$H(X, Y) = \frac{1}{32} (-12 \log 12 - 6 \log 6 - 4 \cdot 2 \log 2 - 6 \log 1) + \log 32 = 4 - \frac{9}{16} \log_2 3.$$

y que

$$H(Y) = H(14/32, 5/32, 9/32, 9/32) = \frac{1}{32} (-14 \log 14 - 10 \log 5 - 9 \log 9) + \log 32 = 5 - \frac{7}{16} - \frac{1}{32} (14 \log_2 7 + 10 \log_2 5 + 18 \log_2 3).$$

Finalmente,

$$H(X|Y) = \frac{9}{16} - \frac{7}{32} \log_2 7 - \frac{5}{16} \log_2 5 \text{ bits.}$$

- b) Si no se transmite x_1 ni se recibe y_4 la matriz de probabilidades conjuntas de (X', Y') será

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(que se obtiene eliminando la primera fila $\rightarrow x_1 \rightarrow$ y la última columna $\rightarrow y_4 \rightarrow$ de R , y renormalizando los valores para que sumen 1). La información transmitida será el valor de $H(X', Y')$, es decir,

$$H(X') + H(Y') - H(X', Y') = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \log_2 3.$$

Observe que, en este caso, $H(X') = H(Y')$.

Problema 2 (1 punto). Dada una fuente simétrica con alfabeto de 243 símbolos:

- a) Calcule la eficiencia de un código compacto binario que codifique los símbolos uno a uno.
b) Calcule la eficiencia de un código compacto ternario que codifique los símbolos uno a uno.

- a) Puesto que $\lceil \log_2 243 \rceil = 8$, un código compacto binario para esta fuente constará únicamente de palabras de longitud 7 y 8 bits. En concreto, de $256 - 243 = 13$ palabras de longitud 7 y $243 - 13 = 230$ de longitud 8, de manera que la longitud del código valdrá

$$L = \frac{1}{243} (13 \times 7 + 230 \times 8) = \frac{1931}{243}.$$

Y la eficiencia será

$$\eta = \frac{H_2(X)}{L} = \frac{243}{1931} \log_2 243 \approx 99.7\%.$$

- b) La eficiencia es uno: basta con observar que $243 = 3^5$.

Problema 3 (2 puntos). Se quiere transmitir eficiente y fielmente los mensajes de la fuente anterior por un canal cuaternario de capacidad 1 bit.

- a) ¿Cuál es la longitud del código de fuente? ¿Y la del código de canal?
b) Calcule la fracción de tiempo que se usará el canal si su régimen fuese unitario y el de la fuente, cien veces menor.

- a) Para una transmisión eficiente el código de fuente tendría que tener una longitud $L_f = H_4(X) = \log_4 243$ símbolos cuaternarios por cada símbolo de fuente. Y para una transmisión fiel, el código de canal debería tener una longitud no menor de $L_c = 1/C = 2$ ($C = 1$ en bits es $C = 1/2$ en unidades cuaternarias).

- b) La fracción de tiempo de uso del canal se calcula como

$$\frac{v_f L_f L_c}{v_c}.$$

Poniendo $v_f/v_c = 1/100$, $L_f = \log_4 243$ y $L_c = 2$ resulta

$$\frac{v_f L_f L_c}{v_c} = \frac{\log_4 243}{50} \approx 8\%.$$

Problema 4 (2 puntos). El polinomio $g(x) = (x-1)(x^3+x+1)(x^6+x^4+x^2+x+1)$ engendra un código cíclico [21, 11].

- a) Sabiendo que la longitud máxima de una ráfaga de peso w es $n - \lceil (n-w)/w \rceil$, demuestre que en el código no existen vectores de peso 2.
b) Sepa que tampoco hay vectores de peso impar en el código. ¿Cuál es la salida del decodificador si se recibe el polinomio $x^{17} - x^{16} - x^{14} + x^{12} + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$?

- a) Considérense los errores dobles como ráfagas de error e de peso $w = 2$ y de cierta longitud. Así, la longitud máxima de e será

$$21 - \lceil 21/2 \rceil = 11$$

y cabe distinguir dos casos: 1) si e fuese una ráfaga de longitud 10 o menor, entonces sería detectable, pues el grado de $g(x)$ es 10; 2) si e fuese una ráfaga de longitud 11 tendría que ser $x^{10} + 1$ o una cualquiera de sus rotaciones, y tampoco podrá ser una palabra del código porque $g(x)$ es el único polinomio del código de grado 10. En consecuencia, en ningún caso e pertenece al código, como se quería probar.

Examen de Fundamentos de Telemática

3 de septiembre de 2009

Nombre: _____ D.N.I.: _____

Problema 1 (2 puntos).

Un estudio sobre el personal de cierta empresa de telecomunicaciones revela que el 70% de sus ingenieros son hombres, y que el 25% de la plantilla no rebasa los 30 años de edad (≤ 30), con un 20% mayor de 40. Además, el número de mujeres en este último tramo (> 40) es despreciable, y las más jóvenes (≤ 30) duplican al resto de sus compañeras.

1. Considerando únicamente esta información, ¿qué incertidumbre existe a priori sobre el grupo humano (diferido por sexo e intervalo de edad) donde se situará una nueva contratación?
2. ¿Y si nos dicen que el/la nuevo/a no es un hombre mayor de 30 años?

Solución.

1. La respuesta es $H(S, E)$, donde S y E son, respectivamente, las variables aleatorias del sexo y grupo de edad de un empleado elegido al azar, cuya f.m.p. conjunta se obtiene fácilmente a partir de los datos:

$$\text{Así, } H(S, E) = H(0, 1, 0, 2, 0, 05, 0, 45, 0, 2)$$

2. Se resuelve de forma idéntica, pero recalculando la f.m.p. conjunta de las variables S y E .

$$\text{Ahora, } H(S, E) = H(1/7, 2/7, 4/7)$$

Problema 2 (1 punto).

Considere una fuente binaria que genera dos veces más símbolos de un tipo que del otro. Determine una buena cota superior para la longitud de un código compacto que codifique los símbolos de dicha fuente en grupos de ocho.

Solución.

Por el teorema de Shannon de codificación de fuente.

$$L < H_2(1/3) + \frac{1}{8}$$

Problema 3 (2 puntos).

1. ¿Cuál es la tasa de codificación de un codificador ideal de un canal cuaternario de 1 bit de capacidad?
2. Utilizando el resultado anterior, determine la entropía (en bits) de una fuente binaria si se sabe que la transmisión fiel de sus mensajes a través del sistema dado sólo es posible cuando el régimen de transmisión de la fuente no supera el del canal.

Solución.

1. $R = C$ (u. i. cuaternarios) $\cdot \frac{1}{2}$
2. $R = H_4(X) = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $H_2(X) = 1$

Problema 4 (3 puntos).

Considere el código lineal binario C con matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} H_4 & 0 \\ 0 & H_6 \end{pmatrix}$$

en donde H_4 es matriz de comprobación de paridad del código Hamming binario [15, 11].

1. Indique la longitud, la dimensión y la distancia de C .
2. Demuestre que C sólo puede corregir errores simples y dobles. ¿Cuántos dobles?
3. Supuesto que se conoce la distribución de pesos del código Hamming $\{A_i\}$, calcule el número de palabras de peso mínimo de C .

Solución.

1. Las palabras del código C se obtienen simplemente por concatenación de dos palabras cualesquiera del código Hamming binario [15, 11]. De ahí se deduce que la longitud de C es 30; su dimensión, 22; y su distancia, 3, exactamente la misma que la del código Hamming binario [15, 11].
2. Por la construcción del código, se puede corregir a lo sumo un error en cada una de las dos mitades de una palabra. Sólo se corrigen, por tanto, errores simples o dobles. Se corrigen todos los simples (30), por ser 3 la distancia del código; y se corrigen 225 errores dobles, que son simplemente 30 unidades menos que todos los síndromes no nulos.
3. El peso de las palabras de peso mínimo (no nulas, se sobreentiende) es 3; y, por construcción, C tendrá 249 palabras de peso 3.

Problema 5 (1 punto).

Determine, exponiendo porrazonadamente las razones, la distancia del menor código cíclico generado por el polinomio $(x^7 - 1)(x^7 + x + 1)$, donde $x^7 + x + 1$ es primitivo.

Solución.

Se trata de un código cíclico de longitud 127 y redundancia 8, cuyo polinomio generador tiene 4 coeficientes no nulos

$$(x^7 - 1)(x^7 + x + 1) = x^8 - x^7 + x^2 - 1$$

Dado que el polinomio generador tiene peso 4, la distancia del código sólo puede ser 2 o 4. Pero como el factor primitivo de grado 7 del polinomio generador garantiza la detección de todos los errores dobles, la distancia del código es 4.

Problema 6 (1 punto).

Para cualquiera de las estrategias de retrasmisión que conoce, ¿se obtiene la cadencia eficaz máxima cuando el número de retrasmisiones por trama es mínimo? Aclarar esta cuestión.

Solución.

La respuesta es negativa. La cadencia eficaz depende de dos factores: uno es el inverso del número de transmisiones por trama, y el otro es la fracción de tiempo dedicado a la transmisión de bits de información. Ambos factores, en un contexto dado, dependen únicamente de n , la cantidad de bits de información de una trama; pero mientras que el primer factor decrece con n , el segundo crece. Así, al minimizar el número de retrasmisiones, estamos maximizando el primer factor de la cadencia eficaz, pero minimizando el segundo. La maximización de la cadencia eficaz requiere típicamente un equilibrio entre ambos factores.

Problema 1. Dos tiradores, por turno, disparan sobre una diana. El tirador A dispara dos veces en cada turno, con una probabilidad de dar en la diana en cada disparo de $1/2$. El tirador B dispara tres veces en cada turno, con una probabilidad de dar en la diana en cada disparo de $(1/3)^i$, siendo i el número de orden del disparo ($i = 1, 2, 3$). ¿Qué información nos da la diana sobre la identidad del tirador después de que haya finalizado su turno?

Problema 2. Ha comprobado 10 resultados de una quiniela de fútbol (tradicional, de 14 partidos) y tiene 9 aciertos y un fallo. Suponiendo que los resultados de cada partido ($1-X-2$) son equiprobables, ¿cuánta incertidumbre acerca de si tiene premio (12, 13 o 14 aciertos) eliminaría el conocimiento de dos nuevos resultados?

Problema 3. Una competición entre dos equipos queda resuelta cuando uno de ellos gana cuatro partidos al otro. Sea X la variable aleatoria que representa los resultados de los partidos de una competición entre los equipos A y B ; valores posibles de X son AAAA, BABABAB, etc. Sea Y el número de partidos jugados, que varía entre 4 y 7. Suponiendo que ambos equipos tienen la misma probabilidad de ganar un partido y que los partidos son independientes, calcule $H(X)$, $H(Y)$, $H(Y|X)$ y $H(X|Y)$.

Problema 4. Cierta jugadora trampa tiene un dado trucado de tal forma que la probabilidad de obtener un uno es $2/3$, siendo los resultados restantes equiprobables. Desafortunadamente, la guardada ese dado en una caja donde había otros dos dados legales: idénticos en apariencia al primero. Si elige uno de ellos al azar.

- ¿cuánta información aporta el resultado de una única tirada acerca de la legalidad del dado?
- ¿cuánta incertidumbre restaría aún después de conocido el resultado de dos lanzamientos?

Problema 5. Considere el siguiente experimento. Se dispone de dos monedas: una con cara y cruz, y otra con dos caras. Se elige una de ellas al azar y se lanza al aire dos veces consecutivas, anotándose el número de caras como resultado del experimento. Calcule la información sobre la moneda elegida que nos proporciona dicho resultado.

Problema 6. En un instituto las clases se imparten a grupos de 15 o 30 alumnos.

- Suponga que se sabe que, en un grupo elegido al azar, no hay dos alumnos que cumplan años el mismo día. ¿Cuánta incertidumbre existe acerca del tamaño del grupo?
- ¿tem si se sabe que el grupo escogido si contiene alumnos nacidos el mismo día.

Problema 7. Sean X e Y variables aleatorias discretas con valores pertenecientes a los conjuntos $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ e $\{y_1, y_2, \dots, y_s\}$, respectivamente. Sea $Z = X + Y$.

a) Demuestre que $H(Z|X) = H(Y|X)$.

b) Razone que, si X e Y son independientes, entonces $H(Y) \leq H(Z)$ y $H(X) \leq H(Z)$. Así, la adición de variables aleatorias independientes añade incertidumbre.

c) Dé un ejemplo de variables aleatorias (necesariamente dependientes) en las que $H(X) > H(Z)$ y $H(Y) > H(Z)$.

d) ¿En qué condiciones se cumple que $H(Z) = H(X) + H(Y)$?

Problema 8. Una fuente X produce tres símbolos con las siguientes probabilidades

$$P_X(0) = 1/4, \quad P_X(1) = 1/4, \quad P_X(2) = 1/2.$$

Cada símbolo de la fuente, x , se transmite directa y simultáneamente a través de dos canales con salidas y y z y probabilidades de transición como las indicadas en la figura. Calcule $H(X)$, $H(Y)$, $H(Z)$, $H(Y, Z)$.



$I(X; Y)$, $I(X; Z)$, $I(X; Y|Z)$, $I(X; Y, Z)$. Interprete las expresiones de la información mutua.

Problema 9. Dadas dos variables aleatorias X e Y con probabilidades conjuntas $P(x_i, y_j) = p_{ij}$ dadas por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/24 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 1/4 & 1/24 \\ 0 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}$$

- ¿Cuánta información se obtiene al conocer el resultado de X e Y ?
- ¿Cuánta información se obtiene al conocer el resultado de Y ?
- ¿Cuánta información se obtiene al conocer el resultado de X cuando ya se conoce el resultado de Y ?

Problema 10. La rueda de una ruleta está dividida en 38 compartimentos de varios colores. La distribución de los compartimentos según el color es: 2 verdes, 18 rojos y 18 negros. El experimento consiste en arrojar una bola en la ruleta mientras gira. Los sucesos elementales, que la bola caiga en alguno de los 38 compartimentos, son equiprobables.

- ¿Cuánta información proporciona el color?
- ¿Cuánta información proporciona el color y el número?
- ¿Cuánta información proporciona el número si el color es conocido?

Problema 11. Suponga que lanzamos un dado que tiene dos caras numeradas con un 1, dos caras numeradas con un 2, y dos caras numeradas con un 3. A continuación, lanzamos una moneda el número de veces que indica el dado, y contamos el número de caras. ¿Cuánta información proporciona este experimento?

Problema 12. Los habitantes de cierto pueblo se dividen en dos grupos, A y B. La mitad de las personas del grupo A siempre dicen la verdad, $3/10$ intentan siempre y las demás siempre relatan con falsedad. En el grupo B, $3/10$ de las personas son sinceras, la mitad son mentirosas y las demás siempre relatan con falsedad. Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar sea del grupo A. Sea $I = I(p)$ la información que sobre el tipo de respuestas de una persona proporciona su pertenencia a un grupo. Determine el valor máximo posible de I y el porcentaje de personas en el grupo A para el que dicho máximo se da.

Examen de Fundamentos de Telemática

11 de junio de 2007

Nombre: _____ D.N.I.: _____

Problema 1. Dadas dos variables aleatorias X e Y con probabilidades conjuntas $P(x_i, y_j) = p_{ij}$ dadas por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/24 & 1/24 & 0 \\ 1/24 & 1/4 & 1/24 \\ 0 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix}$$

- a) ¿Cuánta incertidumbre se elimina al conocer el resultado de Y ? (1 punto)
- b) ¿Cuánta información se obtiene al conocer el resultado de Y si se sabe que x_1 no puede ocurrir? (1 punto)
- a) La incertidumbre que se elimina al conocer el resultado de Y es la entropía de Y . $H(Y) = \log 3$.
- b) Si $X = x_1$ no puede ocurrir, la distribución conjunta de probabilidades de X e Y pasa a ser

$$\begin{pmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/16 & 3/8 & 1/16 \\ 0 & 1/16 & 7/16 \end{pmatrix}.$$

Pero ahora $H(Y)$ vale

$$H(Y) = H(1/16, 7/16, 1/2) = \log 2 + \frac{1}{2} H(1/8) \approx 1,27 \text{ bits.}$$

ACADEMIA DE INGENIERÍA
tenorio
B/CEURUNA, 74-18 Telf: 986 20 46 46
academia@academiatenorio.com

Examen de Fundamentos de Telemática

8 de septiembre de 2010

Nombre: _____ D.N.I.: _____

Problema 1. Sean X e Y las variables aleatorias que representan la entrada y la salida, respectivamente, de un canal discreto sin memoria.

- a) (1 punto) Calcule $H(X|Y)$ si la función de masa de probabilidad conjunta está dada por la siguiente matriz

$$[p(x_i, y_j)] = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4q & 0 & 0 & 0 & 4p \\ 0 & 2q & 0 & 0 & 2p \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

con $p > 0$, $q > 0$, $p + q = 1$.

Primer modo. Si escribimos la matriz de probabilidades conjuntas como el producto

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & p \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & q & p \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

reconoceremos fácilmente que el canal es un canal 4-ario con borrado. Entonces, enumerando sus salidas como y_1, y_2, y_3, y_4 y $\epsilon = y_5$,

$$H(X|Y) = \sum_{j=1}^5 P(Y = y_j) H(X|Y = y_j) = P(Y = \epsilon) H(X|Y = \epsilon)$$

ya que si la salida es $y_1, \dots, y_4$ no hay duda sobre la entrada. Además $P(Y = \epsilon) = p$ y $H(X|Y = \epsilon) = H(X)$. Por lo tanto

$$H(X|Y) = pH(X) = pH(1/2, 1/4, 1/8, 1/8) = \frac{7}{4}p \text{ bits.}$$

Segundo modo. Use la regla de la cadena $H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y)$ y calcule $H(X, Y)$ y $H(Y)$ directamente a partir de los elementos de la matriz:

$$\begin{aligned} H(Y) &= H(q/2, q/4, q/8, q/8, p) = H(p) + qH(1/2, 1/4, 1/8, 1/8) \\ H(X, Y) &= H(q/2, q/4, q/8, q/8, p/2, p/4, p/8, p/8) \\ &= H(p) + pH(1/2, 1/4, 1/8, 1/8) + qH(1/2, 1/4, 1/8, 1/8) \\ &= H(p) + H(1/2, 1/4, 1/8, 1/8) \end{aligned}$$

en ambos casos habiendo hecho uso de la propiedad de partición. Despejando

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) = pH(1/2, 1/4, 1/8, 1/8) = \frac{7}{4}p \text{ bits.}$$

- b) (1 punto) Calcule la capacidad del canal.

La capacidad del canal 4-ario con borrado es $C = (1 - p) \log 4 = 2(1 - p)$ bits.

©Manuel Veiga & Cándido López, 2010

Tema 1. Conceptos básicos de Teoría de la Información (9 horas)

- 1.1 Introducción
- 1.2 Definición de entropía y entropía condicional. Propiedades
- 1.3 Teorema de Shannon de codificación de fuente
- 1.4 Definición de información mutua y capacidad de canal. Propiedades
- 1.5 Teorema de Shannon de codificación de canal

Tema 2. Codificación de fuente (9 horas)

- 2.1 Síntesis de códigos instantáneos
- 2.2 Algoritmo de Huffman
- 2.3 Codificación aritmética
- 2.4 Codificación universal

Tema 3. Codificación de canal (9 horas)

- 3.1 Códigos lineales. Caracterización matricial
- 3.2 Decodificación por síndrome
- 3.3 Detección y corrección de errores. Probabilidad de error
- 3.4 Códigos Hamming
- 3.5 Códigos cíclicos
- 3.6 Propiedades de detección de errores

Tema 4. Protocolos de retransmisión (6 horas)

- 4.1 Estrategias ARQ
- 4.2 Análisis de la cadencia eficaz
- 4.3 Protocolos de enlace de datos

Tema 5. Canales de acceso múltiple (12 horas)

- 5.1 Algoritmos MAC: Aloha y Aloha ranurado, CSMA y CSMA/CD, CSMA/CA, anillos con paso de testigo
- 5.2 Análisis de eficiencia
- 5.3 Redes locales: Ethernet, WiFi, *hubs & switches*, LAN virtuales



Examen de Fundamentos de Telemática

12 de julio de 2011

Nombre: _____ D.N.I.: _____

1. (1 punto) Determine la capacidad de un canal si se sabe que la matriz de probabilidad conjunta de las variables aleatorias de entrada y salida es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix}$$

2. (2 puntos) Considere un sistema de transmisión formado por una fuente ternaria uniforme, una canal cuaternario y codificadores de fuente y de canal ideales.

- Si se sabe que $1/3$ de los símbolos transmitidos por el canal son redundantes, ¿cuál es su capacidad en bits?
- Si el coste de uso del canal (i.e., el coste de transmisión de un símbolo) es unitario, ¿cuál será el coste de transmitir un mensaje de la fuente de longitud $n (\gg 1)$?

3. (1 punto) La secuencia

$$A, L, (1, 4, B), (1, 2, R), (1, 9, D), E, (8, 2, O), (4, 5, L), (1, 2, D), (A, 2, \emptyset)$$

representa la división en frases del algoritmo LZ77 aplicado a un mensaje. Las ternas tienen el significado (índice, longitud de la frase, sufijo), la primera letra del mensaje tiene índice 1 y $\emptyset$ denota el sufijo nulo. Averigüe el mensaje.

4. La matriz

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ I_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es de comprobación de paridad de un código lineal. Resuelva razonadamente las siguientes cuestiones:

- Obtenga la distribución de pesos del código (1 punto)
- Considere ahora el código con matriz de comprobación de paridad

$$H' = \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

Muestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pertenecen al código definido por H , entonces $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es una palabra del código definido por H' . Deduzca de aquí la distribución de pesos del código compuesto (1 punto)

5. $g(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ genera un código cíclico $[15, 12]$.

- ¿Es $11 \dots 1$ una palabra del código? (1 punto)
- Encuentre un vector de peso 1 corregible con este código. ¿Son igualmente corregibles los desplazamientos cíclicos de este vector? ¿Por qué? (1 punto)

6. (1 punto) Calcule el valor de la cadencia eficaz máxima en un enlace que utiliza la estrategia de envío continuo con rechazo selectivo.

7. (1 punto) Un hipotético sistema del tipo Aloha ranurado, con ranuras de duración igual a una trama, consta de n estaciones. Todas transmiten en cada ranura con probabilidad $1/n$ excepto una que lo hace con probabilidad p . Obtenga una expresión para el tráfico cursado.

Examen de Fundamentos de Telemática

20 de enero de 2011

Nombre: _____ D.N.I.: _____

Problema 1 (2 puntos). Considere la familia de canales dada por la matriz de probabilidades de transición

$$\begin{pmatrix} 1-p & p-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & p-\epsilon & 1-p \end{pmatrix}.$$

- a) Demuestre que la capacidad se alcanza en todos los casos para entradas equiprobables.
- b) Determine en qué casos la capacidad es nula.
- a) Calculemos $C = \max_{p(x)} I(X; Y)$, siendo $p(x)$ una distribución de probabilidad binaria. Tenemos que

$$C = \max_{p(x)} I(X; Y) = \max_{p(x)} H(Y) - H(Y|X).$$

Ahora bien, $H(Y|X) = H(1-p, p-\epsilon, \epsilon) = h(p-\epsilon) + (q+\epsilon)h(\epsilon/(q+\epsilon))$ no depende de la distribución de probabilidad a la entrada, por lo que

$$C = (\max_{p(x)} H(Y)) - H(Y|X).$$

Y ya que $H(Y) = H(a, p-\epsilon, b)$ para ciertos $a, b > 0$ tales que $a+b+p-\epsilon = 1$, se sigue por aplicación directa de la propiedad de partición que $\max_{p(x)} H(Y)$ se alcanza cuando $a = b = (q+\epsilon)/2$. Así, $\max H(Y) = h(p-\epsilon) + (q+\epsilon) \log 2$. Finalmente, reuniendo todos los términos

$$C = (q+\epsilon) \left(\log 2 - h\left(\frac{\epsilon}{q+\epsilon}\right) \right).$$

Notación: $q = 1-p$ y $h(p)$ denota la función de entropía binaria.

- b) De la última expresión se deduce que $C = 0$ si y sólo si $\log 2 = h(\epsilon/(q+\epsilon))$, es decir, si y sólo si $\epsilon = q$ o $p + \epsilon = 1$.

Problema 2 (3 puntos). Se van a transmitir a través de un canal cuaternario de capacidad 1 bit los mensajes de una fuente simétrica con un alfabeto de 48 símbolos.

- a) Determine el número mínimo de símbolos cuaternarios necesarios para transmitir fielmente un mensaje de la fuente de longitud n arbitrariamente grande.
- b) ¿Qué fracción de esos símbolos es redundante?
- c) Determine la fracción de tiempo que se usaría el canal si su régimen es unitario y el de la fuente una centésima.
- a) El número medio de símbolos necesarios para la transmisión fiable es de $nL_f L_c$, donde L_f (resp., L_c) es la longitud del código de fuente (resp., de canal) utilizado. Tal número es mínimo si se emplea codificación ideal, $L_f = H_4(X)$ y $L_c = 1/C$ en virtud de los teoremas de Shannon. Por consiguiente, son necesarios

$$n \frac{H_4(X)}{C} = n \frac{\log_4 48}{1/2} = 2n(2 + \log_4 3) \text{ símbolos cuaternarios}$$

ya que $C = 1 \cdot \log_4 2 = 1/2$ unidades cuaternarias por símbolo.

Tema 6: ESTRATEGIAS DE RETRANSMISIÓN

1. Introducción

2. Parada y espera

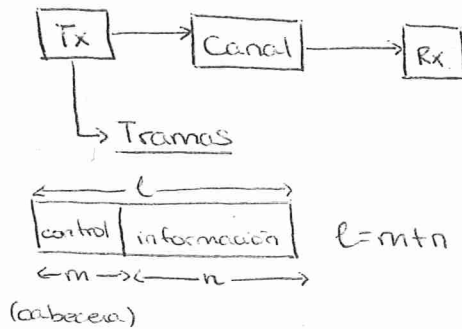
3. Envío continuo

3.1 Rechazo simple

3.2 Rechazo selectivo

1. INTRODUCCION

Nuevo sistema de transmisión:



• El Rx:

→ Comprueba si la trama recibida contiene errores

→ Si existen errores, la descarta y pide al tx que se la reenvíe.

Eso genera un protocolo de retransmisiones y asentimientos (ACK)

Asentimiento (ACK): trama corta (solo cabecera). Puede ser:

→ Positiva: la trama fue exitosa

→ Negativa: la trama recibida es errónea y hay que retransmitirla.

NOTA: se considera que se genera un ACK por cada trama recibida.

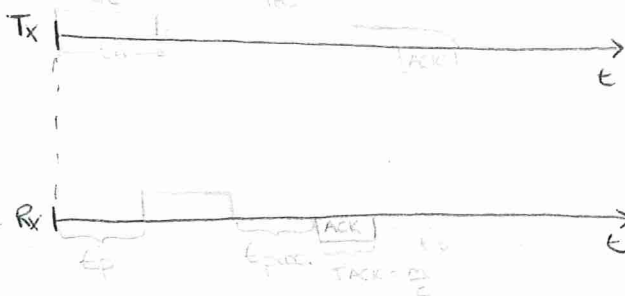
• Tiempo de asentimiento

$$V_c = C \text{ bits/s}$$

$$t_{\text{env}} = \frac{L}{C}$$

t_p : tiempo de procesamiento

d : distancia



t_{proc} : tiempo de procesamiento de la trama o el receptor (tome por cero como es usual)

• Probabilidad de error de trama

P : probabilidad de error de trama

$P_b = k = \text{BER}$: probabilidad de error de bit

$$P = 1 - \text{prob}(\text{no falle ninguno}) = 1 - (1 - P_b)^L \approx P_b \cdot L = P_b \cdot (n+m)$$

$\uparrow$
 $L \gg$



• Cadencia eficaz

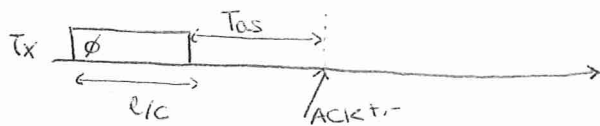
→ Es la tasa real de transmisión por el canal

$$C_e < C$$

$$C_e = \frac{\text{número medio de bits de información por trama}}{\text{tiempo medio de uso del canal por trama}} = \frac{n}{\bar{t}_{oc}}$$

$$\text{Eficiencia} \Rightarrow S = \frac{C_e}{C}$$

2. PARADA Y ESPERA



El tx envía una trama y se detiene hasta recibir su ACK. Si es positivo sigue con otra trama y si es negativo la retransmite.

→ Cálculo de la cadencia eficaz

$$C_e = \frac{n}{T_{oc}} \rightarrow \text{tiempo de ocupación medio}$$

$\bar{t}_{oc}$:

$\bar{t}_{oc}$: tiempo de ocupación del canal si solo se tx. 1 vez la trama.

$$\bar{t}_{oc1} = \frac{L}{c} + T_{as}$$

$$\bar{t}_{oc2} = 2 \cdot \left(\frac{L}{c} + T_{as} \right)$$

$$\bar{t}_{oci} = i \cdot \left(\frac{L}{c} + T_{as} \right)$$

$\forall i: 1, \dots, \infty$

$$T_{as} = 2t_p + t_{proc} + \frac{m}{c}$$

$$\bar{t}_{oc} = \bar{n}_{tx} \left(\frac{L}{c} + T_{as} \right)$$

$$\bar{n}_{tx} = \frac{1}{\text{prob. éxito}} = \frac{1}{1-P}$$

$$\bar{t}_{oc} = \frac{1}{1-P} \left(\frac{L}{c} + T_{as} \right)$$

$$C_e = \frac{(1-P) \cdot n \cdot C}{L + T_{as} \cdot C} = \frac{[1 - P_b(n+m)] n \cdot C}{n+m + T_{as} \cdot C}$$

Boletín n° 6

① a) $C_e = \frac{L}{C}$

$C_e = \frac{L}{C}$

$C_e = \frac{L}{C} + T_{out}$

$C_e = \frac{L}{C} + T_{out} + T_{as}$

$C_e = \left(\frac{L}{C} \right) + (n_{tx} - 1) T_{out} + T_{as}$

$C_e = \bar{n}_{tx} \left(\frac{L}{C} \right) + (\bar{n}_{tx} - 1) T_{out} + T_{as}$

$\bar{n}_{tx} = \frac{1}{P_{envio}} = \frac{1}{1-P}$

$C_e = \frac{1}{1-P} \left(\frac{L}{C} \right) + \left(\frac{1}{1-P} - 1 \right) T_{out} + T_{as}$

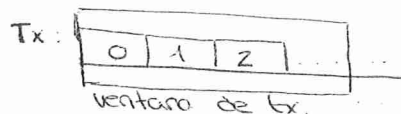
$C_e = \frac{L}{C} = \frac{(1-P)n_{tx}C}{C + P \cdot T_{out} \cdot C + (L/P) \cdot T_{as} \cdot C}$

b) $\bar{n}_{tx} = \frac{1}{P_{envio}} = \frac{1}{(1-P)(1-q)}$

→ lo mismo es igual.
Hay envío o no falta el
transmisor o el receptor

3. ENVÍO CONTINUO

El transmisor no se detiene al finalizar la transmisión de una trama si no que se envía la siguiente.

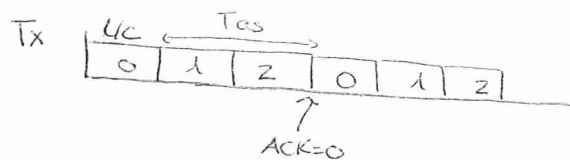


Ventana de tx: indique el número de tramas que el tx puede tener perdientes de ACK. Si se llena la ventana, el tx se detiene.

Nota: parada y espera es un envío continuo con tamaño de ventana = 1

El comportamiento ante la recepción de un ACK tiene dos soluciones:

3.1 Rechazo simple



Se retransmite la trama fallida y las siguientes.



las tira porque espera la cero.

→ El receptor rechaza todas las tramas recibidas que no sean la esperada.

→ Cálculo de la cadencia ~~media~~ eficaz.

$$C_e = \frac{n}{\bar{t}_{oc}}$$

$$t_{oc1} = l/c$$

$$t_{oc2} = l/c + T_{as} + l/c$$

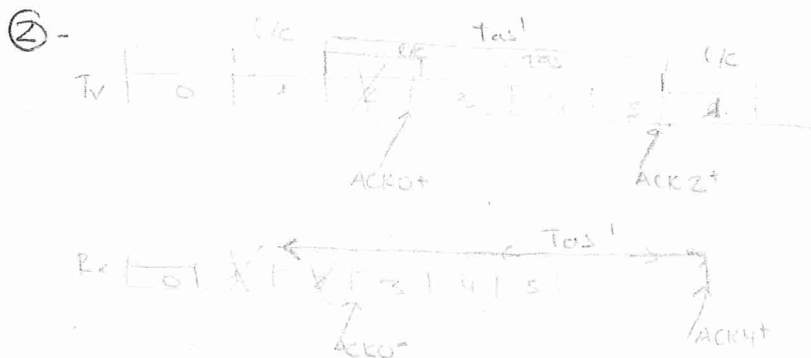
$$t_{oci} = i \cdot \frac{l}{c} + (i-1) T_{as} \quad \forall i = 1, \dots, \infty$$

$$\bar{t}_{oc} = \bar{n}_{tx} \cdot \frac{l}{c} + (\bar{n}_{tx} - 1) T_{as}$$

$$\bar{n}_{tx} = \frac{1}{P_{\text{éxito}}} = \frac{1}{1-P}$$

$$\bar{t}_{oc} = \frac{1}{1-P} \cdot \frac{l}{c} + \frac{P}{1-P} \cdot T_{as}$$

Boletín 6



$$t_{oc1} = l/c$$

$$t_{oc2} = l/c + T_{as}' + l/c$$

$$t_{oci} = i \cdot \frac{l}{c} + (i-1) T_{as}'$$

$$t_{oc3} = l/c + T_{as}' + l/c + T_{as}' + l/c$$

$$\bar{t}_{oc} = \bar{n}_{tx} \cdot \frac{l}{c} + (\bar{n}_{tx} - 1) T_{as}'$$

$$T_{as}' = \bar{n}_{tx} \cdot \frac{l}{c} + T_{as}$$

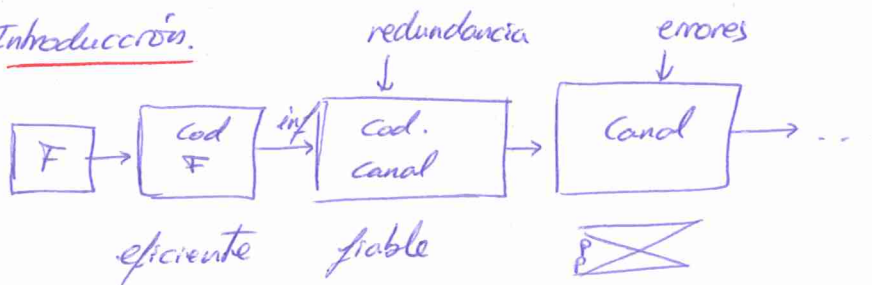
$$\bar{n}_{tx} = \frac{1}{1-P}$$

$$\bar{t}_{oc} = \frac{1}{1-P} \cdot \frac{l}{c} + \frac{P}{1-P} \cdot \left(\frac{1}{1-P} \cdot \frac{l}{c} + T_{as} \right)$$

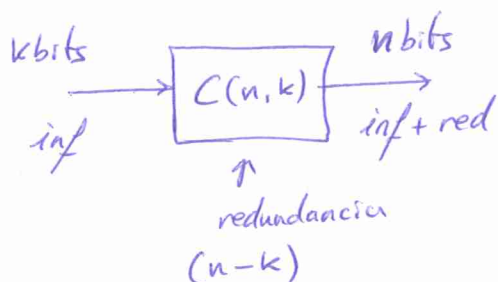
TEMA 3: CÓDIGOS LINEALES

1. Introducción
2. Matriz generada.
3. Matriz de comprobación de paridad.
4. Propiedades detectoras de errores.
5. Propiedades correctoras de errores.

1. Introducción.



Códigos lineales (binarios)



Notación vectorial:

La salida del cod. lineal:

$$\begin{aligned}(n=6) : 100001 &\rightarrow \vec{x}_{1 \times 6} = (100001) \\ &: 000000 \rightarrow \vec{0}_{1 \times 6} = (000000) \\ &: 111111 \rightarrow \vec{1}_{1 \times 6}\end{aligned}$$

Def: Código lineal: Se dice que un código $C(n,k)$ es lineal si cumple:

- a) El vector nulo ($\vec{0}_{1 \times n}$) siempre es palabra código.
 b) si el vector $\vec{x}_{1 \times n}$, $\vec{y}_{1 \times n}$ son palabras código ($\in C$) entonces:

$$\vec{x}_{1 \times n} \oplus \vec{y}_{1 \times n} \in C.$$

$\uparrow$
 suma módulo 2. ("o exclusiva")

Ejemplo: $n=6$

$$\vec{x}_{1 \times 6} = 100111$$

$$\vec{y}_{1 \times 6} = 100001$$

$$\vec{x}_{1 \times 6} \oplus \vec{y}_{1 \times 6} = 000110$$

Def: Peso hamming: (P_H): El peso hamming de la palabra código es el número de unos de la palabra código.

Ej: $\vec{x}_{1 \times 6} = 100111$, $P_H(\vec{x}_{1 \times 6}) = 4$

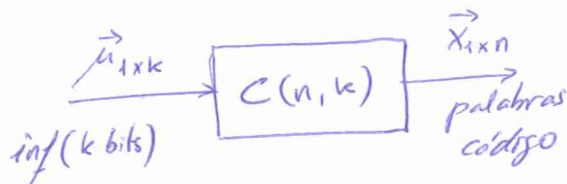
• Distancia hamming: (d_H) La d_H entre 2 palabras código es el peso hamming de la suma (módulo 2)

Ej: Sea $\vec{x}_{1 \times 6} = 100111$

$$\vec{y}_{1 \times 6} = 100001$$

$$d_H(\vec{x}_{1 \times 6}, \vec{y}_{1 \times 6}) = P_H(\vec{x}_{1 \times 6} \oplus \vec{y}_{1 \times 6}) = P_H(000110) = 2$$

• Distancia código: (d_c) La distancia código en un código lineal $C(n,k)$ es el P_H de la palabra código no nula de menor peso.



Propiedad: En un código lineal $C(n, k)$ existen

2^k palabras código

En forma matricial:

$$\vec{x}_{1 \times n} = \vec{u}_{1 \times k} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{matriz generadora}}}{G}_{k \times n}$$

2. Matriz generadora: $G_{k \times n}$

La matriz $G_{k \times n}$ del código lineal permite obtener las palabras código a partir de las secuencias de información.

$$\vec{x}_{1 \times n} = \vec{u}_{1 \times k} \cdot G_{k \times n}$$

Ejemplo: Sea un código lineal que cumple:

$$x_1 = u_1$$

$$x_2 = u_2$$

$$x_3 = u_3$$

$$x_4 = u_1 \oplus u_2$$

$$x_5 = u_1 \oplus u_3$$

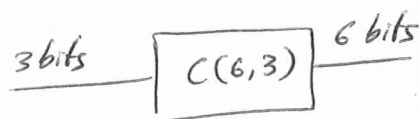
$$x_6 = u_1 \oplus u_2 \oplus u_3$$

$$\vec{x} = (x_1 \dots x_6) = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

x_i : componente i -ésima de la palabra código

u_i : componente i -ésima de la secuencia de información.

Parámetros del código: $n=6$
 $k=3$



Matriz generadora del código:

$$G_{\substack{k \times n \\ 3 \times 6}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

$(G_{k \times n})$

- a) Las filas de la matriz generadora son palabras código
- b) Las palabras código se obtienen como todas las posibles combinaciones de filas de $G_{k \times n}$. (excepto la nula)
- c) Si las filas de $G_{k \times n}$ son todas de P_H par entonces todas las palabras código van a ser de P_H par.

Ej: Para el código lineal generado por:

$$G_{3 \times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A$$

$\rightarrow$ de orden k

= Forma sistemática $\Rightarrow$ linealmente independientes.

Obten:

a) Longitud y dimensión del código

Longitud $\equiv n = 6$

Dimensión: $k = 3$

Hay que probar que las filas de $G_{k \times n}$ son linealmente independientes.

b) Obten las palabras código.

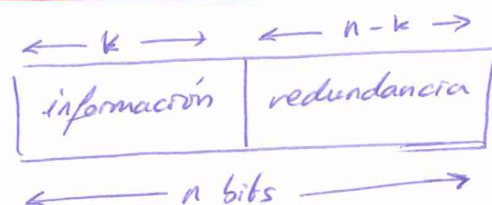
$$2^k = 2^3 = 2^8 \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} 100111 \\ 010101 \\ 001011 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 100111 \\ 010101 \\ 001011 \end{array}} \right\} \text{Filas de } G. \\ \begin{array}{l} 110010 \\ 101100 \\ 011110 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 110010 \\ 101100 \\ 011110 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 1^2 + 2^2 \\ 1^1 + 3^2 \\ 2^1 + 3^2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 110010 \\ 101100 \\ 011110 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ Filas de } G \\ \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right) = \frac{3!}{2!1!} = 3 \end{array} \\ \begin{array}{l} 111001 \\ 000000 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 111001 \\ 000000 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 3 \text{ Filas de } G \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

c) Distancia código (d_c):

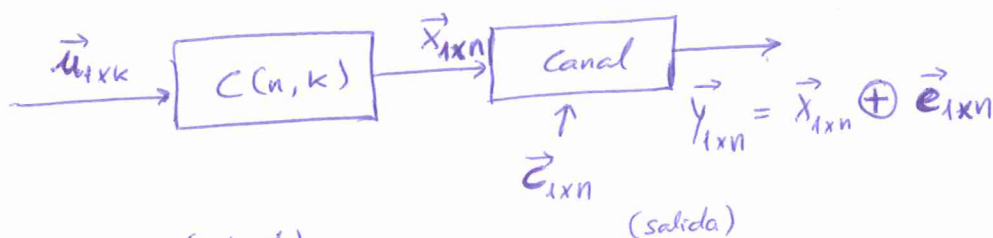
$d_c = 3$ (1ª palabra con menor número de unos).

Codificación sistemática:



$$G_{k \times n} = (I_k | A)$$

3. Matriz de comprobación de paridad. ($H_{(n-k) \times n}$)



Ej:

11 00 10

$$11111 = 110010 \oplus 001101$$

La matriz de comprobación de paridad ($H_{(n-k) \times n}$) permite conocer si la secuencia recibida ($\vec{y}_{1 \times n}$) es o no una palabra código.

Para ello se obtiene el síndrome ($\vec{s}$):

$$\vec{s}_{1 \times n-k} = \vec{y}_{1 \times n} \cdot H_{1 \times n-k}^T$$

$$\text{Si } \vec{s}_{1 \times n-k} = \vec{0}_{1 \times n-k} \Rightarrow \underline{\vec{y}_{1 \times n}} \in C \quad (\text{pertenece al código})$$

$$s_{1 \times n-k} \neq \vec{0}_{1 \times n-k} \Rightarrow \vec{y}_{1 \times n} \notin C \Rightarrow \underline{\exists \vec{e}_{1 \times n}} \\ (\text{No pertenece al código}) \quad (\text{existen errores})$$

La matriz $H_{n-k \times n}$ se obtiene a partir de la matriz generadora:

$$G_{k \times n} = (I_k | A) \Rightarrow H_{n-k \times n} = (A^T | I_{n-k})$$

Ejemplo: Sea el código lineal de matriz generadora:

$$G_{3 \times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad n=6, k=3$$

a) Obtén la matriz de comprobación de paridad.

$$H_{n-k \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$6-3 \times 6$
 3×6

Propiedad: Si un código lineal tiene distancia código d se cumple que d es el menor número de columnas de $H_{n-k \times n}$ linealmente independientes.

b) Calcula la dc.

$$H_{3 \times 6} = \begin{pmatrix} \overset{x}{1} & \overset{x}{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

linealmente dependientes $\Leftrightarrow$ su suma módulo 2 es nula.

~~dc=1~~, no existe columna nula en H .

dc=2, no existen dos columnas linealmente independientes.
(tendrían que ser iguales)

$$dc=3 \quad 2^0 \oplus 4^0 \oplus 6^0$$

d) La matriz $H_{n-k \times n}$ tiene en sus columnas todas las combinaciones binarias no nulas con $n-k$ bits.

Ejemplo: Sea el código hamming $C(\mathbb{Z}, 4)$. Obtén $H_{n-k \times n}$

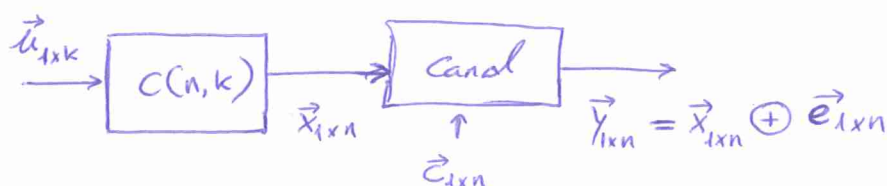
$$\left. \begin{array}{l} n=7 \\ k=4 \end{array} \right\} n-k=3 \quad H_{n-k \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv$$

3×7

$$\equiv \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

se pueden reordenar las columnas de H .

4. Detección de errores. Propiedades:



Detectar un error implica que $\vec{y}_{1 \times n} \notin C$.

Propiedad:

1. En un código lineal se detectan todos aquellos errores que no coinciden con palabras código.

Justificación:

$$\vec{y}_{1 \times n} = \vec{x}_{1 \times n} \oplus \vec{e}_{1 \times n}$$

$$\vec{s}_{1 \times n-k} = \vec{y}_{1 \times n} \cdot H_{n \times n-k}^T = (\vec{x}_{1 \times n} \oplus \vec{e}_{1 \times n}) \cdot H_{n \times n-k}^T =$$

$$= \underbrace{\vec{x}_{1 \times n} \cdot H_{n \times n-k}^T}_{\vec{0}_{1 \times n-k}} \oplus \vec{e}_{1 \times n} \cdot H_{n \times n-k}^T$$

$$\text{Si } \vec{e}_{1 \times n} \in G \Rightarrow \vec{e}_{1 \times n} \cdot H_{n-k}^T = \vec{0}_{1 \times n-k}.$$

$\Downarrow$

$$\vec{s}_{1 \times n-k} = \vec{0}_{1 \times n-k} \Rightarrow \text{el error no se detecta.}$$

2. En un código lineal se detectan todos aquellos errores que su peso Hamming $(P_H(\vec{e}_{1 \times n})) \leq d_c - 1$.

Justificación:

$$\text{Si } P_H(\vec{e}_{1 \times n}) \leq d_c - 1 \Rightarrow \vec{e}_{1 \times n} \notin G \Rightarrow \text{se detecta}$$

NOTA: En un código lineal $C(n, k)$ se cumple:

a) $\exists 2^k$ palabras código.

b) $\exists n$ errores simples (de $P_H = 1$)

c) $\exists \binom{n}{2}$ errores dobles (de $P_H = 2$)

d) $\exists \binom{n}{i}$ errores de $P_H = i$.

e) El n° total de errores en un código $C(n, k)$ es $2^n - 1$ (no nulos).

n° de errores:

de $P_H = 3$

Hay $\binom{n}{3}$ errores.

$$\binom{n}{3} = \binom{6}{3} = 20.$$

$$\frac{6!}{3! 3!}$$

detectables $20 - 4 = 16.$

no detectables: los que coinciden con palabra código.

4

Ejemplo: En el código generado por

$$G_{3 \times 6} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Obten el número de errores detectables, de $P_H = 3$.

$n=6$: porque las filas de G son linealmente independientes.

$k=3$

100 111
 010 101
 001 011
 110 010
 101 100
 011 110
 111 001
 000 000

b) N° de errores detectables de $P_H = 2$.

Son todos detectables puesto que el código no contiene palabras de $P_H < 3$ que es $d_c = 3$.

$$\binom{n}{z} = \binom{6}{2} = 15 \qquad \frac{6!}{5!}$$

Propiedad:

En un código lineal $C(n, k)$ si

$\vec{r}_{1 \times n} \in C \Rightarrow$ la distribución de pesos de las palabras código es simétrica ($A_i = A_{n-i}$)

A_i : n° de p.c de $P_H = i$.

Problema 3.

Código Hamming

a) $n = 2^k - 1$

$$\left. \begin{array}{l} n = 15 \\ k = 11 \end{array} \right\} n - k = 4$$

$$15 = 2^4 - 1 = 15$$

b) $dc = 3$

$$H_{n-k \times n} = \begin{pmatrix} 000000011111111 \\ 000111100001111 \\ 011001100110011 \\ 101010101010101 \end{pmatrix}$$

4×15

d) $H \equiv$ columns.

todas las combinaciones
binarias con $n-k$ bits
no nulas.

Eliminamos todas las columnas con un n° par de unos.

$$H_{n-k \times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $n \equiv$ longitud.

$k \equiv$ dimensión.

$dc \equiv$ distancia

Pasamos H a forma sistemática cambiando columnas. $\left[H = (A^T | I_{n-k}) \right]$

$$H = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

H está en forma sistemática. Sus filas ~~(están)~~ son linealmente independientes. Por tanto:

$$n = 8$$

$$n - k = 4 \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

La $dc = 4$. Porque: $dc \neq 2$ $\nexists$ 2 columnas en H linealmente dependientes.

Como todas las columnas de H son de P_H impar entonces la dc tiene que ser par para obtener un número de ellas linealmente dependientes.

$dc = 4$. Puesto que existen 4 columnas que sumadas dan cero.
 $2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 5^\circ$.

b) Obtendremos la distribución de pesos de las palabras código.

$\vec{1}_{1 \times 8} \in C$? Calculo su síndrome:

$$\boxed{\vec{s}_{1 \times 4} = \vec{1}_{1 \times 8} \cdot H^T_{8 \times 4} = (0000)} = (11 \dots 11) \begin{pmatrix} H^T \end{pmatrix}$$

Cada componente se obtiene como la suma de las filas de H .

$$\vec{s}_{1 \times 4} = (0000) = \vec{0}_{1 \times 4} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{1}_{1 \times 8} \in C}}$$

Por tanto, la distribución de pesos es simétrica:

$$\exists 2^k = 2^4 = 16 \text{ palabras código} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_i & A_{8-i} & n^\circ \\ \hline 0 & 8 & 1, 1 \\ \hline 1 & 7 & 0 \\ \hline 2 & 6 & 0 \\ \hline 3 & 5 & 0 \\ \hline 4 & 4 & 16 - 2 = 14 \\ \hline \end{array} \right\}$$

porque $dc = 4$, $\nexists$ palabras código de P_H menor que dc .
 (salvo la nula)

$$\boxed{\begin{array}{l} A_0 = 1 \\ A_4 = 14 \\ A_8 = 1 \end{array}}$$

Solo hay palabras código de P_H par.

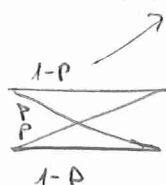
c)

$$n^{\circ} \text{ de errores de } P_H = 4 \left\{ \begin{array}{l} \text{detectables: } 70 - 14 = 56 \\ \text{no detectables: } n^{\circ} \text{ de p.c de } P_H = 4 \Rightarrow 14 = A_4 \end{array} \right.$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \binom{8}{4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$$

$$P(\text{no detectar un error}) = P(\vec{e}_{1 \times n} \text{ coincide con una palabra código}) =$$

$$= \underbrace{P^4 \cdot (1-P)^{n-4}}_{\substack{\text{probabilidad} \\ \text{de error de } P_H = n}} \cdot 14 + \underbrace{P^n}_{\text{probabilidad de error de } P_H = n} = 14 \cdot P^4 \cdot (1-P)^{8-4} + P^8$$

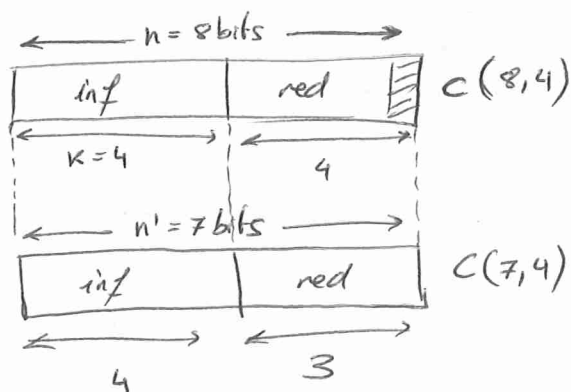


$$\vec{e} = 11110...00$$

$$P \cdot P \cdot P \cdot P \cdot (1-P) \cdot (1-P) \dots$$

$$\text{Si preguntasen } P(\text{detectar un error}) = 1 - P(\text{no detectar el error})$$

d) bit de paridad = bit de redundancia.



$$H = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow H'_{3 \times 7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz H' contiene en sus columnas todas las combinaciones binarias no nulas con 3 bits.

Por tanto se trata del código Hamming $C(7,4)$.

Problema 7.

a) La suma de las filas es nula. Las filas de H no son linealmente independientes. Tendremos que eliminar una de las filas.

Eliminamos la última fila de H .

$$H' = \begin{pmatrix} 1111 & 0000 & 0000 & 0000 \\ 0000 & 1111 & 0000 & 0000 \\ 0000 & 0000 & 1111 & 0000 \\ 0000 & 0000 & 0000 & 1111 \\ 1000 & 1000 & 1000 & 1000 \\ 0100 & 0100 & 0100 & 0100 \\ 0010 & 0010 & 0010 & 0010 \end{pmatrix}$$

$k' =$
 $n-k \times n$
 7×16

$$n = 16, \rightarrow k = 9$$

$$n - k = 7$$

$$\text{longitud} = n = 16$$

$$\text{dimensión} = k = 9$$

$$\text{distancia} = d_c =$$

La distancia código se obtiene como el menor número de columnas de H' linealmente dependientes.

$d_c = 2$? No existen 2 columnas linealmente dependientes (tendrían que ser iguales)

$d_c = 3$? No. No hay forma de encontrar tres columnas linealmente dependientes.

En cada grupo de 4 columnas no hay 3 linealmente dependientes.

Tampoco se pueden conseguir escogiendo z en uno de esos grupos y otra en otro diferente.

Si elegimos una de un grupo distinto tampoco es posible.

$$\boxed{dc = 4} \quad 1^\circ, 2^\circ, 5^\circ \text{ y } 6^\circ$$

b) Compruebo que $\vec{T}_{1 \times 16} \in G$. Será suficiente calcular el síndrome:

$$\vec{T}_{1 \times 16} \cdot H_{16 \times 7}^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) = \vec{0}_{1 \times 7}$$

$$\text{Por tanto } \vec{T}_{1 \times 16} \in G.$$

Vamos a calcular la distribución de pesos de las palabras código.
Como $\vec{T}_{1 \times 16} \in G$ la distribución de pesos de sus palabras es simétrica.

$$A_i = A_{n-i} \quad \forall i = 0, \dots, 16.$$

A_i	A_{n-i}	n°
0	16	1, 1
1	15	0
2	14	0
3	13	0
4	12	
5	11	
6	10	
7	9	
8	8	

$$\left. \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right\} dc = 4$$

Por este paso no puedo comprobar de manera sencilla que sean todos pares.

$$\vec{s} = \vec{0}_{1 \times 7} = (111110 \dots 0) \cdot H^T =$$

Para probar que las palabras código son todas de P_H par es suficiente probar que no existen grupos con n^o impar de columnas de H linealmente dependientes.

Esto indicará que el síndrome de una palabra de P_H impar no es nulo, es decir, no pertenece al código.

En efecto es así porque eligiendo un número impar de columnas siempre tocará un número impar en alguno de los grupos de 4 columnas y de este modo es imposible obtener una combinación nula.

Problema 5.

$$G = \left(I_6 \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right. \right)$$

a) Como las filas de G son linealmente independientes:

$$k = 6$$

$$n = 12$$

Pertenece al código porque se puede obtener el vector $\vec{T}_{1 \times 12}$ sumando todas sus filas de G .

NOTA: Siempre que esté en forma sistemática si sumando todas sus filas da el vector $\vec{T}_{1 \times k} \in \mathbb{C}$.

b) Como la distribución de pesos es simétrica:

A_i	A_{n-i}	n°
0	12	1, 1
1	11	0
2	10	0
3	9	0
4	8	15, 15
5	7	0
6	6	32

$dc = 4$

Porque todas las p.c. son de P_H par.

obtenemos H : $H = (A^T | I_{n-k})$

$$H_{6 \times 12} = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \middle| I_6 \right)$$

$dc = 2$? No. Porque no hay dos columnas en H iguales.

$dc = 3$?

Como todas las columnas de H son P_H impar es necesario combinar un n° par de ellas para obtener la combinación nula $\Rightarrow dc$ es par.

Y todas las p.c. son de P_H par.

$dc = 4$ 1°, 2°, 8°, 9° columna.

* Existirán tantas p.c. de $P_H = 4$ como grupos de 4 columnas de H linealmente dependientes.

Vamos a buscar cuantos grupos de 4 columnas son linealmente dependientes.

$$\left(\text{Pocle matriz} \mid I_6 \right) \rightarrow$$

Grupos que forma p.c.

$$4 - 0 \times$$

$$3 - 1 \times$$

$$2 - 2 \times$$

$$1 - 3 \times$$

$$0 - 4 \times$$

$$\rightarrow \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15.$$

$\Rightarrow 15$ pc. de P_H 4. y otras 15 de P_H 8.

12 de Julio de 2011

Problema 4.

$$H = \left(I_5 \mid \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

a)

$$n = 10$$

$$k = 5$$

$$n - k = 5 \Rightarrow k = 5$$

Hay que probar si $\vec{1}_{1 \times 10} \in C$. De ser así la distribución de pesos es simétrica.

$$\vec{s}_{1 \times 5} = \vec{1}_{1 \times 10} \cdot H_{10 \times 5}^T = \vec{0}_{1 \times 5}$$

(00000)

$$\left. \begin{array}{l} 2^k \\ 2^5 = 32 \end{array} \right\} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_i & A_{n-i} & n^\circ \\ \hline 0 & 10 & 1, 1 \\ \hline 1 & 9 & 0 \\ \hline 2 & 8 & 0 \\ \hline 3 & 7 & 0 \\ \hline 4 & 6 & 15, 15 \\ \hline 5 & 5 & 0 \\ \hline \end{array}$$

La de 12 porque no hay 2 columnas de H linealmente dependientes.

Como todas las columnas de H son de P_H por no existen palabras código de P_H impar.

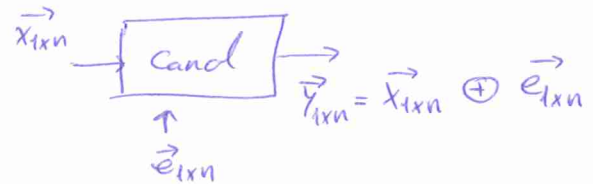
$$\text{Por tanto: } \begin{array}{ll} A_0 = 1 & A_6 = 15 \\ A_4 = 15 & A_{10} = 1 \end{array}$$

Código lineales. (Resumen)

$$\vec{x}_{1 \times n} = \vec{u}_{1 \times k} \cdot G_{k \times n}$$

$$G_{k \times n} = (I_k | A)$$

$$H_{n-k \times n} = (A^T | I_{n-k})$$



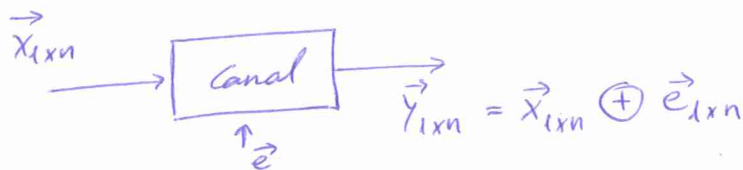
$$s_{1 \times n-k} = \vec{y}_{1 \times n} \cdot H_{n \times n-k}^T$$

$$\hookrightarrow \vec{0}_{1 \times n-k} \Rightarrow \vec{y}_{1 \times n} \in C.$$

$$\vec{s}_{1 \times n-k} \neq \vec{0}_{1 \times n-k} \Rightarrow \exists \vec{e}_{1 \times n}.$$

$$\begin{matrix} n = \text{total} \\ \text{de } \vec{e}_{1 \times n} \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{detectables.} \\ \cdot \text{no detectables} = \text{p.c.} \end{array} \right.$$

5. Propiedades correctoras de errores.



El proceso para buscar la palabra código transmitida será:

1) Calculamos el síndrome de la secuencia recibida:

$$\vec{s}_{1 \times n-k} = \vec{y}_{1 \times n} \cdot H_{n \times n-k}^T = (\vec{x}_{1 \times n} \oplus \vec{e}_{1 \times n}) \cdot H_{n \times n-k}^T =$$

$$= \vec{e}_{1 \times n} \cdot H_{n \times n-k}^T$$

$$2) \text{ Si } \vec{s}_{1 \times n-k} = \vec{0}_{1 \times n-k} \Rightarrow \vec{y}_{1 \times n} \in C.$$

$$\text{Pero si } \vec{s}_{1 \times n-k} \neq \vec{0}_{1 \times n-k} \Rightarrow \vec{y}_{1 \times n} \notin C \Rightarrow \exists \vec{e}_{1 \times n}.$$

Hay que buscar el error y estimar la palabra código transmitida:

$$\vec{x}_{1 \times n}^{\text{est}} = \vec{y}_{1 \times n} \oplus \vec{e}_{1 \times n}^{\text{est}}$$

(est) = estimado.

3) el $\vec{e}_{est}$ se obtiene de la tabla de síndromes.

Ejemplo: sea el código lineal $C(6,3)$ generado por:

$$G_{3 \times 6} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$I_3 \quad A$

a) Tabla de síndromes.

Calculamos la matriz $H_{n-k \times n}$
 3×6

$$H_{3 \times 6} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

NOTA: En la tabla de síndromes se indican los errores más probables, son los de menor peso.

Son errores simples los que coinciden con una columna de H .

Buscamos una combinación lineal de dos columnas.

Tabla de síndromes

$\vec{s}_{1 \times n-k}$	$\vec{e}_{1 \times n}$	$P_H(\vec{e})$
0 0 0	0 0 0 0 0 0	0
1 0 0	0 0 0 1 0 0	1
0 1 0	0 0 0 0 1 0	1
1 1 0	0 0 0 1 1 0	2
0 0 1	0 0 0 0 0 1	1
1 0 1	0 1 0 0 0 0	1
0 1 1	0 0 1 0 0 0	1
1 1 1	1 0 0 0 0 0	1

b) Obtén la palabra código estimada si se recibe la secuencia: $\vec{y}_{1 \times 6} = 111111$

Calculo el síndrome: (suma de los unos de cada fila de H)

$$\vec{s}_{1 \times 3} = \vec{y}_{1 \times 6} \cdot H_{6 \times 3}^T = 110$$

$$\vec{y}_{1 \times 6} \notin C \Rightarrow \exists \vec{e}_{1 \times 6}$$

De la tabla de síndromes: $\vec{e}_{est} = 000110$

$$\vec{x}_{est} = \vec{y}_{1 \times n} \oplus \vec{e}_{est} = 111001$$

palabra código recibida error estimado

c) Oten la probabilidad de cometer un error al decodificar.

$$\begin{aligned}
 P(\text{error al decodificar}) &= 1 - P(\text{no cometer error al decodificar}) = \\
 &= 1 - [P(\text{error del canal sea el de la tabla de síndromes})] = \\
 &= 1 - \left[\underbrace{(1-P)^n}_{\text{error nulo}} + \underbrace{6P(1-P)^{n-1}}_{\text{error simple}} + \underbrace{P^2(1-P)^{n-2}}_{\text{Error doble.}} \right]
 \end{aligned}$$

Propiedad:

a). Un código lineal $C(n, k)$ corrige $2^{n-k} - 1$ errores no nulos.
(Todos los de la tabla de síndromes).

b) Todos los errores que cumplen:

$$P_H(\vec{e}_{1 \times n}) \leq \left\lceil \frac{dc-1}{2} \right\rceil \text{ son corregibles.}$$

BOLETÍN CÓDIGOS:

Problema 8.

a) Cuales son la longitud, dimensión y distancia de C ?

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & 0 & & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & 0 & \\ & & & & & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n-k \times n} = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Filas linealmente independientes.

$$n = \text{longitud} = 9$$

$$n-k=6 \Rightarrow k = \text{dimensión} = 3$$

dc (menor número de columnas linealmente dependientes)

$$dc = 3 \quad 1^0, 2^0, 7.$$

b)

$$G = (I_k | A)$$

$$G_{k \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3×9

c)

$$P_H(\vec{e}) \leq \left\lceil \frac{dc-1}{2} \right\rceil = t = \left\lceil \frac{3-1}{2} \right\rceil = 1$$

Esto nos dice que nuestro código corrige todos los errores simples.

$\exists n=9$ errores simples.

d)

$$\vec{Y}_{1 \times 9} = 101010101$$

$$\vec{S}_{1 \times 6} = \vec{Y}_{1 \times 9} \cdot H_{9 \times 6}^T = 011001$$

La palabra recibida $\vec{Y}_{1 \times 9}$ no pertenece al código $\Rightarrow \exists \vec{e}_{1 \times 9}$.

De la tabla de síndromes sacamos el $\vec{e}_{st}$.

Buscamos el error asociado al síndrome:

Nota: El error asociado no es simple puesto que el síndrome no coincide con una columna de H .

Tampoco tiene asociado un error doble puesto que no se puede obtener como la combinación lineal de 2 columnas de H .

$\vec{S}_{1 \times 6}$	$\vec{e}_{1 \times 9}$
011001	011001000

Tiene un error triple puesto que se puede obtener como combinación de tres columnas de H .

$$\vec{X}_{est} = \underset{1 \times 9}{Y} \oplus \underset{1 \times 9}{\vec{e}_{est}} = 101010101 \oplus 011001000$$

$$\vec{X}_{est} = 110011101$$

Problema 9.

$$H = \begin{pmatrix} H_4 & 0 \\ 0 & H_4 \end{pmatrix}$$

$$n = 15$$

$$k = 11$$

a)

$$H_4 = H_{n-k \times n}$$

$$4 \times 15$$

$$\longrightarrow H_{n-k \times n} =$$

$$8 \times 30$$

$$= \begin{pmatrix} H_{4 \times 15} & 0 \\ 0 & H_{4 \times 15} \end{pmatrix}$$

Todas sus filas son linealmente independientes por su propia construcción.
(La matriz H de un código Hamming contiene todas las combinaciones binarias en sus columnas)

$$n = 30$$

$$k = 22$$

$dc = 3$ Puesto que los códigos Hamming tienen $dc = 3$ y por tanto se pueden encontrar 3 columnas linealmente independientes.

b) Solo corrige errores simples y dobles.

$$P_H(\vec{e}_{1 \times 30}) \leq \left\lceil \frac{dc-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3-1}{2} \right\rceil = 1$$

$\exists n = 30$ errores simples.

$\vec{s}_{1 \times n-k}$ 1×8	$P_H(\vec{e}_{1 \times 30})$	n^o
000...0	0	1
⋮	1	30
⋮	2	$256 - 31 = 225$
111...1		

$$2^8 = 256$$

El nº de errores dobles corregidos es:

$$\alpha_2 = 225$$

El código solo corrige simples y dobles porque los síndromes o bien coinciden con una columna de H (un grupo de cuatro ceros al principio o al final) o bien se obtienen como la combinación lineal de dos columnas de H , una de cada bloque.



Problema 10. $H_r = (I_r \ B_{r \times m})$, $r \geq 2$.

I_r : matriz identidad $r \times r$.

$B_{r \times m}$ sus columnas son todas los vectores de $\mathbb{P}_H = 2$ tales que ninguna fila es nula.

$$H_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$H_7 = \left(I_7 \mid \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array} \right)$$

$$H_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

$$H_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & B_{r \times m} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{filas: } r \\ \text{columnas: } r + \binom{r}{2} \end{array}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $n-k \times n$ r columnas $\binom{r}{2}$ columnas

$$n = r + \binom{r}{2}$$

$$\begin{array}{l} n-k = r \\ k = n - (n-k) = r + \binom{r}{2} - r = \binom{r}{2} \end{array}$$

6. Ortogonalidad

Def. Sean $x_{1 \times n}, y_{1 \times n} \in G(n, k)$. Se define el producto escalar $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ como:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_i x_i \cdot y_i$$

$$Ej.: \vec{x}_{1 \times 6} = 111001$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 =$$

$$\vec{y}_{1 \times 6} = 111000$$

$$= 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

Def. Sean $\vec{x}_{1 \times n}, \vec{y}_{1 \times n} \in G(n, k)$. Se dice que son ortogonales si:

$$\langle \vec{x}_{1 \times n}, \vec{y}_{1 \times n} \rangle = 0$$

Propiedad: La suma de vectores ortogonales entre si produce vectores ortogonales

Propiedad: Si las filas de $G_{k \times n}$ son ortogonales entre si todas las palabras código son ortogonales entre si.

Propiedad: Si las palabras código son todas ortogonales entre si entonces su P_H es múltiplo de 4. Hay que probarlo utilizando

$$P_H(\vec{x} \oplus \vec{y}) = P_H(\vec{x}) + P_H(\vec{y}) - 2 P_H(\vec{x} \cap \vec{y})$$

Ejemplo: $\vec{x} = 111001$

$$\vec{x} \cap \vec{y} = 1100001$$

$$\vec{y} = 110001$$

$$P_H(\vec{x} \cap \vec{y}) = 3.$$

Examen A.

Problema 4.

$$G = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

filas ortogonales

$$n = \text{longitud} = 8$$

$$\vec{x}_{1 \times n} \in G.$$

$$k = \text{dimension} = 4$$

dc.

Las filas de G son linealmente independientes puesto que son ortogonales entre sí.

El código cumple que dados dos palabras código $\vec{x}_{1 \times n}, \vec{y}_{1 \times n}$:

$$P_H(\vec{x} \oplus \vec{y}) = P_H(\vec{x}) + P_H(\vec{y}) - 2P_H(\vec{x} \cdot \vec{y}) \quad (\text{multiplo de 4})$$
$$\begin{matrix} 4 & 4 & - & 2 \cdot 2 & = & 4 \end{matrix}$$

Por lo tanto todas las palabras código tienen $P_H = 4$.

NOTA: Para obtener la p.c.:

- 1) calcular el menor número de columnas de H linealmente dependientes.
- 2) Si las columnas de H son todas de P_H impar $\Rightarrow$ todas las p.c son de P_H par $\Rightarrow$ dc. par.
- 3) Si H tiene una fila de "1" lo mismo.
- 4) Si las filas de G son todas de P_H par $\Rightarrow$ lo mismo.
- 5) Si las filas de G son $\perp$ entre sí entonces todas la p.c tienen $P_H = 4$ (probarlo)

calculo de la distribución de pesos de los p.c:

Como $\vec{1}_{1 \times 8} \in C \Rightarrow$ la distribución de pesos es simétrica:

2^k
" "
 $2^4 = 16$

A_i	A_{8-i}	n°
0	8	1, 1
1	7	0
2	6	0
3	5	0
4	4	14

No existen est.p.c. puesto que $dc = 4$. (menores de $dc = 4$)

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_4 &= 14 \\ A_8 &= 1 \end{aligned}$$

b) Repita el apartado anterior para el código generado por:

$$G = \begin{pmatrix} G_{4 \times 8} & 0 \\ 0 & G_{4 \times 8} \end{pmatrix}$$

8×16 4×8

Las filas de cada bloque no son linealmente independientes por tanto las de G tampoco $\Rightarrow$ son ortogonales.

$$n = 16$$

$$k = 8$$

$$dc = 4$$

En este código $\vec{1}_{1 \times 16} \in C$ puesto que $\vec{1}_{1 \times 8} \in$ al código generado

por G .

no hay

A_i	A_{n-i}	n°
0	16	(1, 1)
A_4	A_{12}	28, 28
A_8	A_8	$256 - 58 = 198$

$$\hat{A}_4 = 2 \cdot A_4 = 2 \cdot 14 = 28$$

Cada bloque de $\hat{G}$ genera $\hat{A}_4$ palabras de $P_H = 4$.

$$\begin{aligned} \hat{A}_4 &= 28 \\ \hat{A}_{12} &= 28 \\ \hat{A}_8 &= 198 \\ \hat{A}_0 &= 1 \\ \hat{A}_{16} &= 1 \end{aligned}$$

May porque son múltiplos de 4.

JUNIO 2011

5. $H = \left(I_5 \mid \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$

a) Obtenga la distribución de pesos de los errores corregibles.

Probamos si $\vec{1}_{1 \times 10} \in C$. Calculamos el síndrome:

$$\vec{1}_{1 \times 10} \cdot H_{10 \times 15}^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) = \vec{0}_{1 \times 5} \Rightarrow \vec{1}_{1 \times 10} \in C.$$

Por tanto, la distribución de pesos de las p.c es simétrica:

A_i	A_{10-i}	n°
0	10	1, 1
1	9	0
2	8	0
3	7	0
4	6	15, 15
5	5	0

$A_3 = 1$
 $A_4 = 15$
 $A_6 = 15$
 $A_{10} = 1$

de no poder ser 3 puesto que tiene que ser par, porque las columnas de H son impares.

Como las columnas de H son de P_H impar todas las p.c son de P_H par.

dc = 4, 4 columnas de H linealmente indep. $3^\circ = 4^\circ = 5^\circ = 6^\circ$

b) Obtenga la distribución de pesos de las palabras del código

Los errores corregibles son los que están en la tabla de síndromes.

$$2^5 = 32 \left\{ \begin{array}{l} \vec{s}_{1 \times n-k} \\ \vec{e} \\ P_H(\vec{e}) \end{array} \right.$$

00000
 11111

Construimos la siguiente tabla.

$P_H(\vec{s}_{1 \times 5})$	0	1	2	3	4	5
$u =$	1	5	$\binom{5}{2} = 10$	$\binom{5}{3} = 10$ $\swarrow \searrow$ 5×5	$\binom{5}{4} = 5$	1
$P_H(\vec{e}_{1 \times 10})$	0	1	2	1 3	2	3

Todos los síndromes de $P_H = 1$ están en columnas de H .

Los síndromes con $P_H = 2$ se obtienen con la comb. lineal de 2 columnas de H (en parte identidad)

5 síndromes con 3 unos con error simple

* Si coinciden con columnas de $H \Rightarrow$ error simple.

Los otros 5 tienen error triple puesto que se obtienen combinando 3 columnas de H .

Los pesos de errores corregibles son:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1 \\ \alpha_1 &= 10 \\ \alpha_2 &= 10 + 5 = 15 \\ \alpha_3 &= 5 + 1 = 6 \end{aligned}$$

Parte izquierda examen 28 noviembre 2012.

Problema 3.

$$G = (I_7 | P_7)$$

$$G = \left(I_7 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

a) Distribución de pesos de las palabras código.

$$n = 14$$

$$k = 7$$

El vector $\vec{1}_{1 \times 14} \notin G$. No se obtiene porque no se obtiene como la comb. lineal de las las filas de G . por estar esta en forma sistemática.

Obtendremos los pesos de las p.c a partir de las filas de G :

$$1 \text{ Fila} \rightarrow P_H = 7 \rightarrow n^\circ : 7.$$

$$2 \text{ Filas} \rightarrow P_H = 4 \rightarrow n^\circ = \binom{7}{2} = 21$$

$$3 \text{ Filas} \rightarrow P_H = 7 \rightarrow n^\circ = \binom{7}{3} = 35$$

$$4 \text{ Filas} \rightarrow P_H = 8 \rightarrow n^\circ = \binom{7}{4} = 35$$

$$5 \text{ Filas} \rightarrow P_H = 7 \rightarrow n^\circ = \binom{7}{5} = 21$$

$$6 \text{ Filas} \rightarrow P_H = 12 \rightarrow n^\circ = \binom{7}{6} = 7$$

$$7 \text{ Filas} \rightarrow P_H = 7 \rightarrow n^\circ = 1$$

$$127$$

$$P_H = 0 \rightarrow 128$$

$$A_0 = 1$$

$$A_4 = 21$$

$$A_7 = 64$$

$$A_8 = 35$$

$$A_{12} = 7$$

NOTA: En un código o todas las palabras son de P_H par o la mitad de peso par y la otra mitad de peso impar.

1. ¿Cuál es la probabilidad de detectar un error de transmisión?

$$P(\text{detectar 1 error}) = 1 - P(\text{no detectar el error}) = 1 - P(\vec{e} \in C) =$$

$$= 1 - \left[21 \cdot p^4 (1-p)^{n-4} + 64 \cdot p^7 (1-p)^{n-7} + 35 \cdot p^8 (1-p)^{n-8} + \right. \\ \left. + 7 \cdot p^{12} (1-p)^{n-12} \right]$$

Considero solo ↑
los errores no nulos

2. Probabilidad de decodificar incorrectamente.

Los pesos de los errores corregibles serán:

$P_H(\vec{s}_{1 \times n-k})$ 1×7	0	1	2	3	4	5	6	7
$n=0$	1	7	$\binom{7}{2}=21$	$\binom{7}{3}=35$	$\binom{7}{4}=35$	$\binom{7}{5}=21$	$\binom{7}{6}=7$	1
$P_H(\vec{e})$	0	1	2	3	3	2	1	2

$\nearrow$ en I_7 $\nearrow$ en P_7 $\nearrow$ 1 de P_7 otra de I_7 $\nearrow$ están en columnas de H (en P_7)
 Tarea de P_7 otra de I_7 .

Los pesos de los errores corregibles son:

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = 14$$

$$\alpha_2 = 43$$

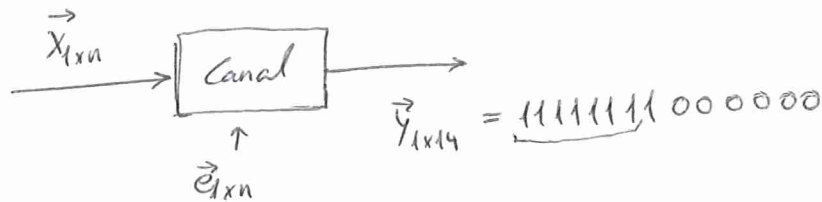
$$\alpha_3 = 70$$

$$\sum = 128 = 2^{n-k} = 2^7$$

$$P(\text{decodificar incorrectamente}) = 1 - P(\vec{e} \text{ esté en la tabla de síndromes}) =$$

$$= 1 - \left[(1-p)^n + 14(1-p)^{n-1} + 43 \cdot p^2 (1-p)^{n-2} + 70 p^3 (1-p)^{n-3} \right]$$

c)



1) $\vec{Y}_{1 \times 14} \in C$? No pertenece al código porque la única forma de obtener una palabra código con los primeros 7 bits no nulos es la combinación lineal de todos los columnas de G y esto no da lugar a la secuencia recibida.

La secuencia recibida está a distancia 1 de la palabra código 11111110000000. Por tanto el error estimado será:

$$\vec{e}_{1 \times 14} = 0000000 1000000$$

$$\vec{X}_{est} = \vec{Y}_{1 \times 14} \oplus \vec{e}_{est} = 1111111 0000000$$

28 novembre 2012.

$$H_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, r \geq 2$$

$r-1 \times 2^r$ H_r $r \times 2^{n-1}$

Código Hamming $\Rightarrow r = n - k$

H_r es la matriz de código Hamming de r bits de redundancia.

longitud: $n = 2^r$
 dimension: $k = n - (n - k) = 2^r - (r + 1)$
 $dc =$

Prop. Códigos Hamming:

$$\begin{cases} \bullet n = 2^{n-k} - 1 \\ \bullet dc = 3 \end{cases}$$

• 1-perfectos: solo corrigen los errores simples y ninguno más.

$$H_r = H_{(n-k) \times n} = H_{(r \times 2^{r-1}) \times 2^r - 1}$$

$r = n - k$
 $n = 2^{n-k} - 1 = 2^r - 1$

$$2^{n-k} \left\{ \begin{array}{c|c} S_{1 \times n-k} & P_H(\vec{e}) \\ \hline & 0 \\ & 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ n = 2^{n-k} - 1 \end{array}$$

Como las filas de $\bar{H}$ son linealmente independientes (lo son las filas de H por su propia construcción y la nueva fila es independiente de las demás)

→ ¿dc?

- $dc > 2$ porque no existen 2 columnas iguales de $\bar{H}$.
- $\bar{H}$ tiene una fila de 1 $\Rightarrow$ dc es par

$$\boxed{dc = 4}$$

En el primer bloque de la matriz $\bar{H}$ existen 3 columnas cuya combinación lineal es:

$$\begin{matrix} \text{resultado} \rightarrow \\ \text{suma 3 column de } H. \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \text{última columna} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Errores no detectables son los que coinciden con los p.c.
- Errores corregibles son los que están en la tabla de síndromes.

b) Errores corregibles $\rightarrow$ tabla síndromes.

$$P_H(e) \leq \left\lceil \frac{dc-1}{2} \right\rceil = 1$$

$S_{1 \times n-k}$ $1 \times 7+1$	$P_H(\vec{e})$	n°
0 0	0	1
2^{7+1} {	1 todas	$n = 2^7$
	2	$2^{7+1} - (2^{7+1}) = 2^7 - 1$

← errores simples.

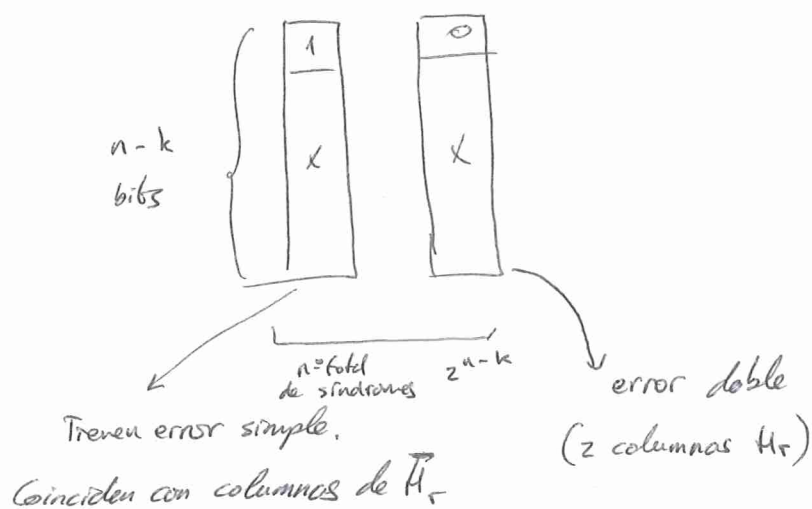
Vamos a probar que solo corrige errores simples y dobles.

Hay que probar que solo se corrigen errores simples y dobles.

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = 2^7$$

$$\alpha_2 = 2^7 - 1$$



En efecto es así porque las síndromes con la primera componente no nula coinciden con columnas de H , tienen por tanto asociado error simple. El resto de síndromes se obtienen como la combinación lineal de dos columnas de H , tienen por tanto asociado error doble. Esto es así por H_r tiene en sus columnas todas las combinaciones binarias no nulas con r bits.

c) Muestre que $1 \in H_r$.

Como H_r tiene un número impar de columnas (tiene todas las combinaciones binarias), H_r tiene un número par por tanto el síndrome es nulo puesto que la 1ª componente del síndrome es nula y el resto de componentes del síndrome también son nulas porque H_r tiene todas sus filas de P_H por.

d)

$$\overline{H}_3 = \begin{pmatrix} 11 & \dots & 1 \\ & & 0 \\ & H_3 & \\ & & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4×8 H_3

$\vec{y}_{1 \times 8} = 11100000$. Buscamos la x_{est}
 1×8

1) $\vec{s}_{1 \times n-k} = \vec{s}_{1 \times 4} = \vec{y}_{1 \times 8} \cdot H_{8 \times 4}^T = 1110$

$\vec{y}_{1 \times 8} \notin C \Rightarrow \exists \vec{e}_{1 \times 8}$

Como el síndrome coincide con una columna de $\overline{H}_3$ entonces tiene asociado un error simple:

$$\vec{e}_{est} = 00000100$$

1×8

$$\vec{x}_{est} = \vec{y}_{1 \times 8} \oplus \vec{e}_{1 \times 8} = 11100100$$

1×8

4-nov-2014

Propiedades detectoras de ráfagas.

Def: ráfaga: Se denomina ráfaga a un determinado patrón de errores. Su longitud se calcula como:

$$l = n - k$$

↑
long. del código

k: n° máximo de "0" consecutivos.

Códigos cíclicos:

$$X(x) = 1 \cdot x^5 + 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^0 = x^5 + x^4 + x + 1$$

Existen las siguientes propiedades detectoras de ráfagas:

a) se detectan todas las ráfagas de $l \leq n - k$.

Justificación:

$l \leq n - k \Rightarrow \text{grado} \leq n - k - 1 \Rightarrow \notin G$ ya que el menor grado en el código es el $s(x) = n - k$.

b) La única ráfaga que no se detecta de $l = n - k + 1$ es $g(x)$.

Justificación:

$l = n - k + 1 \Rightarrow \text{grado} = n - k$. La única que pertenece al código con este grado es $g(x)$.

c) La fracción de ráfagas no detectables de $l \geq n - k + 1$ es $2^{-(n-k)}$

Prop: La longitud máxima de una ráfaga de $P_H = w$ es

$$l_{\max} = n - \left\lceil \frac{n-w}{w} \right\rceil$$

FOTOCOPIADO

Boletín 5

Problema 3. C código binario $[15, 4]$ de polinomio generador.

$$g(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)$$

a) $dc = 6$ A partir de las propiedades detectoras:

- $dc \geq 2$
- Como $g(x)$ tiene P_H par (tiene a $(x-1)$ como factor)
 $\Rightarrow$ todos los p.c son de P_H par $\Rightarrow$ es par.

- $g(x)$ tiene como factor a un polinomio primitivo de grado $r=4$.

$$n \leq 2^r - 1$$

$$15 \leq 2^4 - 1 = 15 \Rightarrow \text{Detecta todos los errores dobles}$$

$$\underline{\underline{dc \geq 4}}$$

Tema 4. Códigos cíclicos

1. Introducción

Def. Código cíclico. Es un código lineal que cumple la condición de que dada una palabra código $\vec{x}_{1 \times n}$, cualquier desplazamiento cíclico de esa palabra sigue siendo del código.

Notación polinómica:

$$\vec{x}_{1 \times 6} = 100111$$

$$[X(x) = x^5 + 0 \cdot x^4 + 0x^3 + 1x^2 + 1x + 1x^0 = x^5 + x^2 + x + 1]$$

Prop. En un código cíclico $C(n, k)$ el mayor grado de cualquier polinomio del código es $n-1$.

Desplazamientos cíclicos

$$X(x) = \begin{matrix} x^5 & * & x^2 + x + 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

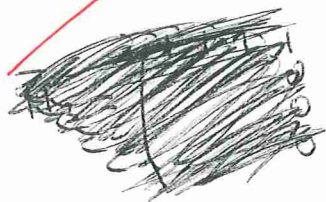
$$x \cdot X(x) \bmod (x^n + 1) = \cancel{x^6 + x^3 + x^2 + x} \quad x^3 + x^2 + x + 1 \Leftrightarrow \text{desplazamiento cíclico a la izquierda}$$

$$\begin{array}{r} x^6 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ \underline{x^6 + 1} \\ x^3 + x^2 + x \end{array}$$

$x^i X(x) \bmod (x^n + 1)$ equivale a realizar i desplazamientos cíclicos a la izquierda.

c) ~~Calcular el síndrome este es nulo, puesto que; $\bar{H}_r$ tienen un número par de columnas, ya que H_r tienen un n° impar. Entonces la primera componente del síndrome es nula y el resto de componentes del síndrome también son nulos porque H_r tiene todas sus filas de P_H par.~~

d) ~~+~~



~~$$\bar{H}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$~~

~~$$n=8$$

 $n-k=4 \Rightarrow k=4 \quad C(8,4)$~~

~~$$\vec{V}_{1 \times 8} = 11100000$$~~

Buscamos la $\vec{e}_{estimada}$ para eso:

~~$$1) \vec{s}_{1 \times n-k} = \vec{s}_{1 \times 4} = \vec{V}_{1 \times 8} \cdot H_{8 \times 4}^T = 1111 \Rightarrow \vec{V}_{1 \times 8} \notin C \Rightarrow \exists \vec{e}_{1 \times 8}$$~~

El error asociado es simple, puesto que el síndrome coincide con una columna de

~~$$\bar{H}_3$$~~

~~$$\vec{e}_{est} = 00000010$$~~

~~$$\vec{X}_{est} = \vec{V}_{1 \times 8} + \vec{e}_{est} = 11100010$$~~

Prop. En un código cíclico (n, k) , i desplazamientos a la izquierda equivalen a $n-i$ a la derecha.

2. Polinomio generador

Toda palabra código $X(x)$ en "código cíclico" cumple:

$$X(x) = a(x) \cdot g(x)$$

↓
polinomio generador

Propiedades de $g(x)$:

a) $g(x)$ es el polinomio de menor grado que pertenece al código.

b) El grado de $g(x)$ es $(n-k)$

c) $g(x)$ es el único polinomio de grado $(n-k)$.

d) El término independiente ^(grado 0) en $g(x)$ siempre es no nulo.

e) Si $g(x)$ genera un código cíclico entonces $g(x)$ es factor de $x^n + 1$, siendo n la longitud del código.

Ejemplo:

Obten el código de menor longitud generado por $g(x) = x^3 + x + 1$

$$(n-k) = 3$$

Como $g(x)$ debe ser factor de $x^n + 1$:

$$x^n + 1 = h(x) \cdot g(x)$$

$$\begin{array}{r} 1011 : g(x) \\ 1011 : xg(x) \\ \hline 11101 \\ 1011 : x^2g(x) \\ \hline 110001 \\ 1011 : x^3g(x) \\ \hline 1000001 \Rightarrow x^7 + 1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} (x^7 + 1) = (1 + x + x^2 + x^4) \cdot g(x) \\ \boxed{h = 7} \end{array} \right\}$$

$$k = 4$$

3. Propiedades detectoras

Además de las propiedades de códigos lineales los ciclos cumplen:

- a) Siempre detectan los errores simples. $\Rightarrow d_c \geq 2$
- b) Si $g(x)$ tiene número par de términos (P_H par), todas las palabras código van a tener P_H par $\Rightarrow$ se detectan todos los errores de P_H impar.

d_c es par

c) Def. Polinomio primitivo: Sea $p(x)$ un polinomio primitivo. Entonces cumple:

- Es irreducible
- Es factor de $x^{n'} + 1$; $n' = 2^r - 1$; $r \equiv \text{grado}(p(x))$
- Si $g(x)$ tiene un polinomio primitivo como factor y la n del código es $\Rightarrow n \leq 2^r - 1$, entonces detecta todos los errores dobles.

Ejemplo: Obtén la d_c del código cíclico $C(7,4)$ generador por

$g(x) = x^3 + x + 1$. Nota: $x^3 + x + 1$ es primitivo.

A partir de propiedades detectoras.

a) $d_c \geq 2$

~~ad~~
c) $g(x)$ tiene un primitivo como factor

$\hat{?} n \leq 2^r - 1$? $7 \leq 2^3 + 1 \Rightarrow$ sí que se cumple $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ detecta todos los errores dobles $\Rightarrow d_c \geq 3$

$d_c = 3$, porque $g(x)$ pertenece al código y tiene

$P_H = 3$

Nota: Matriz generadora en códigos cíclicos.

$$C(n,k) = C(7,4) \quad g(x) = x^3 + x + 1$$

$$G_{k \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x^3 g(x) \\ \leftarrow x^2 g(x) \\ \leftarrow x g(x) \\ \leftarrow g(x) \end{matrix}$$

4×7

Para que $G_{k \times n}$ sea sistemática

$$G_{k \times n} = (I_k \mid \begin{matrix} \leftarrow i=n-1 \\ \leftarrow i=n-k \\ \uparrow x^i \text{ mod } g(x) \end{matrix}) \quad g(x), i: n-k, \dots, n-1.$$

Problema 4

$$g(x) = (x+1)^2(x^3+x+1) = (x^2+1)(x^3+x+1)$$

$$(x+1)^2 = x^2 - 2x + 1 = x^2 + 1$$

$$2x = x + x = 0$$

$G_{k \times n}$

$$\text{grado}(g(x)) = n - k = 5$$

Calculamos n

(x^3+x+1) : por ser primitiva es factor de $x^n+1 = x^7+1$

$$n' = 2^n - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

(x^2+1) es factor de todo $x^n+1 \mid n=2^m$

En general x^h+1 es factor de todo x^n+1 , $n=2^m$ (múltiplo de 2)

n es el menor pr múltiplo de 7 $\Rightarrow$

$$C(n,k) = C(14,9)$$

$n = 14$
$k = 9$

$$n - k = 5$$

d.c

De las propiedades detectoras:

• $d_c \geq 2$

• $g(x)$ P.H. par $\Rightarrow$ d_c par, todas las p.c son de P.H. par.

• $g(x)$ tiene un primitivo como factor.

$$n \leq 2^3 - 1 \Rightarrow 14 \neq 7$$

$\Rightarrow$ No podemos asegurar que detecte todos los dobles en esta propiedad.

Lo que se cumple es que se detectan todos aquellos errores dobles cuyos bits no estén en las primeras 7 posiciones de la palabra, y sus desplazamientos cíclicos. El único polinomio que no cumple lo anterior es $x^7 + 1$

Hay que comprobar si $x^7 + 1$ pertenece o no al código. Si no pertenece será detectable. Para que pertenezca debe ser divisible por $g(x)$ y no lo es. (Hemos comprobado que $n=14$). Todos los errores dobles son detectables $\Rightarrow d_c \geq 2$. $\frac{1}{2}$

$$\boxed{d_c = 4}$$

$g(x) \in C$, tiene P.H. = 4

Problema 6

$$g(x) = (x-1) \overbrace{(x^7+x^3+1)}^{\text{primitivo}}$$

$$g(x) = x^8 + x^4 + x - x^7 - x^3 - 1 = x^8 - x^7 + x^4 - x^3 + x - 1$$

$$\text{grado}(g(x)) = n - k = 8$$

• Calculamos n

$g(x)$ es factor $x^n + 1$.

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow x^7 + x^3 + 1 &: \text{por ser primitivo es factor de } x^{n'} + 1 = x^{127} + 1 \\ n' &= 2^k - 1 = 127 \\ &= 2^7 - 1 = 127 \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow x-1 \text{ es factor de } x^n + 1$$

$$\left\{ \boxed{n=127}, n-k=8, k=127-8, \boxed{k=119} \right.$$

$$\boxed{C(127, 119)}$$

¿dc? De las propiedades detectoras:

$$\bullet dc \geq 2$$

• Como $P_H(g(x))$ es par $\Rightarrow$ dc par, todos los p.c. son de P_H par.

• $g(x)$ tiene un primitivo como factor

$$n \leq 2^7 - 1 \Rightarrow 127 \leq 127 \Rightarrow \text{detecta todos los errores de bñ.}$$

$$dc \geq 3 \Rightarrow dc \geq 4$$

~~dc ≥ 3~~

$$\begin{array}{r}
 110011011 : g(x) \\
 110011011 : xg(x) \\
 \hline
 1010101101 \\
 110011011 : x^2 g(x) \\
 \hline
 10001000001 : g \Rightarrow g(x)(1+x+x^2)
 \end{array}$$

b) Será capaz de corregir todos los ~~errores~~ errores tales que:

$$P_H(\vec{e}_{ixn}) \leq \left\lfloor \frac{d_c - 1}{2} \right\rfloor \Rightarrow \text{corrige todos los errores simples.}$$

como $d_c \geq 4$

2^8
11
256

$\vec{s}_{1 \times 8}$	$P_H(z)$	n°
0...0	0	1
	1	$n=127$

128

no se pueden corregir todos los errores dobles porque no caben en la tabla de síndromes.

errores dobles en total: $\binom{n}{2} = \binom{127}{2} = \frac{127!}{2! \cdot 125!} = \frac{127 \cdot 126}{2}$

$\Downarrow$
 $d_c = 4$

no puede ser 6 ya que si no debería corregir todos los errores dobles.

$$P_H(\vec{e}_{ixn}) \leq \left\lfloor \frac{d_c - 1}{2} \right\rfloor$$

- Propiedades detectoras de ráfagas.

Def. Se denomina ráfaga a un determinado patrón de errores. Su longitud se calcula como

$$l = n - R$$

$n \equiv$ longitud código

$R \equiv n^2$ máximo de bit cero consecutivos.

Ejemplo:

$$n=15$$

$$100000100010001 \rightarrow l = n - R = 15 - 5 = \underline{10}$$

El grado de una ráfaga de longitud l es $l-1$.

Existen las siguientes propiedades detectoras de ráfagas.

a) Se detectan todas las ráfagas de $l \leq n-K$

Justificación:

$l \leq n-K \Rightarrow \text{grado} \leq n-K-1 \Rightarrow \notin G$ ya que el menor grado en el código es el de $g(x) = n-K$

b) La única ráfaga que no se detecta de $l = n-K+1$ es $g(x)$.

Justificación:

$$l = n-K+1 \Rightarrow \text{grado} = n-K$$

La única que pertenece al código con este grado es $g(x)$.

c) La fracción de ráfagas no detectables de longitud $> n-K+1$ es $2^{-(n-k)}$

Junión
a techo

Prop. La l máxima de una ráfaga de $P_H = w$ es $l_{\max} = n - \lceil \frac{n-w}{w} \rceil$

Problema 3

$$C[15,4]$$

$$g(x) = (x-1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)$$

$$a) d_c = 6$$

A partir de las propiedades detectoras:

$$-d_c \geq 2$$

- Como $g(x)$ tiene P_H par (tiene a $(x-1)$ como factor) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ todas las palabras código tienen P_H par $\Rightarrow d_c$ par

- $g(x)$ tiene como factor a un polinomio primitivo de grado 4.

$$n \leq 2^r - 1, \quad 15 \leq 2^4 - 1 \quad \checkmark$$

$\Downarrow$
Detecta todos los errores dobles.

$$\Downarrow$$
$$d_c \geq 4$$

$$g(x) = (x^3+x^2+x+1)(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) = x^{11}+x^{10}+x^6+x^5+x+1$$

• Hay que probar que no $\exists$ palabras código de $P_H = 4$ en el código.
Suficiente probar que todas las raíces de $P_H = 4$ son detectables.

La longitud máxima de una raíz de $P_H = w$ cumple:

$$L_{\max} = n - \frac{n-w}{w} \quad \text{En este caso}$$

$$L_{\max} = 15 - \frac{15-4}{4} = 12 \quad ; \text{ Por propiedades de raíces sabemos:}$$

* $l = n-k = 11$, son todos detectables

* $l = n-k+1 = 12$, la única que pertenece al código es $g(x)$ y $g(x) \neq$ no tiene

$P_H = 4 \Rightarrow$ que no hay palabras de $P_H = 4$ en el código.

$$(x^3 + x^2 + x + 1) (x^7 + \cancel{x^4} + x + x^3 + 1) \Rightarrow \boxed{g(x) = x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x + 1}$$

$$x^{11} + \cancel{x^7} + x^5 + \cancel{x^4}$$

$$x^{10} + x^6 + \cancel{x^4} + \cancel{x^3}$$

$$\cancel{x^7} + x + 1$$

Hay que probar que no existen p.c de $P_H = 4$ en el código $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Suficiente probar que todas las ráfagas de $P_H = 4$ son detectables.

La longitud máxima de una ráfaga de $P_H = w$ cumple:

$$l_{\max} = n - \left\lceil \frac{n-w}{w} \right\rceil. \text{ En este caso:}$$

$$l_{\max} = 15 - \left\lceil \frac{15-4}{4} \right\rceil = 12$$

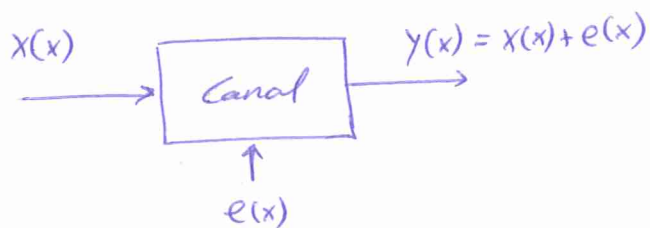
Por propiedades de ráfagas sabemos:

- $l \leq n-k = 11$ son todos detectable.
- $l = n-k+1 = 12$ La única que pertenece al código es $g(x)$ y $g(x)$ no tiene $P_H = 4$.

Por tanto no existen en el código p.c de $P_H = 4$.

$dc \geq 6$, Como $g(x) \in$ al código y $g(x)$ tiene $P_H = 6 \Rightarrow \boxed{dc = 6}$

4. Corrección de errores



Def. síndrome:

$$S(x) = y(x) \bmod f(x)$$

$$S(x) = 0 \Rightarrow y(x) \in \mathcal{C}.$$

Para calcular $x_{\text{est}}(x)$:

a) Calculamos $S(x)$.

$$\text{si } S(x) = 0 \Rightarrow y(x) = x_{\text{est}}(x).$$

b) si $S(x) \neq 0 \Rightarrow y(x) \notin \mathcal{C} \Rightarrow \exists e(x)$.

$e_{\text{est}}(x) = S(x)$ siempre que este sea un error corregible.

$$x_{\text{est}}(x) = y(x) + e_{\text{est}}(x)$$

Problema 2. $g(x) = x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1$

Los códigos lineales, por tanto también los códigos, corrigen todos aquellos errores tales que:

$$P_H(\vec{e}) \leq \left\lceil \frac{d-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{7-1}{2} \right\rceil = 3$$

$n-k = \text{grado}(g(x)) = 11$

$\vec{s}_{1 \times n-k}$ 1×11	$P_H(\vec{e})$	n^o
	0	1
	1	$n=23$
	2	$\binom{23}{2}$
	3	$\binom{23}{3}$

2^{11}

$X_{\text{est}}(x)$?

$$Y(x) = \cancel{x^{13}} + \cancel{x^8} + \cancel{x^6} + \cancel{x^5} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + x + 1$$

$$\cancel{x^{14}} + \cancel{x^9} + \cancel{x^7} + \cancel{x^6} + \cancel{x^5} + \cancel{x^4} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{1}$$

0

$$\begin{array}{r} x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1 \\ x^2 + 1 \end{array}$$

Calcular $S(x)$

$$S(x) = Y(x) \bmod g(x)$$

$$S(x) = 0$$

$$Y(x) \in \mathcal{C} :$$

$$X_{\text{est}}(x) = Y(x)$$

$$\cancel{x^{16}} + \cancel{x^{14}} + \cancel{x^{13}} + \cancel{x^{12}} + \cancel{x^{11}} + \cancel{x^8} + \cancel{x^6} + \cancel{x^5} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{1}$$

$$\cancel{x^{13}} + \cancel{x^{10}} + \cancel{x^8} + \cancel{x^6} + \cancel{x^5} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{1}$$

$$x^{10} + \cancel{x^9} + \cancel{x^7} + \cancel{x^6} + \cancel{x^5} + \cancel{x^4} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{1}$$

$$\begin{array}{r} x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1 \\ x^5 + x^2 + 1 \end{array}$$

$$S(x) = x^{10} + x^8 + x^2$$

Como nuestro código corrige todos los errores triples $e_{\text{est}}(x) = S(x)$

$$X_{\text{est}}(x) = Y(x) + e_{\text{est}}(x) = x^{16} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^3 + x^2 + x + 1$$

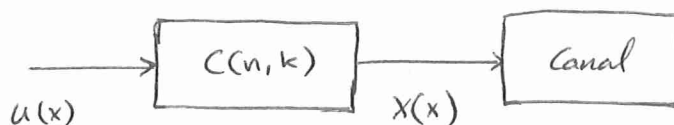
$$X_1(x) = x^{14} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3$$

BOLETIN 5 NOVEMBRE.

Problema 5.

c (15, 10) $f(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$

1.



$$k = 0$$

$$u(x) = x$$

$$\chi(x) = x^{n-k} \cdot u(x) + r(x)$$

$$v(x) = x^{n-k} \cdot u(x) \bmod f(x)$$

$$x^{n-k} \cdot u(x) = x^5 \cdot x = x^6$$

$$r(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{r} \cancel{x^6} \\ \cancel{x^5} + x^3 + x \\ \hline x^4 + x^3 + x + x^2 + x + 1 \end{array}$$

$$\chi(x) = x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

2. $p_1(x) = x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$ $g(x)$ es la p.c de menor grado. (grado 5)

$P_1(x)$ no pertenece al código porque todas las p.c tienen P_H por.

Esto es así porque $g(x)$ tiene PH por y y todas las p.c se obtienen como suma de versiones desplazadas de $g(x)$: $x(x) = u(x) \cdot g(x)$

$$p_2(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^5.$$

$\longrightarrow x^4 + x^3 + x^2 + 1.$
 desplazándolo
 cíclicamente

Por tanto no pertenece al código porque existe un desplaz. cíclico de $p_2(x)$ con grado menor que el de $g(x)$.

$$p_3(x) = x^{15} + x^8 + x^7 + x^5.$$

No pertenece al código porque el mayor grado posible en el código es $n-1$.

Examen 24 de mayo 2011.

Problema 4. $g(x) = x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$ genera un código cíclico $[17, 9]$.

a) Muestra que no existen p.c. de $P_H = 2$.

Hay que probar que todas las ráfagas de $P_H = 2$ son detectables.

$$l_{\max} = n - \left\lceil \frac{n-w}{w} \right\rceil = 17 - \left\lceil \frac{17-2}{2} \right\rceil = 17 - 8 = 9$$

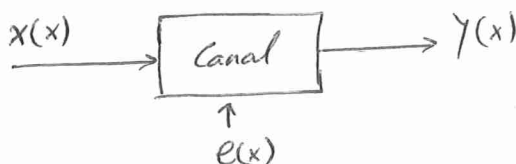
Utilizando las prop. detectoras de ráfagas:

a) $l \leq n-k = 8$ son detectables.

b) $l = n-k+1 = 9$ la única que pertenece al código es $g(x)$ y $g(x)$ no tiene $P_H = 2$

Por tanto, no existen p.c. de $P_H = 2$.

b)



$\hat{x}_{est}(x)$?

$$y(x) = \cancel{x^{14}} + \cancel{x^9} + \cancel{x^7} + x^5 + x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^9 + x^8 + x^6 + x^8 + x^3 + x + x \\ \underline{x^4 +} \\ (x^5) \end{array}$$

$$S(x) = y(x) \bmod g(x)$$

$$\begin{array}{r} x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \\ \underline{x^3 + x + 1} \end{array}$$

$S(x) = x^5 \Rightarrow y(x)$ no pertenece al código, existe error.

$dc > 3$ (enunciado) $\Leftrightarrow dc \geq 4$

$$P_H(e) \leq \left\lceil \frac{dc-1}{2} \right\rceil$$

$e(x) = x^5$ es corregible porque el código corrige todos los simples.

$$\boxed{\hat{x}_{est}(x) = y(x) + x^5}$$

Dictado:

Problema 4: $g(x) = (x-1)^2 (x^7 + x^3 + 1)$ $C(254, 245)$

NOTA: $x^7 + x^3 + 1$ es $p(x)$.

a) Justifiquelo

$$(x-1)^2 = x^2 + 1$$

- $(x-1)^2$ divide a todo $x^n + 1$, $n = 2^i$
- $x^7 + x^3 + 1$: por ser primitivo divide a todo

$$x^{n'} + 1 = x^{127} + 1 \text{ a todo } x^n + 1 \quad n = 127$$

$$n' = 2^7 - 1 = 2^7 - 1 = 127$$

$$n = 254$$

$$n - k = \text{grado } g(x) = 9 \Rightarrow k = 254 - 9 = 245$$

Examen Enero 2017.

Problema 8. Una familia de códigos lineales queda definida por la matriz de comprobación de paridad con la siguiente estructura:

$H \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & & V_{m-1} \end{pmatrix}$. Siendo V_{m-1} una matriz por bloques cuyas columnas son todos los vectores binarios de longitud $m-1$. Calcula longitud, dimensión y distancia.

$$V_{m-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ m-1 \end{matrix}} & \dots & \boxed{} \end{pmatrix}$$

2^3

$$H_{m \times 2^{m-1}} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & & V_{m-1} \end{pmatrix}$$

$n - k \times n$

Las filas de H son todos linealmente independientes por la propia construcción de la matriz V_{m-1} .

Problema 4 (2 puntos) Considere el código lineal de matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} P_{m/2} & I_{m/2} \end{pmatrix}$$

en donde $I_{m/2}$ denota la matriz identidad de orden $m/2$ y $P_{m/2}$ es la matriz que tiene por columnas todos los vectores binarios de peso $m/2$. Para $m = 6$ obtenga:

- La longitud, dimensión y distancia del código.
- La probabilidad de decodificar incorrectamente al transmitir sobre un canal binario simétrico con $p = 0,05$.

a) Puesto que existen $\binom{m}{m/2}$ vectores binarios de longitud m y peso $m/2$, la matriz H tiene dimensiones $m \times m = \binom{m}{m/2}$, que para $m = 6$ es igual a 26. En consecuencia, se trata de un código lineal [26, 20]. Para encontrar la distancia, observe que, como $m/2$ es impar, todas las columnas de H son de peso impar, por lo que la distancia del código es necesariamente par. Y como todas esas columnas son distintas, $d_C \neq 2$. Pero es trivial encontrar 4 columnas de H linealmente independientes, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

lo que demuestra que la distancia es 4.

b) Para calcular esta probabilidad es preciso conocer la distribución de pesos de los errores corregibles. Puesto bien, a la vista de H , cualquier síndrome de peso 1 —hay m distintos— estará asociado a un vector de error de peso 1; idem para los síndromes de peso $m/2 = 3$, de los que existen $\binom{m}{m/2}$; los síndromes de peso 2 se corrigen, al igual que los de peso $m/2 - 1 = 1$, también se asocian con errores de peso 2; y, por último, los síndromes de peso $m - 1 = 5$ permiten corregir errores de peso 3, habiendo m de tales síndromes. En consecuencia, la distribución es

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = m = \binom{m}{m/2} = 26, \alpha_2 = 1 + \binom{m}{2} = \binom{m}{m/2 + 1} = 31, \alpha_3 = m = 6$$

y la probabilidad pedida vale

$$1 - \sum_{i=0}^n \alpha_i p^i (1-p)^{n-i} = 1 - q^{26} - 26pq^{25} - 31p^2q^{23} - 6p^3q^{23} \approx 0,353.$$

Problema 5 (3 puntos)

a) El polinomio $(x-1)(x^2+x+1)$, donde x^2+x+1 es primitivo, genera un código cíclico [127, 119]. Se nos dice que la distancia es 4. ¿Es esto cierto? ¿Por qué?

b) Obtenga la salida del decodificador si se reciben los siguientes vectores

$$x^{21} + x^{20} + x^{15} + x^{12} + x^9 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x - 1, \quad x^7 + x^2 + 1.$$

c) Codifique en forma sistemática el mensaje $x^8 + x^7 + x^2 + 1$.

a) Como $x - 1$ es un divisor de $g(x)$, el código consta únicamente de palabras de peso par, y no contiene palabras de peso 2 porque el factor primitivo $x^2 + x + 1$ garantiza la detección de todos los errores dobles. Pero $g(x) = x^8 + x^7 + x^2 + 1$ es una palabra de peso 4, y se concluye así que la distancia es 4.

b)

$$x^7 + x^2 + 1 \equiv \text{mód } g(x) = x^7 + x^2 + 1,$$

pero el vector recibido $x^7 + x^2 + 1$ está a distancia 1 de $g(x)$. Dado que el código corrige errores de peso 1 (porque $d_C = 4$), la salida del decodificador es $g(x)$. De modo similar

$$x^{21} + x^{20} + x^{15} + x^{12} + x^9 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x - 1 \equiv \text{mód } g(x) = x^6$$

con lo que el vector $g(x) = x^6$ es una palabra del código. Por estar a distancia 1 de ella y poder el código corregir errores simples, se decodifica como $g(x) + x^6$.

c) $m(x)$ es el propio polinomio generador. Así pues, su codificación sistemática es $x^8 m(x)$.

Problema 5 (1.5 punto).

Considere el código cíclico (15, 10) generado por $g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$.

1. Si la codificación es sistemática, ¿qué secuencia produce el codificador para la entrada 0000000010?
2. Razone, sin hacer cálculos, cuál o cuáles de los siguientes polinomios no pueden pertenecer al código: $p_1(x) = x^8 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$, $p_2(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^5$, $p_3(x) = x^{15} + x^8 + x^7 + x^5$.

Solución

1. Si $u(x)$ y $v(x)$ representan, respectivamente, la entrada y la salida elementales del codificador:

$$v(x) = x^{n-k}u(x) + x^{n-k}u(x) \bmod g(x)$$

En este caso, como $u(x) = x$, $n - k = 5$ y $x^6 \bmod g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, se tiene que

$$v(x) = x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,$$

que representa la siguiente secuencia: 000000001011111.

2. Ninguno de los polinomios dados pertenece al código:
 - $p_1(x)$, porque tiene peso impar (cuando $g(x)$ tiene peso par);
 - $p_2(x)$, porque es el resultado de desplazar 5 veces el polinomio $x^4 + x^3 + x^2 + 1$, que no puede ser del código porque tiene un grado menor que el de $g(x)$;
 - $p_3(x)$, porque el código (de longitud 15) no contiene polinomios de grado mayor que 14.

Examen de Fundamentos de Telemática

24 de mayo de 2011

Nombre: _____ D.N.I.: _____

1. Dada la fuente X , de rango $\mathcal{X} = \{i \in \mathbb{Z}^+ : i \leq 4\}$ y función de masa de probabilidad $p_i = \mathbb{P}(X = i) = 2^{-i}$ para $i < 4$, y un canal cuaternario con borrado con probabilidad de error p en la transmisión de cada símbolo

- Determine la información media transmitida por cada símbolo de la fuente cuando se usa directamente el canal (es decir, sin ninguna codificación). (1 punto)
- Si el coste de transmisión de un símbolo por el canal dado es unitario, ¿cuánto estaríamos dispuestos a pagar por un canal cuaternario fiable si queremos transmitir fielmente un mensaje arbitrariamente largo y no importa el tiempo de transmisión? (1 punto)
- Si el régimen de transmisión de ambos canales es idéntico y los costes son los del apartado anterior, ¿cuánto costaría transmitir un mensaje de la fuente de n (arbitrariamente grande) símbolos si se usasen simultáneamente los dos canales? (1 punto)

2. (1 punto) La secuencia

$$A, N, U, L, (1, 2, L), (5, 3, U), Z, (7, 2, Z), (3, 8, N), (1, 2, \emptyset)$$

representa la división en frases del algoritmo LZ77 aplicado a un mensaje. Las ternas tienen el significado (índice, longitud de la frase, sufijo), la primera letra del mensaje tiene índice 1 y $\emptyset$ denota el sufijo nulo. Averigüe el mensaje.

3. La matriz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & I_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es de comprobación de paridad de un código lineal. Resuelva razonadamente las siguientes cuestiones:

- Obtenga la distribución de pesos de los errores corregibles. (1 punto)
 - Considere el subconjunto de palabras del código que comienzan por 0. Obtenga la distribución de pesos de este subcódigo. (1 punto)
4. $g(x) = x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$ genera un código cíclico $[17, 9]$.
- Muestre que no existen palabras del código de peso 2. (1 punto)
 - Tampoco las hay de peso 3. ¿Cuál sería la salida de un decodificador de mínima distancia si se recibe el polinomio $x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + x + 1$? (1 punto)

5. (1 punto) Dos equipos están conectados mediante M enlaces paralelos idénticos con tasa de transmisión C bits/s. ¿Cuál sería la cadencia eficaz agregada si se utiliza una estrategia de envío continuo con rechazo simple para transmitir por cada uno de ellos? Compárela con la cadencia eficaz de un único enlace de tasa de transmisión MC bits/s que usase la misma estrategia y tuviera iguales los restantes parámetros.

6. (1 punto) En un hipotético sistema del tipo Aloha ranurado, con ranuras de duración igual a una trama, las transmisiones son exitosas si en cada ranura hay uno o dos intentos de transmisión. Si las estaciones transmiten independientemente con probabilidad $p = 1/n$ en cada ranura ¿cuál será la eficiencia (para $n \rightarrow \infty$) del sistema? ¿Aumenta la eficiencia si $p = 1/(2n)$? Suponga que ninguna estación transmite dos tramas en una misma ranura.

- a) Los parámetros de $\mathcal{H}_r$ son $[2^r - 1, 2^r - r - 1, 4]$. $\mathcal{H}_{r,c}$ tiene la misma longitud y dimensión una unidad mayor (consta de la mitad de las palabras de $\mathcal{H}_r$). Tiene distancia 4 porque $\mathcal{H}_r$ contiene palabra de peso 4, pero no de peso 2.
- b) Corrige todos los errores simples, $2^r - 1$. El resto de los $2^{r+1} - 1$ errores corregibles son dobles, es decir, 2^r .

Cuestión 6 (1,5 puntos). Para el código $[63, 57]$ generado por $g(x) = (x - 1)(x^5 + x^2 + 1)$,

- a) Codifique sistemáticamente el mensaje x .
- b) Ante el polinomio $x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + 1$ el decodificador estima la palabra del código $(x^2 + x + 1)g(x)$. ¿Es correcto? El código tiene distancia 4.

- a) La codificación sistemática es

$$x^7 - x^7 \text{ mód } g(x) = x^7 + x^5 + x^4 + 1.$$

- b) Sí. $(x^2 + x + 1)g(x) = x^8 + x^3 + x^2 + 1$ que sólo dista en un término (x^7) del vector recibido.

Cuestión 7 (1 punto). Calcule la expresión de la cadencia eficaz para una estrategia convencional de parada y espera si en el canal de retorno los asentimientos se pierden con probabilidad q .

El sistema es estocásticamente idéntico a uno en donde no hay errores ni pérdidas en el canal de retorno y las tramas de datos se transmiten correctamente con probabilidad

$$1 - p'_t = (1 - p_t)(1 - q)$$

donde p_t es la probabilidad de error o pérdida de una trama de datos en el sistema original. En estas condiciones, la cadencia eficaz es

$$C_{\text{ef}} = (1 - p_t)(1 - q) \frac{n}{n + m + T_{\text{as}}C}$$

con la notación habitual.

Cuestión 8 (1 punto). ¿Por qué existe un tamaño mínimo para la longitud de las tramas en Ethernet?

Los emisores sólo escuchan el canal mientras dura la transmisión. Si las tramas son muy cortas, podrían dejar de escuchar antes de que la señal de colisión les llegue.

- c) Si el código cíclico de generador $g(x)$ detecta el error $\vec{e}$, entonces también detecta todos los vectores de error que son desplazamientos cíclicos de $\vec{e}$.
- d) Si C es un código lineal $[n, k]$, con n impar, y $x^2 v(x) \bmod x^n - 1 \in C$ para todo $v(x) \in C$, entonces C es un código cíclico.

-95- Problema 6

- a) Sabiendo que $x^7 + x^3 + 1$ es un polinomio primitivo, enuncie las propiedades de detección de errores del código cíclico generado por $g(x) = (x - 1)(x^7 + x^3 + 1)$.
- b) ¿Es capaz este código de corregir los errores simples? ¿Y los errores dobles?

Problema 7. Sea C el código cíclico binario de longitud 15 engendrado por $g(x) = (x^5 + 1)(x^4 + x + 1)$. Considere además el código

$$\hat{C} = \{(c_0 \dots c_{14}) : (c_{14} \dots c_0) \in C\}.$$

- a) ¿Es $\hat{C}$ un código cíclico?
- b) ¿Cuál es la dimensión de C ?
- c) Encuentre la dimensión y la distancia de $C \cap \hat{C}$.
- d) Compruebe que 110110110110110 pertenece a $C \cap \hat{C}$.

Problema 8.

- a) Sea el menor código cíclico engendrado por el polinomio $(x - 1)(x^7 + x + 1)$, donde $x^7 + x + 1$ es primitivo. Se nos dice que la distancia es 4. ¿Es esto cierto? ¿Por qué?
- b) Obtenga la salida del decodificador si se reciben los siguientes vectores

$$x^{21} + x^{20} + x^{15} + x^{12} + x^9 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad x^7 + x^2 + 1.$$

- c) Enumere las propiedades de detección de errores que conozca para este código.

Problema 9. Escriba una matriz generadora sistemática y una matriz de comprobación de paridad del código cíclico $[17, 8]$ generado por $(x - 1)(x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1)$.

Problema 10. Los polinomios $x^2 + x + 1$ y $x^4 + x + 1$ son primitivos.

- a) ¿Cuál es el código de menor longitud generado por

$$g(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)?$$

- b) Si se sabe además que todas las palabras del código no nulas tienen peso múltiplo de 4, encuentre dos maneras distintas de deducir que la distancia es 8.

Problema 11.

- a) Demuestre que si un polinomio es irreducible entonces su recíproco también lo es.
- b) Demuestre que el recíproco de un polinomio primitivo es otro polinomio primitivo.
- c) Demuestre que el polinomio recíproco de un producto de polinomios es el producto de los recíprocos de los factores. Si, además, los factores no tienen raíces comunes ¿qué significado tiene esta propiedad para los códigos cíclicos que engendran?

Problema 1

- a) Los bloques de un sistema de transmisión de datos pueden llevar hasta 50 caracteres de 8 bits, más 10 bits de redundancia. Considerando que el canal tiene errores estadísticamente independientes, y sabiendo que los polinomios

$$\begin{array}{lll} x^5 + x^2 + 1 & x^6 + x + 1 & x^7 + x^3 + 1 \\ x^8 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 & x^9 + x^4 + 1 & x^{10} + x^3 + 1 \\ & & x^{11} + x^2 + 1 \end{array}$$

son polinomios primitivos, diseñe un código cíclico con óptimas propiedades detectoras, indicándolas.

- b) ¿Valdría el código anterior si los mensajes pueden llevar hasta 100 caracteres? De no ser así, proponga otro código cíclico e indique los errores que puede detectar.

Problema 2. El polinomio $g(x) = x^{11} + x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x + 1$ genera un código cíclico $[23, 12]$ perfecto de distancia 7.

- a) Estime el vector código transmitido si se reciben los siguientes vectores:

$$\begin{array}{l} x^{13} + x^8 + x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ x^{16} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^3 + x + 1 \\ x^{18} + x^{16} + x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^{10} + x^6 + x^2 + x \end{array}$$

- b) ¿Cuál es la probabilidad de error de decodificación en un canal binario simétrico con $p = 0,01$?
¿Cuál sería, en el mismo canal, la de un sistema sin codificación?

Problema 3. Sea C el código cíclico binario $[15, 4]$ de polinomio generador

$$g(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1).$$

- a) Utilice el hecho de que los factores $x^2 + x + 1$, $x^4 + x^3 + 1$ y $x^4 + x + 1$ son polinomios primitivos y las propiedades de detección de ráfagas de error para deducir que la distancia de C es 6.
b) Se recibe el vector $x^{13} + x^{11} + x^8 + x^6 + x^3 + x + 1$. Si el decodificador realiza corrección de errores, ¿qué palabra código estima?
c) Dé el polinomio generador de $C^\perp$.

-93-

Problema 4. Para el menor código cíclico generado por $g(x) = (x - 1)^2(x^3 + x + 1)$

- a) Escriba una matriz generadora sistemática
b) Obtenga la distancia
c) Enumere las propiedades de detección de errores

Nota: $x^3 + x + 1$ es un polinomio primitivo.

Problema 5. Demuestre o dé un contraejemplo de las siguientes proposiciones:

- a) Un código equivalente a un código cíclico es cíclico.
b) Si C es un código cíclico, el código $C \cup (\bar{1} + C)$ es también cíclico.

Comunicación de Datos

28 de noviembre de 2012

Nombre: _____ D.N.I.: _____

1. El código Hamming binario extendido $\tilde{H}_r$ es el de matriz de comprobación de paridad

$$\tilde{H}_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ H_r & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad r \geq 2$$

en donde H_r denota la matriz de comprobación de paridad del código Hamming binario con r símbolos de redundancia. $\tilde{H}_r$ se obtiene añadiendo a las palabras un símbolo de paridad par.

a) ¿Qué longitud, dimensión y distancia tiene $\tilde{H}_r$? (1 punto)

b) Deduzca que $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2^r$ y $\alpha_2 = 2^r - 1$ es la distribución de pesos de los errores corregibles. (1 punto)

c) Muestre que $1 \in \tilde{H}_r$. (1 punto)

d) Escriba explícitamente la matriz $\tilde{H}_3$ y úsela para decodificar el vector 1110...0. (1 punto)

2. (1 punto) Sea C un código lineal y sean e_1 y e_2 dos vectores de error corregibles. Pruébe que $e_1 - e_2$ no puede ser una palabra de C .

3. Hay únicamente tres códigos cíclicos binarios [5, 4], y uno de ellos es el generado por

$$g(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^{11} + x^8 + x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

a) El código no posee palabras de peso impar. Explique cómo se llega a esta conclusión. (1 punto)

b) $g(x)$ genera un código de distancia 8. Decodifique el vector recibido $x^{14} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^4 + x + 1$. (1 punto)

c) Dé la codificación sistemática del mensaje $x^3 + 1$. (1 punto)

4. (Multiplexación asincrónica) (1 punto) La estrategia de parada y espera puede ser pobre para un solo par emisor-receptor, pero no tiene por qué serlo para un enlace compartido. Tenemos un enlace punto a punto sobre el que se multiplexan de manera oportunista las tramas de 5 flujos distintos: cada trama se etiqueta con un identificador del flujo al que pertenece más un número de secuencia módulo 2, y se transmite en cuanto el canal está libre y las reglas de parada y espera para cada flujo lo permiten. Si el número de flujos es suficientemente grande, ¿cuál es la cadencia eficaz del enlace? ¿Y cuál es la cadencia eficaz de cada flujo? No necesita cálculos para responder.

5. (1 punto) Determine la región de parámetros en la que la estrategia de envío continuo con rechazo simple tiene una cadencia eficaz al menos un 25 % mejor que la que se obtendría con parada y espera en las mismas condiciones, en el caso particular de que $T_{ac}C$ sea igual a la longitud de k tramas.

Problema 3 (4 puntos)

Considere el código lineal de matriz generadora

$$G = (I_7 | P_2)$$

en donde P_2 es la matriz 7×7 cuyos columnas son vectores binarios distintos de peso 6.

1. ¿Cuál es la probabilidad de detectar un error de transmisión?

2. ¿Cuál es la probabilidad de decodificar incorrectamente?

3. Razone, sin hacer ningún cálculo, cómo se decodificaría el vector $y = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Solución

1. $\text{Pr}(\text{detectar error}) = 1 - \text{Pr}(\text{transmisión correcta}) - P_d = 1 - \sum_{i=0}^n A_i p^i (1-p)^{n-i}$, donde $\{A_0, A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es la distribución de pesos del código (para su obtención véase el problema 6 del capítulo 4 del libro de problemas).

2. $\text{Pr}(\text{error de decodificación}) = 1 - \sum_{i=0}^n \alpha_i p^i (1-p)^{n-i}$ donde $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ es la distribución de pesos de los errores corregibles (para su obtención véase el problema 6 del capítulo 4 del libro de problemas).

3. Por la definición de G , el vector $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, que difiere de y únicamente en la octava componente, pertenece al código y sería el resultado de la decodificación, puesto que todos los errores simples se corrigen (véase el problema 6 del capítulo 4 del libro de problemas).

Problema 4 (2 puntos)

Considere un protocolo de retransmisión de parada y espera. Considere que no se pierden ni las tramas de datos ni los acatamientos (que solo son positivos), aunque la probabilidad de error en ambos casos no es despreciable, siendo estas p_1 y p_2 , respectivamente. Suponga que el emisor ignora los acatamientos erróneos.

1. ¿Valen el número medio de veces que se transmite una trama.

2. ¿Valen la cadencia eficaz si la espera para retransmitir es T_{out} .

Solución

1. Es condición necesaria para que no se retransmita una trama (éxito), que no se produzca ningún error ni en la trama de datos ni en el acatamiento correspondiente, que son eventos que podemos suponer independientes. Así,

$$\text{Pr}(\text{éxito}) = (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - p$$

Si las sucesivas transmisiones de una misma trama se suponen independientes, entonces el número de transmisiones de la misma, n_T , es una variable aleatoria geométrica de media

$$E(n_T) = 1/(1 - p)$$

2. El tiempo de ocupación de una trama está dado por

$$t_{oc} = \frac{l}{C} + T_{ac} + \left(\frac{l}{C} + T_{out}\right)(n_T - 1)$$

Por tanto,

$$C_{eff} = \frac{n}{E(n_T)} = (1 - p) \frac{n}{n + m + C(pT_{out} + (1 - p)T_{ac})} C$$

(véase problema 1 del capítulo 6 del libro de problemas).

Examen de Transmisión de Datos

2 de junio de 2011

Nombre: _____ D.N.I.: _____

1. Por un canal con matriz de probabilidades de transición

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/10 & 9/10 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}$$

se transmiten símbolos con una distribución de probabilidad $(3/5, 1/5, 1/5)$.

a) Determine $I(X;Y)$. (1 punto)

b) ¿Irá si se sabe que no se recibe y_2 . (1 punto)

2. Dados un canal cuaternario de capacidad un tercio la del ideal y una fuente simétrica con alfabeto de 27 elementos

a) ¿Cuál es el tiempo mínimo necesario para transmitir un mensaje de la fuente de n símbolos (n arbitrariamente grande) si el régimen de transmisión del canal es unitario? (1 punto)

b) El mensaje anterior se puede transmitir por otro canal cuaternario con régimen de transmisión también unitario en la mitad de tiempo. ¿Cuál es la capacidad de este canal? (1 punto)

3. (1 punto) Muestre que la longitud de un código binario compacto para una fuente ternaria está acotada superiormente por $5/3$.

4. (1 punto) La secuencia

$$A, N, U, L, (1, 2, 1), (5, 3, U), Z, (7, 2, Z), (3, 8, N), (1, 2, 0)$$

representa la división en frases del algoritmo LZ77 aplicado a un mensaje. Las ternas tienen el significado (índice, longitud de la frase, sufixo), la primera letra del mensaje tiene índice 1 y 0 denota el sufixo nulo. Averigüe el mensaje.

5. La matriz

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ I_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es de comprobación de paridad de un código lineal. Resuelva razonadamente las siguientes cuestiones:

a) Obtenga la distribución de pesos de los errores corregibles. (1 punto)

b) Obtenga la distribución de pesos de las palabras del código (1 punto)

6. $g(x) = x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$ genera un código cíclico $[17, 9]$.

a) $x^{17} - 1 = (x - 1)(x^{16} + \dots + x + 1)$. Demuestre, sin realizar ninguna división, que el vector $1 \dots 1$ es una palabra del código. (1 punto)

b) El código no contiene palabras de peso 2. ¿Cuál sería la salida de un decodificador de mínima distancia si se recibe el polinomio $x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + x + 1$? (1 punto)

Problema 4 (2 puntos).

Considere el código lineal de matriz generadora

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ I_4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Razone que, para demostrar que la distancia del código es 4, basta demostrar que el código no contiene vectores de peso 2.

2. Si se sabe que pertenece al código el vector de peso 8, razone sin hacer ningún cálculo que, con excepción del vector nulo, todos los demás vectores del código son de peso 4.

3. Razone, sin hacer ningún cálculo, cómo se decodificaría el vector $y = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

4. Razone, sin hacer ningún cálculo, que ningún error doble puede tener el mismo síndrome que un error simple y deduzca de ese hecho el número de errores dobles que se pueden corregir.

Solución

1. Como las filas de la matriz G tienen todas peso 4, la distancia del código solo puede ser 2 o 4. Y la distancia será 4 sólo si el código no tiene ninguna palabra de peso 2, en cuyo caso la distancia sería 2.

2. El código, por tener distancia 4, no incluye palabras de peso menor que 4 (con excepción del vector nulo); y, por tener una distribución de pesos simétrica (por la pertenencia al código del vector de peso 8), no incluye tampoco palabras de peso mayor que 4 (con excepción del vector nulo y del vector de peso 8, que es el complementario del vector nulo).

3. El vector y no pertenece al código porque tiene un peso impar; y la decodificación del vector y será la palabra del código más cercana (en distancia Hamming) a y : el vector de peso 8, que es la única palabra del código que está a una distancia de 1.

4. Los errores simples (en realidad todos los de peso impar) provocan la recepción de vectores de peso impar, en tanto que los errores dobles (en realidad todos los de peso par), la recepción de vectores de peso par. En consecuencia, sus síndromes no pueden ser iguales.

Como todos los errores simples, que son 8, se pueden corregir, el número máximo de errores dobles corregibles será 7 (todos los síndromes no nulos excepto 8). Y será, efectivamente 7, porque cualquier vector de peso par está a una distancia no superior a 2 de una palabra del código.

Examen de Fundamentos de Telemática

30 de noviembre de 2010

Nombre: _____ D.N.I.: _____

Problema 1. Por un canal con matriz de probabilidades de transición

$$\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 3/5 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 2/7 & 2/7 & 0 & 3/7 \end{pmatrix}$$

se transmiten símbolos con una distribución de probabilidad $(1/2, 1/4, 1/4)$.

a) Determine $I(X; Y)$.

b) ¿Cómo se sabe que no se transmite x_1 y no se recibe y_4 ?

a) La matriz de probabilidades conjuntas de la entrada y la salida de este canal es

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 3/5 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 2/7 & 2/7 & 0 & 3/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/12 & 1/12 \\ 3/20 & 0 & 1/20 & 1/20 \\ 1/14 & 1/14 & 0 & 3/28 \end{pmatrix}$$

La distribución marginal de Y es $(3/20 + 1/14, 1/3 + 1/14, 1/12 + 1/20, 1/12 + 1/20 + 3/28) = (31/140, 17/140, 2/15, 101/420)$, de modo que $H(Y) \approx 1.89$ bits.

La entropía de cada una de las filas de Q es

$$\begin{aligned} H(Y|X = x_1) &= H(2/3, 1/6, 1/6) \approx 1.25 \text{ bits} \\ H(Y|X = x_2) &= H(3/5, 1/5, 1/5) \approx 1.37 \text{ bits} \\ H(Y|X = x_3) &= H(2/7, 2/7, 3/7) \approx 1.55 \text{ bits} \end{aligned}$$

con lo que la entropía condicional vale

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= p(x_1)H(Y|X = x_1) + p(x_2)H(Y|X = x_2) + p(x_3)H(Y|X = x_3) \\ &= \frac{1}{2}H(Y|X = x_1) + \frac{1}{4}H(Y|X = x_2) + \frac{1}{4}H(Y|X = x_3) \approx 1.35 \text{ bits.} \end{aligned}$$

Finalmente, la información mutua en este canal valdrá $I(X; Y) = H(Y) - H(Y|X) \approx 0.54$ bits. Si no se transmite x_1 ni se recibe y_4 , la distribución de probabilidad conjunta de las entradas y salidas del canal es

$$P' = \kappa \begin{pmatrix} 3/20 & 0 & 1/20 \\ 1/14 & 1/14 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/16 & 0 & 7/48 \\ 5/24 & 5/24 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos da una entropía para los símbolos de salida del canal igual a $H(Y) = H(7/16 + 5/24, 5/24, 7/48) = H(31/48, 5/24, 7/48) \approx 1.284$ bits.

Puesto que el número de entradas al canal se reduce, la matriz de probabilidades de transición varía. La que corresponde a la situación en que $X \neq x_1$ e $Y \neq y_4$ es P' con las filas reescaladas para que sumen la unidad, esto es,

$$Q' = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se sigue que la entropía condicional vale

$$H(Y'|X') \approx P(X' = x_2)H(Y'|X' = x_2) + P(X' = x_3)H(Y'|X' = x_3) = \frac{7}{12}H(1/4) + \frac{5}{12} \log 2 \approx 0.89 \text{ bits.}$$

Así pues, $I(X'; Y') = H(Y') - H(Y'|X') \approx 0.39$ bits.

Problema 2 (3 puntos). Los mensajes de una fuente con un alfabeto de 48 símbolos equiprobables se transmiten a través de un canal binario simétrico con probabilidad de error $p = 0.2$.

a) Para transmitir a 100 bits/s, ¿cuál es el número mínimo de símbolos binarios necesarios para transmitir un símbolo de la fuente?

b) En ese caso, ¿qué fracción de esos símbolos es redundante?

c) Y si el régimen del canal es de 100 símbolos por unidad de tiempo, ¿qué cantidad de información (expresada en bits) se transmite por unidad de tiempo?

a) $v_c/v_f = H(X)/C = \log_2 48 / (1 - H_2(0.2)) \approx 20.08$ bits/símbolo.

b) La fracción de símbolos redundante es $1 - C = H_2(p) \approx 72.2\%$.

c) La tasa de transmisión de información por el canal es de $v_c C \approx 2780$ bits por unidad de tiempo.

Problema 3 (2 puntos). Para el código con matriz generadora

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Muestre que la distribución de pesos es simétrica y que todas las palabras tienen peso par.

b) Todas las palabras del código son ortogonales entre sí. Explíquelo. (Observe antes que todas las filas de la matriz son ortogonales dos a dos).

c) El código tiene distancia 4. Use esto y el apartado a) para deducir que $A_0 = 2A_4 = 62$ y, por tanto, que A_6 es un número par.

d) La única forma de obtener palabras del código de peso 4 es sumar dos filas de G . ¿Cuánto vale A_4 ?

e) Escriba la distribución de pesos del código.

a) 1 es una palabra del código para ver, sume todas las filas de G . Y puesto que 1 pertenece al código, $A_{12} = \{1 - x : x \in C, p_H(x) = i\} = A_i$. Sea f_i , para $i = 1, \dots, 6$, la i -ésima fila de G . f_i tiene peso par (6) así que cualquier combinación lineal de filas $\sum_{j=1}^6 a_j f_j$ es la suma de vectores de peso par, y tiene por ello peso par.

b) Se puede comprobar directamente que $(f_i, f_j) = 0$ para cualesquiera i, j . En consecuencia

$$\left(\sum_{i=1}^6 a_i f_i, \sum_{j=1}^6 b_j f_j \right) = \sum_{i,j} a_i b_j (f_i, f_j) = 0,$$

de manera que todas las palabras del código son ortogonales entre sí.

c) Puesto que no hay palabras de peso impar ni de peso 2 (la distancia es 4) o de peso 8 (por simetría), tenemos la igualdad

$$A_0 + A_4 + A_6 + A_8 + A_{12} = 64.$$

Ahora bien, $A_0 = A_{12} = 1$ y $A_4 = A_8$ por simetría. Luego $A_6 + 2A_4 = 62$ y A_6 , siendo la diferencia de dos números pares, es par.

EXAMEN CD. ENERO 2012.

1. Considera un canal de matriz de probabilidades de transición

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean X e Y las variables de entrada y salida del canal y sea

$\bar{P} = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon, \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{4}\}$ el vector de probabilidades de la variable aleatoria Y.

¿Cuanto ha de valer p para que la información mutua sea de 7/4 bits?

2. Dado un canal binario ideal de régimen de transmisión V_c bps y cuatro fuentes binarias de entropías (en bits): 1, 0.5, 0.25, 0.125. ¿Cuál es el máximo régimen de transmisión de las fuentes para transmisión fiable si han de compartir el canal a partes iguales?
3. Dada una fuente que genera n símbolos de forma equiprobable cuyos mensajes se precodifican con un código compacto binario de eficiencia 0.9. Si se quieren transmitir esos mensajes de manera fiable y eficiente a través de un canal binario de capacidad C bits y régimen de transmisión V_c , ¿Cuántos símbolos de canal serán necesarios por cada símbolo del mensaje precodificado?
4. Considere una fuente que genera 128 símbolos con probabilidades, que ordenadas de forma decreciente, verifican que: las dos últimas son iguales y cada una de las demás es el doble de la anterior. Si se codifican los símbolos uno a uno, ¿cuál es la longitud de un código compacto binario? ¿Cuántos códigos distintos hay para esta fuente?
5. Dada una fuente cuaternaria sin memoria que emite símbolos de 2 bits con probabilidades $p(A)=0.3$, $p(B)=0.25$, $p(C)=0.25$, $p(D)=0.2$. Si se utiliza codificación aritmética ¿Cuál es la secuencia de símbolos de esta fuente más larga que se puede representar con n bits?
6. Dado un código cíclico binario de longitud 63 y dimensión 56 engendrado por $g(x) = x^7 + x^6 + x^2 + 1$, siendo $x^6 + x + 1$ un polinomio primitivo, caracterice las propiedades de detección y corrección de errores de este código. ¿Cuál es el menor código cíclico que contiene a $x^6 + x + 1$?
7. Supóngase un vector corregible con un cierto código lineal en el que las posiciones erróneas son las r primeras: $\mathbf{e} = (e_1 \dots e_r 0 \dots 0)$. Considérese otro patrón de errores, $\mathbf{e}'$, cuyas posiciones erróneas son un conjunto de las del vector anterior $\mathbf{e}' = (e_1 \dots e_{r-1} 0 \dots 0)$. Demostrar que si $\mathbf{e}$ es corregible $\mathbf{e}'$ también lo es. Demuestre por contradicción.

- a) ¿Cuáles son la longitud, dimensión y distancia de C ?
- b) Escriba una matriz generadora de C .
- c) ¿Cuál es el mayor entero t tal que el código es capaz de corregir cualquier patrón hasta t errores?
- d) Si se recibe el vector 101010101, ¿cuál será la salida de un decodificador de máxima verosimilitud?

Problema 9 Considere el código lineal binario C con matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}$$

en donde H_1 es matriz de comprobación de paridad del código Hamming binario $[15, 11]$.

- a) Indique la longitud, la dimensión y la distancia de C .
- b) Demuestre que C solo puede corregir errores simples y dobles. ¿Cuántos dobles?
- c) La distribución de pesos del código Hamming es $A_0 = A_{15} = 1$, $A_1 = A_4 = A_5 = A_{11} = 10$, $A_2 = A_{10} = 168$, $A_3 = A_6 = 280$, $A_7 = A_8 = 336$. La distribución de pesos de C viene dada por la fórmula $B_r = \sum_{j=0}^n a_j A_{j+r}$. Calcule el número de palabras de peso mínimo de C .
- d) Muestre que C no puede ser un código cíclico (f).

Problema 10 Considere la colección C_r de códigos lineales binarios definidos por matrices de comprobación de paridad de la forma

$$H_r = (I_r \quad B_{r \times m}) \quad r \geq 2$$

en donde I_r es la matriz identidad $r \times r$ y $B_{r \times m}$ es una matriz que tiene por columnas vectores distintos de peso 2 de forma que ninguna de sus filas es nula.

- a) ¿Cuáles son la longitud y la dimensión mínimas de un código de la familia C_r ? ¿Cuáles la longitud y la dimensión máximas? Indique qué matrices corresponden a cada caso.
- b) La distancia de cualquiera de los códigos de C_r es 3. Calcule el número de palabras de peso 3 del código de longitud máxima. Hean para uno cualquiera de los de longitud mínima.

Problema 11 Para un entero $r \geq 1$, sea $\mathcal{H}_r$ el código Hamming binario $[n, n-r, 3]$

- a) Muestre que para cualesquiera dos columnas b_1 y b_2 de una matriz de comprobación de paridad de $\mathcal{H}_r$, existe una tercera columna única igual a $b_1 + b_2$.
- b) Use el apartado anterior para probar que el número de palabras de peso 3 en $\mathcal{H}_r$ es $n(n-1)/6$.
- c) Muestre que $\mathcal{H}_r$ contiene una palabra de peso n . ¿Cuántas existen de peso $n-3$?
- d) Como aplicación, escriba la distribución de pesos de las palabras de $\mathcal{H}_3$.

Problema 12 Obtena, para el código descrito en el problema 8, la distribución de pesos de los errores correctibles. ¿Cuál será la probabilidad de cometer un error de decodificación si se emplea ese código sobre un canal binario simétrico con probabilidad de error por bit 10^{-12} ?

Problema 2. La matriz de comprobación de paridad de un código lineal binario es

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcule la distancia del código.
 - Construya una tabla de decodificación por síndrome.
 - Obtenga una matriz generadora en forma sistemática del código dual. ¿Qué observa?
- Problema 3.** Sea H la matriz de comprobación de paridad de un código Hamming binario [15, 11]. Considere el código lineal C cuya matriz de comprobación de paridad es la obtenida al eliminar de H todas las columnas con un número par de unos. Sin escribir las palabras de C :

- Indique los parámetros del código y muestre que su distancia es 4.
- Demuestre que todas las palabras del código no nulas tienen un número par de unos.
- ¿Cuáles errores de peso Hamming 1 son detectables? ¿Cuál es la probabilidad de no detectar un error cuando C se utiliza para transmitir sobre un canal binario simétrico con probabilidad de error de bit p ?
- Si de toda palabra del código se borra un bit de paridad, ¿qué código se obtiene?

Problema 4. Sea G_1 una matriz generadora de un código lineal $[n_1, k_1]$ con distancia d_1 y sea G_2 una matriz generadora de un código lineal $[n_2, k_2]$ con distancia d_2 . Encuentre los parámetros (longitud, dimensión y distancia) característicos si es posible los vectores del código y dé una matriz generadora del dual, para los códigos cuyas matrices generadoras son las siguientes:

$$a) \begin{pmatrix} G_1 & & \\ & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$$

$$c) \text{ Suponiendo que } n_1 = n_2 = n$$

$$\begin{pmatrix} G_1 & G_1 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}$$

Esta construcción de un código a partir de dos códigos componentes se conoce como construcción $[u|u \cdot v]$.

- Si $n_1 = n_2$

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 & G_1 \\ 0 & G_1 & G_1 \\ G_2 & G_2 & G_2 \end{pmatrix}$$

Esta construcción se suele representar como $[a \cdot x|b \cdot x|a \cdot b + x]$.

- Si $k_1 = k_2 = k$, muestre que el código lineal de matriz generadora $(G_1|G_2)$ tiene parámetros $[n_1 + n_2, k]$ y distancia $d \leq d_1 + d_2$.

Problema 5. Para el código C que tiene por matriz generadora a

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se pide:

- Probar que la distribución de pesos es simétrica, $A_i = A_{12-i}$.
- Hallar la distribución de pesos.
- Hallar la distribución de pesos de los errores corregibles.
- Probar que $C = C^\perp$.

Problema 6. La matriz

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ I_3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es generadora de un código lineal binario $[10, 4]$.

- ¿Cuál es la distancia del código?
- Calcule el número de palabras del código de peso $i = 1, 2, \dots, 10$ que se pueden corregir si se aplica el método de decodificación por síndrome.
- Suponga que el canal de transmisión no tiene memoria y que se produce un error de transmisión. A la vista de las ecuaciones de comprobación de paridad, deduzca un método de decodificación capaz de corregir los errores simples *sin construir la tabla de síndromes*.

Problema 7. Considere el código de matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Sume las filas de H . Escriba la longitud, dimensión y la distancia de este código.
- Muestre que el código sólo contiene palabras de peso par y que el vector $(1, \dots, 1)$ pertenece al código.

Problema 8. Sea C el código binario definido por la matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & & & & & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 0 & & & & \\ & & & & & & & 1 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & & & & & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Examen de Fundamentos de Telemática

23 de mayo de 2014

Nombre: _____ D.N.I.: _____

Cuestión 1 (2 puntos). Sea la matriz de probabilidad conjunta de las variables aleatorias de entrada (X) y salida (Y) de un canal

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{bmatrix}.$$

- Determine $I(X; Y)$.
- Determine la capacidad del canal.

Las fmp marginales de X e Y son $(2/3, 1/3)$ y $(1/2, 1/4, 1/4)$, respectivamente. Por lo tanto

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = H(1/3) + H(1/2, 1/4, 1/4) - H(1/2, 1/4, 1/6, 1/12) = 3/4 H(1/3).$$

La matriz de probabilidades conjuntas se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

de manera que el canal es un canal binario con borrado $1/4$. Su capacidad es $3/4$ bits/símbolo.

Cuestión 2 (1 punto). Los mensajes de una fuente con un alfabeto de 48 símbolos equiprobables se quieren transmitir fielmente a través de un canal binario simétrico con probabilidad de error $p = 0,2$. ¿Cuáles son las longitudes de los códigos ideales de fuente y de canal?

$$L_f = H_2(X) = \log_2 48 = 3 \log_2 3. \quad L_c = 1/C = 1/(1 - H_2(0,2)).$$

Cuestión 3 (1 punto). Suponga una fuente binaria sin memoria de entropía máxima. Suponga que se considera la utilización simultánea de dos canales para la transmisión de los mensajes de la fuente en el menor tiempo posible. Sea uno un canal binario de capacidad 0,6 bits, y el otro un canal ternario de capacidad 0,9 unidades de información ternarias. Si el primero de los canales tiene un régimen de transmisión de 1000 símbolos por segundo y el segundo de 500 símbolos por segundo, ¿cuál es el tiempo mínimo necesario para transmitir de manera fiable un mensaje de la fuente de longitud n arbitrariamente grande?

$$T = \frac{nH(X)}{v_1 C_1 + v_2 C_2} = \frac{n}{1000 \cdot 0,6 + 500 \cdot \log_2 0,9} \text{ segundos.}$$

Cuestión 4 (1 punto). El conjunto $\{0, 10, 110, 111\}$ es un código binario compacto para la fuente con probabilidades $\{1/2, 3/8, 1/16, 1/16\}$, con una eficiencia del 94,2%. El codificador de fuente puede entenderse como una fuente binaria sin memoria. ¿Cuál es la probabilidad de que emita un 0? Tiene dos maneras de calcularlo.

De acuerdo con la teoría, la salida del codificador de fuente tiene entropía $H_2(Y) = H(p) = \eta$, siendo η la eficiencia del código. Así pues, $p = H^{-1}(\eta)$ de donde $p \approx 0,64$ (resuelva esta ecuación por ensayo y error). Observe que, en el código propuesto, la proporción de ceros es mayor que la de unos, en concreto $15/26$ frente a $11/26$. Sin embargo, $H_2(15/26) \neq \eta$. ¿Puede explicarlo?

Cuestión 5 (1,5 puntos). El subcódigo par $\mathcal{H}_{r,e}$ de un código Hamming binario $\mathcal{H}_r$ es la colección de palabras de $\mathcal{H}_r$ que tienen peso par.

- Los parámetros de $\mathcal{H}_{r,e}$ son $[2^r - 1, 2^r - r - 2, 4]$. Explique estos números.
- Este código corrige únicamente errores simples y dobles. ¿Cuántos de cada tipo?

Comunicación de Datos

21 de octubre de 2013

Nombre: _____ D.N.I.: _____

1. (2 puntos) De un grupo de estudiantes, el 25 % no están convenientemente preparados para la universidad. Sin embargo, el 25 % de estos son aceptados tras una prueba de selección, que es superada por el 50 % de los estudiantes.

a) Al oír el resultado de la prueba, ¿cuánta información recibe un estudiante que está suficientemente preparado?

b) Ídem si la selección se decide tirando una moneda al aire.

a) Un estudiante preparado supera la prueba de selección con una probabilidad p tal que

$$\frac{3}{4}p + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

esto es, $p = 7/12$, de modo que obtiene una información igual a $H(7/12) \approx 0,98$ bits.

b) Si la selección es completamente aleatoria hay igual probabilidad de ser aceptado o rechazado, con independencia de la preparación. Así entonces, la información recibida es $H(1/2) = 1$ bit.

2 (1 punto). ¿Tienen redundancia los mensajes de una fuente decimal de vector de probabilidades

$$\mathbf{p} = (1/4, 1/4, 1/16, \dots, 1/16)?$$

¿Puede cuantificarla? Razónelo.

En la medida en que todo mensaje de una fuente discreta es una representación simbólica, una fuente dada es un codificador específico. En este caso el alfabeto es decimal y el código es una asignación uno a uno. Como las probabilidades no son potencias decimales, esta fuente (o código) posee redundancia, de valor igual a la diferencia entre la longitud $L = 1$ y la entropía decimal $H_{10}(X)$, que es la mínima longitud posible.

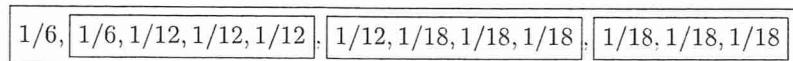
$$L - H_{10}(X) \approx 0,097.$$

3. (2 puntos) Calcule la eficiencia de los códigos compactos cuaternarios de los conjuntos de símbolos con probabilidades dadas por los siguientes vectores:

a) $\mathbf{p} = (1/6, 1/6, 1/12, 1/12, 1/12, 1/12, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18, 1/18)$

b) $p_i = 1/512$ para todo i .

a) La codificación Huffman de estos símbolos —una de ellas— tiene la estructura



Por tanto, el código compacto tiene todas sus palabras de longitud 2, excepto la correspondiente a uno de los símbolos con probabilidad $1/6$, que es de longitud 1. La longitud del código es $L = 2 - 1/6 = 11/6$ y la eficiencia

$$\eta = \frac{H_4(X)}{L} \approx 94\%.$$

b) Un código compacto cuaternario para esta fuente uniforme consta de 170 palabras de longitud 4 y 342 palabras de longitud 5. Tiene una longitud de $L \approx 4,66$ y su eficiencia es $\eta = \log_4 512/L \approx 96,4\%$.

Examen de Fundamentos de Telemática

12 de julio de 2011

Nombre: _____ D.N.I.: _____

1. (1 punto) Determine la capacidad de un canal si se sabe que la matriz de probabilidad conjunta de las variables aleatorias de entrada y salida es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix}$$

2. (2 puntos) Considere un sistema de transmisión formado por una fuente ternaria uniforme, una canal cuaternario y codificadores de fuente y de canal ideales.

- Si se sabe que $1/3$ de los símbolos transmitidos por el canal son redundantes, ¿cuál es su capacidad en bits?
- Si el coste de uso del canal (i.e., el coste de transmisión de un símbolo) es unitario, ¿cuál será el coste de transmitir un mensaje de la fuente de longitud $n (\gg 1)$?

3. (1 punto) La secuencia

$$A, L, (1, 4, B), (1, 2, R), (1, 9, D), E, (8, 2, O), (4, 5, L), (1, 2, D), (A, 2, \emptyset)$$

representa la división en frases del algoritmo LZ77 aplicado a un mensaje. Las ternas tienen el significado (índice, longitud de la frase, sufijo), la primera letra del mensaje tiene índice 1 y $\emptyset$ denota el sufijo nulo. Averigüe el mensaje.

4. La matriz

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ I_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es de comprobación de paridad de un código lineal. Resuelva razonadamente las siguientes cuestiones:

- Obtenga la distribución de pesos del código (1 punto)
- Considere ahora el código con matriz de comprobación de paridad

$$H' = \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

Muestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pertenecen al código definido por H , entonces $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es una palabra del código definido por H' . Deduzca de aquí la distribución de pesos del código compuesto (1 punto)

5. $g(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ genera un código cíclico $[15, 12]$.

- ¿Es $11 \dots 1$ una palabra del código? (1 punto)
- Encuentre un vector de peso 1 corregible con este código. ¿Son igualmente corregibles los desplazamientos cíclicos de este vector? ¿Por qué? (1 punto)

6. (1 punto) Calcule el valor de la cadencia eficaz máxima en un enlace que utiliza la estrategia de envío continuo con rechazo selectivo.

7. (1 punto) Un hipotético sistema del tipo Aloha ranurado, con ranuras de duración igual a una trama, consta de n estaciones. Todas transmiten en cada ranura con probabilidad $1/n$ excepto una que lo hace con probabilidad p . Obtenga una expresión para el tráfico cursado.

- b) Si no hay vectores de peso impar la distancia del código es al menos 4 y los errores simples se pueden corregir. Puesto que

$$x^{17} + x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1 \pmod{g(x) = x^8}$$

la palabra del código más cercana a $v(x)$ es $v(x) + x^8$. Esa sería la salida del decodificador.

Problema 5 (2 puntos) Considere el código con matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Obtenga razonadamente la distancia.
- Demuestre que el código sólo contiene palabras de peso par.
- Sabiendo que el código corrige el mismo número de errores de peso par que de peso impar, obtenga la distribución de pesos de los errores corregibles.
- La distancia es 4: no hay columnas nulas ni dos iguales, la suma de cualesquiera tres columnas produce un vector cuyo último bit nunca es nulo y es posible encontrar cuatro columnas linealmente dependientes, por ejemplo las cuatro primeras.
- Sólo sumando un número par de columnas se obtiene un síndrome nulo, ya que la última fila de H contiene sólo unos. O bien, la última de las ecuaciones de comprobación de paridad $yH^t = 0$ es

$$\sum_{i=1}^{11} y_i = 0$$

lo que se cumple si y sólo si $p_H(y)$ es par.

- Como $d_c = 4$ se tiene de inmediato que $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_1 = 11$. El código corrige, además, algunos errores dobles y triples. Echando mano del enunciado se tiene que $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_0 + \alpha_2$ y se sabe que $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 32$. La solución de estas dos ecuaciones lineales es $\alpha_2 = 15$ y $\alpha_3 = 5$.

Problema 6 (1 punto) Medidas realizadas en un enlace punto a punto que emplea la retransmisión de tramas con rechazo selectivo han determinado que si se dobla la longitud del campo de datos de las tramas la cadencia eficaz no varía. Si las tramas portan 150 bits de control y pa probabilidad de error por bit es 10^{-5} , ¿qué longitud tienen las tramas y cuánto vale la eficiencia?

Sea x el tamaño (desconocido) de las tramas. De acuerdo con el enunciado tiene que cumplirse que $C_e(2x) = C_e(x)$, siendo

$$C_e(x) = (1 - \kappa(x + m)) \frac{x}{x + m}$$

para $\kappa = 10^{-5}$ y $m = 150$. Por tanto, igualando las expresiones

$$(1 - \kappa(2x + m)) \frac{2x}{2x + m} = (1 - \kappa(x + m)) \frac{x}{x + m}$$

se sigue que x tiene que ser solución de

$$(1 - \kappa(2x + m)) \frac{2}{2x + m} = (1 - \kappa(x + m)) \frac{1}{x + m}$$

o bien de

$$2(1 - \kappa(2x + m))(x + m) = (1 - \kappa(x + m))(2x + m)$$

que es una ecuación de segundo grado. Operando de modo sencillo, la ecuación anterior se escribe como

$$(x + m)(2x + m) = \frac{m}{\kappa}$$

cuya única solución positiva es $x_0 \approx 2626$ bits. La eficiencia valdrá entonces

$$\frac{C_e}{C_c}(x_0) \approx 94\%.$$

Examen A.

Problema 4. Sea $\mathcal{P}$ el código lineal binario engendrado por la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Dé, razonadamente, la longitud, dimensión y distancia de $\mathcal{P}$. Las filas de G tienen peso 4 y son ortogonales entre sí, y $\mathbf{1} \in \mathcal{P}$. Calcule la distribución de pesos. (1 punto)
- b) Repita el apartado anterior para el código generado por

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ punto})$$

- a) La matriz G posee 8 columnas y 4 filas *linealmente independientes*, de modo que genera un código $[8, 4]$. Además
- Dado que $\mathbf{1} \in \mathcal{P}$, la distribución de pesos es simétrica, $A_i = A_{8-i}$,
 - Como las filas tienen peso 4 y son ortogonales entre sí, el código sólo contiene palabras con peso múltiplo de 4

$$p_H(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = p_H(\mathbf{x}) + p_H(\mathbf{y}) - 2p_H(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) = 4.$$

En virtud de todo lo anterior, $A_0 = A_8 = 1$, $A_4 = 14$ es la distribución de pesos, y 4 es obviamente la distancia.

- b) El código generado por $\hat{G}$ tiene por palabras a los vectores de la forma $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, en donde $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{P}$. Es decir, el código es la concatenación de dos palabras arbitrariamente elegidas de $\mathcal{P}$. Así pues, se trata de un código $[16, 8, 4]$ autodual ($\hat{G}$ tiene dimensiones 8×16 y rango 8) con una distribución de pesos que se deduce de

$$p_H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = p_H(\mathbf{u}) + p_H(\mathbf{v}).$$

Por lo tanto,

$$\hat{A}_0 = \hat{A}_{16} = 1.$$

$$\hat{A}_4 = \hat{A}_{12} = 28$$

$$\hat{A}_8 = 256 - \sum_{i \neq 8} \hat{A}_i = 2 + 14 \times 14 = 198.$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & & v_{m-1} \end{pmatrix}$$

$$n = 2^{m-1}$$

$$k = n - (n-k) = 2^{m-1} - m$$

Como H tiene una fila de todos unos la distancia código tiene que ser par. ~~de 2~~. $dc = 4$ porque existen 4 columnas linealmente independientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Problema 6.

$$\left. \begin{array}{l} n = 63 \\ k = 56 \end{array} \right\}$$

$$g(x) = x^7 + x^6 + x^2 + 1$$

$$x^6 + x + 1 \text{ primitivo.}$$

$$n - k = 7$$

$$P_H(e) \leq \left\lfloor \frac{dc-1}{2} \right\rfloor$$

$$g(x) = (x+1)(x^6 + x + 1)$$

$\chi(x) = x^6 + x + 1 \notin G_1$ puesto que tiene menor grado que $g(x)$

$g'(x) = x^6 + x + 1$ genera un código cíclico con $n' = 2^7 - 1$

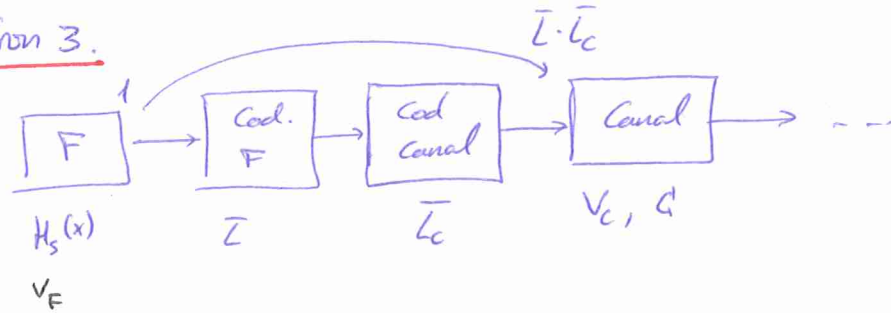
$$n' = 2^6 - 1 = 63$$

$$k' = 63 - \underbrace{\text{grado}(g(n))}_{n' - k'} = 57$$

$$C(63, 57)$$

$$\chi(x) = x^6 + x + 1 = g'(x) \in G_1$$

Cuestión 3.



$$1 = \frac{H_S(p^3)}{\bar{L}} \quad \bar{L}_{\min} = \frac{1}{C}$$

$$V_F \cdot \bar{L} \cdot \bar{L}_C \leq V_C \quad V_F \cdot \bar{L} \leq V_C \cdot \frac{1}{\bar{L}_C}$$

$$N_F [V_F \cdot H_S(p^3)] \leq V_C \cdot G$$

- Canal simétrico:

$$C = \log s - H(\text{fila de } Q)$$

$\uparrow$
nº salidas

- Canal con borrado:

$$C = (1-p) \log H$$

$\uparrow$
nº de entradas.

Cuestión 3.

$$T_{\min} = \frac{n \cdot \bar{L}_{\min} \cdot \bar{L}_{\min}}{V_C}$$

Para transmitir de manera fiable hay que cumplir el th. de Shannon de cod. de canal:

$$V_F \cdot \bar{L} \leq V_C \cdot \frac{1}{\bar{L}_C}$$

Si se utiliza dos canales de forma simultánea la velocidad de transmisión de información será: $C_1 \cdot V_{C1} + C_2 \cdot V_{C2}$

Por tanto, el tiempo necesario para transmitir n símbolos:

$$T = \frac{n \cdot T_{min}}{C_1 \cdot V_{c1} + C_2 \cdot V_{c2}} = \frac{n \cdot H(\vec{p})}{C_1 \cdot V_{c1} + C_2 \cdot V_{c2}} = \frac{n \cdot 1}{0,6 \cdot 1000 + \frac{0,9}{\log_2 2} \cdot 500} = \text{segundos}$$

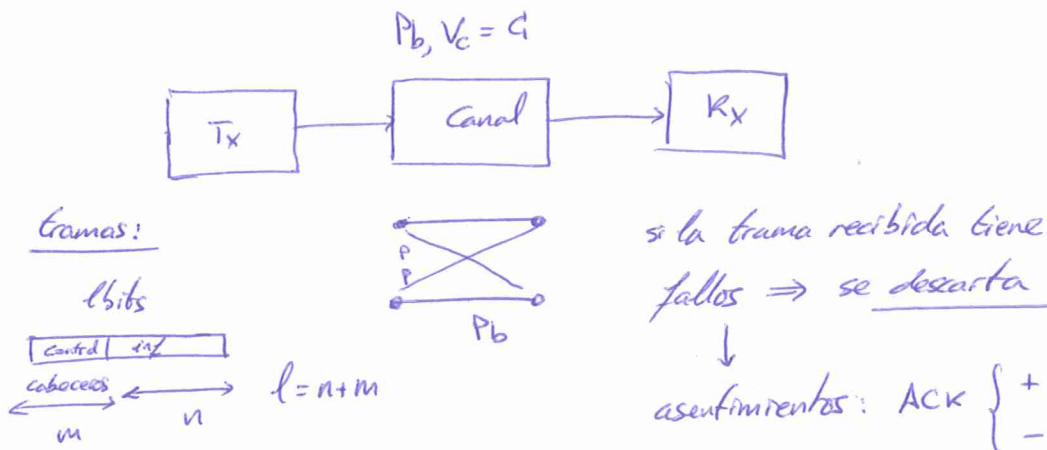
$\uparrow$ bits $\uparrow$ bits

$$C_1 = 0,6 \text{ bits}$$

$$C_2 = 0,9 \text{ u. ternarias} = \frac{0,9}{\log_2 2} = \text{bits}$$

TEMA 6. ESTRATEGIAS DE RETRANSMISION.

1. Introducción.



Tiempo de asentimiento:

$$T_{as} = 2t_p + t_{proc} + \frac{m}{c}$$

C_e : velocidad real de transmisión de inf.

$$C_e < C$$

$$C_e = \frac{n}{T_{oc}}$$

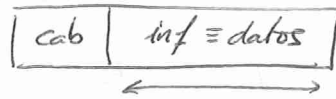
Eficiencia: $\frac{C_e}{C} = \eta$

$\eta < 1$

Problema 2.

Boletín num. 6.

Datos:



$$n = 48 \cdot 8 = 384 \text{ bits}$$

$$m = 5 \cdot 8 = 40 \text{ bits}$$

$$C = 1 \text{ Mbps.}$$

$$P_b = 10^{-4}$$

$$\text{Distancia} = 100 \text{ km}$$

$$V_p = \frac{2}{3} \cdot C = 200\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Distancia} = 100 \text{ km} \\ V_p = \frac{2}{3} \cdot C = 200\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}} \end{array} \right\} \rightarrow t_p = \frac{\text{Distancia}}{V_p} = \frac{100 \text{ km}}{200\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}} = 0,5 \text{ ms}$$

(tiempo propagación)

$$\underline{t_{proc} \approx 0}$$

$$\left[C_e = \frac{n}{\overline{t_{oc}}} = \frac{384}{\overline{t_{oc}}} \right] < 1 \text{ Mbps}$$

$$\overline{t_{oc}} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{L}{C} + \frac{p}{1-p} \cdot T_{as} = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{L}{C} + \frac{p}{1-p} \left(\frac{1}{1-p} \cdot \frac{L}{C} + T_{as} \right) \quad (*)$$

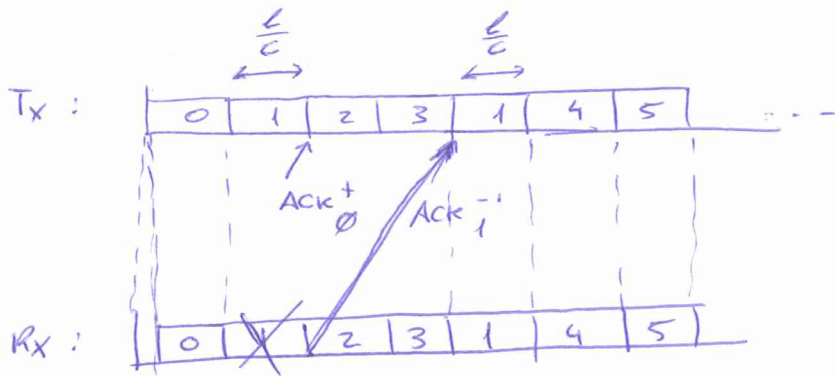
$$p \approx P_b (n+m) = 10^{-4} (384 + 40)$$

$$L = n + m = 384 + 40$$

$$T_{as} = 2 t_p + \underset{0}{t_{proc}} + \frac{m}{C} = 2 \cdot 0,5 \text{ ms} + \frac{40}{C}$$

(*)
=

3.2. Rechazo selectivo.



Solo retransmite
las tramas fallidas.

El receptor tiene las tramas desordenadas
El receptor debe reordenar las tramas.

cadencia eficaz: $C_e = \frac{n}{T_{oc}}$

toc: $t_{oc1} = \frac{L}{c}$
 $t_{oc2} = 2 \cdot \frac{L}{c}$

$$\bar{t}_{oc} = \frac{1}{n_{tx}} \cdot \frac{L}{C}$$

$$\bar{t}_x = \frac{1}{P(\text{éxito})} = \frac{1}{P(\text{no falle la trampa})} = \frac{1}{1-P}$$

Rechazo selectivo:

$$C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot c}{n+m}$$

Rekha's sample:

$$C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n+m+p \cdot \text{tas} \cdot C}$$

Parada y espera:

$$C_e = \frac{(1-P) \cdot n \cdot C}{n+m+Tas \cdot C}$$

Problema 6.

BOLETÍN 12 noviembre

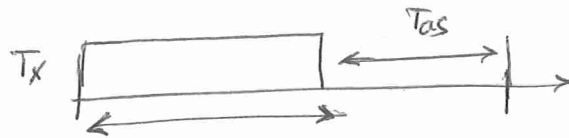
Parada y espera.

Datos

$$\begin{cases} \bar{n} t_x = \frac{10}{9} = 1,1 \\ C_e = 0,4 \cdot C \\ F_T ? \\ m = 0 \end{cases}$$

Parada y espera.

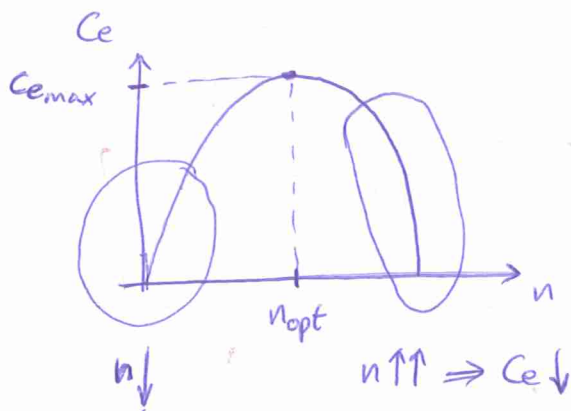
$$C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n + m + T_{as} \cdot C}$$



$$\begin{cases} C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n + m + T_{as} \cdot C} = 0,4 \cdot C & \frac{L}{C} = \frac{n+m}{C} \xrightarrow{m=0} \frac{n}{C} \\ F_T = \frac{t_{tx}}{t_{tx} + T_{as}} = \frac{n/C}{n/C + T_{as}} = \frac{C \cdot \frac{n}{C}}{C \left(\frac{n}{C} + T_{as} \right)} = \frac{n}{n + T_{as} \cdot C} \end{cases}$$

$$F_T = \frac{0,4}{1-p} = 0,4 \cdot \underbrace{\frac{1}{1-p}}_{F_{TX}} \Rightarrow F_T = 0,4 \cdot \frac{10}{9} = \frac{4}{9}$$

Análisis de C_e : Para todas las estrategias se cumple:



$$C_e = \frac{n}{t_{oc}}$$

$$n \downarrow \Rightarrow C_e \downarrow$$

• si n es pequeño se transmiten muchas cabeceras y $C_e \downarrow$

• si $n \uparrow \Rightarrow C_e \downarrow$. Es cierto porque si $n \uparrow \Rightarrow L \uparrow$ y $P \uparrow$. Aparecen retransmisiones y baja la eficiencia.

Problema 6.

$$C = 1 \text{ Mbps}$$

$$P_b = k = \text{BER} = 5 \cdot 10^{-6}$$

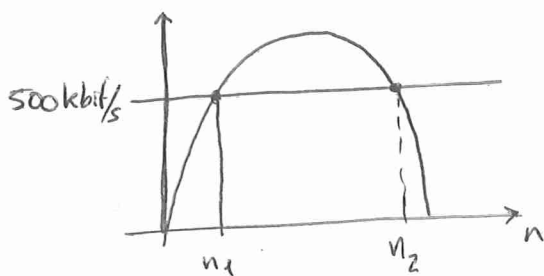
$$T_{as} = 0$$

Parada y espera

$$m = 100$$

$$C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n + m + T_{as} \cdot C}$$

$$C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n + m + T_{as} \cdot C} \stackrel{T_{as}=0}{=} \frac{[1 - P_b(n+m)] \cdot n \cdot C}{n + m}$$



C_e no supera los 500 kbps $n_2 \leq n \leq n_1$.

$$\underline{C_e = 500 \text{ kbps}}$$

$$\frac{(1 - P_b(n+m)) \cdot n \cdot C}{n + m} = 500 \text{ kbps} = \frac{C}{2}$$

$$(1 - P_b(n+m)) \cdot n = 0,5(n+m)$$

$$(1 - P_b \cdot n - P_b \cdot m) n = 0,5n + 0,5m$$

$$n - P_b \cdot n^2 - P_b \cdot m \cdot n = 0,5n + 0,5m$$

$$-P_b \cdot n^2 + n(1 - P_b \cdot m - 0,5) - 0,5m = 0$$

$$P_b n^2 - n(1 - P_b \cdot m - 0,5) + 0,5m = 0$$

$$n^2 - n \left(\frac{1 - P_b \cdot m - 0,5}{P_b} \right) + \frac{0,5m}{P_b} = 0$$

$\downarrow$ constante $\downarrow$ constante.

$$n_1 = \lfloor 100,5 \rfloor = 100$$

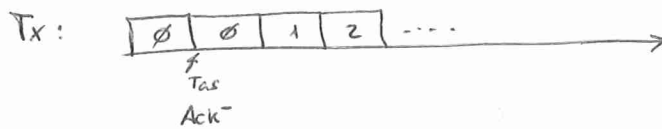
$$n_2 = \lceil 99799,5 \rceil = 99800$$

Pregunta: Para cualquiera de las estrategias que conoce ¿se obtiene la cadencia eficaz máxima cuando el nº de retransmisiones por trama es mínimo? Aclárelo.

No. $\bar{n}_{tx} \min \Rightarrow P \downarrow \Rightarrow n \downarrow$ y esta situación la C_e no es máxima.

12 junio 2009.

Problema 9.



$$\text{Rechazo selectivo} = \bar{n}_{tx} \cdot \frac{l}{c}$$

$$C_e = \frac{n}{\bar{t}_{oc}}$$

Cálculo del $\bar{t}_{oc}$:

$$t_{oc1} = \frac{l}{c}$$

$$t_{oc2} = 2l$$

⋮

$$t_{oci} = i \cdot \frac{l}{c}$$

$$\begin{cases} \bar{t}_{oc} = \bar{n}_{tx} \cdot \frac{l}{c} \\ \bar{n}_{tx} = \frac{1}{P(\text{exito})} = \frac{1}{1-P} \end{cases}$$

↳ que no falten las tramas

$$C_e = \frac{(1-P) \cdot n \cdot c}{n+m}$$



Problema 1

- a) Un protocolo de parada y espera utiliza solamente asentimientos positivos y temporizadores para la recuperación de los errores de transmisión. Así, tras la transmisión de una trama, o bien se recibe un asentimiento positivo en el emisor al cabo de T_{as} segundos o bien se genera una retransmisión una vez transcurridos T_{out} segundos ($T_{out} > T_{as}$). Calcule la cadencia eficaz de esta estrategia suponiendo que no se pierde ninguna trama y que la probabilidad de error en los asentimientos es despreciable.
- b) Obtenga la cadencia eficaz de la estrategia de parada y espera con asentimientos positivos y negativos si la transmisión de un asentimiento es errónea con probabilidad q . Suponga que no se pierden tramas y que la recepción de un asentimiento erróneo da lugar a una retransmisión inmediata.

Problema 2. Considere una estrategia de envío continuo con rechazo simple en la que no hay asentimientos negativos ni temporizadores de retransmisión, de manera que los errores en las tramas de datos se advierten en el emisor sólo cuando se recibe un asentimiento de una trama posterior a la errónea. Calcule la cadencia eficaz si la capacidad del enlace es 1 Mbps., las tramas transportan 48 octetos de datos más 5 octetos de control y la probabilidad de error de bit es 10^{-4} . Suponga además que la longitud del enlace son 100 Km, que la velocidad de propagación de la señal es $\frac{2}{3}$ la velocidad de la luz y que el tiempo de procesamiento de una trama en el receptor es despreciable.

Problema 3. Considere la técnica ARQ que se describe a continuación:

El emisor realiza envío continuo hasta que recibe un asentimiento negativo de una trama. A partir de ese momento, la transmisión de dicha trama se resuelve por parada y espera. Sólo cuando no exista ninguna trama asentida negativamente se reanudará el envío continuo. El receptor asiente individualmente cada una de las tramas que le llegan. Suponiendo que no se pierden tramas y que no se producen errores en los asentimientos, se pide:

- a) Obtenga la cadencia eficaz.
- b) Si el emisor siempre dispone de tramas de información que enviar, calcule el número de tramas de información que se resuelven por parada y espera de manera consecutiva.

Problema 4. Un enlace de datos punto a punto, de tasa nominal $C = 64$ Kbps., opera con una estrategia de envío continuo con rechazo simple. Las tramas transportan 48 bits de control; y la probabilidad de error de bit en el enlace es $\kappa = 10^{-4}$. ¿Cuál es el valor máximo permisible del tiempo de asentimiento para poder obtener una cadencia eficaz de al menos el 50 % de C ?

Problema 5. Se sabe que en una línea de transmisión de datos que opera con una estrategia ARQ en la que las tramas contienen 48 bits de control, la probabilidad de error de bit se distribuye uniformemente en el intervalo $(10^{-6}, 10^{-3})$. ¿Cuál es la probabilidad de conseguir que la cadencia eficaz de la línea sea al menos el 80 % de la capacidad nominal de transmisión?

Problema 6. Obtenga una expresión para la cadencia eficaz de la estrategia de retransmisión de parada y espera cuando el emisor transmite tramas con distribución bimodal: una fracción η (respectivamente, $1 - \eta$) de las tramas tienen longitud n_1 (respectivamente, n_2). Muestre que si $n_1 \approx n_2$ entonces las fórmulas se simplifican a las conocidas en clase. Dé además una explicación cualitativa de los resultados.

Problema 7. Considere un enlace con una estrategia de retransmisión de parada y espera. Suponga que el receptor es capaz de corregir una fracción χ de las tramas erróneas. Deduzca la expresión de la cadencia eficaz.

Problema 8. Caracterice los *loci* de los puntos (m, p_b) tales que la cadencia eficaz máxima de la estrategia de envío continuo con rechazo selectivo vale η , $0 < \eta < 1$.

Problema 9. Compare el rendimiento de las tres estrategias de retransmisión cuando se utilizan sobre sendos enlaces punto a punto conectados en serie, de dos formas:

- a) Si la recuperación de tramas erróneas se efectúa nodo a nodo.
- b) Si la recuperación de tramas erróneas se efectúa extremo a extremo, es decir, si el nodo intermedio no solicita retransmisiones.

Problema 10. Obtenga la expresión de la cadencia eficaz en un enlace punto a punto que opera con la estrategia de parada y espera si el canal se puede considerar como un canal binario con borrado $\text{BEC}(\epsilon)$ en el que el receptor es capaz de corregir todas las tramas con $m = n - k$ o menos símbolos borrados.

Problema 11. Suponga que, en la estrategia de parada y espera, las tramas retransmitidas emplean un código de canal más sofisticado que las originales, con κm bits de redundancia ($\kappa > 1$), cuyo efecto puede asimilarse al de utilizar un canal binario con probabilidad de error por bit más reducida $p'_b(\kappa) < p_b$. Deduzca la expresión de la cadencia eficaz en este sistema. Identifique en qué casos es mejor que el protocolo original.

Problema 12. Para cualquiera de las estrategias de retransmisión que conoce, ¿se obtiene la cadencia eficaz máxima cuando el número de retransmisiones por trama es mínimo? Aclare esta cuestión.

Problema 6 (1 punto).

Considere un enlace de las siguientes características: $C = 1$ Mbits/s, tasa de error de bit $\kappa = 5 \cdot 10^{-6}$ y tiempo de asentimiento despreciable. Si se usa un protocolo ARQ de parada y espera con $m = 100$, ¿para qué rango de valores de n no supera la cadencia eficaz los 500 Kbits/s?

Solución

Conocida la forma de variación de la cadencia eficaz (o de la eficiencia) del protocolo con n , el problema plantea una cuestión geométrica simple: se trata de determinar las soluciones, si las hay, de la ecuación

$$(1 - \kappa(n + m)) \frac{n}{n + m} = \frac{1}{2}$$

Si la ecuación no tiene solución real o hay una sola, entonces para ningún valor de n supera la cadencia eficaz los 500 Kbits/s.

Pero si la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como es el caso: $n_1 \approx 100.5$ y $n_2 \approx 99799.5$, entonces la cadencia eficaz no supera los 500 Kbits/s para $\{n : n \leq 100 \text{ o } n \geq 99800\}$.

Boletín 12 novembre.

Problema 5. El polinomio $g(x) = (x^3 - 1)(x^3 + x^2 + 1)$ engendra un código cíclico binario [15, 10] de distancia 4.

- a) Decodifique el vector $x^{12} - x^{11} + x^9 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 - x^2$. (1 punto)
- b) ¿Sería posible que este polinomio engendrara un código de longitud 30? De ser así, ¿podrían detectarse los errores dobles con el nuevo código? (1 punto)

Solución

a) El síndrome del vector recibido es

$$x^{12} - x^{11} + x^9 + x^6 + x^5 + x^4 - x^3 \bmod g(x) = x$$

o, lo que es igual, se puede escribir

$$x^{12} - x^{11} + x^9 - x^6 + x^5 + x^4 + x^3 = (x^7 - x^6 - x^5 + x)x + x$$

el vector recibido como la suma de una palabra del código más un vector de error de peso 1. Puesto que la distancia del código es 4, todos los errores simples son corregibles y la palabra del código más cercana al vector recibido es precisamente

$$r(x) = (x^7 + x^6 + x^5 + x)g(x).$$

- b) Si es posible, porque $x^{30} - 1 = (x^{15} - 1)g(x)$ es un divisor mónico con término independiente no nulo de uno de los factores de $x^{30} - 1$ y, por ello, del propio $x^{30} - 1$. Sin embargo, el código [30, 24] así construido no es capaz de detectar todos los errores dobles. Por ejemplo, $e(x) = x^{15} - 1$ coincide con una palabra del código y es claramente indetectable.

Problema 6. Medidas sobre un emisor que utiliza la estrategia de retransmisión de parada y espera han determinado que el número medio de veces que se transmite una trama es de $10/9$ y que la cadencia eficaz es el 40 % del régimen nominal de transmisión. ¿Cuál es la fracción de tiempo durante la cual el emisor utiliza el canal? Desprecie la longitud del campo de control de las tramas. (1 punto)

Solución. La fracción de tiempo durante la cual el emisor utiliza el canal es, simplemente, el cociente entre el tiempo de transmisión de la trama y la suma de este tiempo más el de asentimiento, es decir

$$\frac{n}{n + T_{ac}C}$$

si suponemos $m \approx 0$. Ahora bien, la cadencia eficaz de la estrategia de parada y espera vale

$$\frac{C_e}{C} = (1 - p) \frac{n}{n + T_{ac}C}$$

si $m \approx 0$. Pero del enunciado se tiene $C_e/C = 0,4$ y $1 - p = 0,9$, puesto que $10/9 = 1/(1 - p)$ es precisamente el número medio de transmisiones de una trama. Por lo tanto, la fracción de tiempo vale

$$\frac{n}{n + T_{ac}C} = \frac{4}{9}.$$

Examen de Fundamentos de Telemática

12 de junio de 2009

Nombre: _____ D.N.I.: _____

Problema 1 (2 puntos).

En un instituto se han formado, en igual número, equipos de fútbol (11 jugadores) y de balonmano (7 jugadores).

1. Suponga que se sabe que, en un equipo elegido al azar, no hay dos alumnos que hayan nacido el mismo día de la semana. ¿Cuánta incertidumbre existe acerca del deporte que practica el equipo? Considere que el año tiene 52 semanas exactas.
2. Ídem si se sabe que en el equipo sí hay alumnos nacidos el mismo día.

Solución.

1. Ninguna. En el equipo de fútbol necesariamente debe haber jugadores que hayan nacido el mismo día de la semana.
2. Sea $\mathcal{E}$ el evento "alumnos nacidos el mismo día de la semana" y sea X el tipo de equipo. Entonces

$$H(X|\mathcal{E}) = H(P(X = \text{fútbol}|\mathcal{E}))$$

Se calcula fácilmente que

$$P(X = \text{fútbol}|\mathcal{E}) = \frac{1}{1 + 1 - \frac{1}{7}} \approx 0.50 \text{ y } H(P(X = \text{fútbol}|\mathcal{E})) \approx 1 \text{ bit.}$$

Problema 2 (2 puntos).

Suponga que el alfabeto de una fuente discreta sin memoria está formado por las 27 entradas del diccionario. Suponga que es uniforme la función de masa de probabilidad de dicha fuente y que se codifican los símbolos de la fuente uno a uno.

1. Determine la eficiencia de un codificador compacto binario.
2. Determine la eficiencia de un codificador compacto ternario.

Solución.

1. Un codificador compacto binario de una fuente uniforme produce palabras cuyas longitudes difieren a lo sumo una unidad (véase prob. 10 del boletín 2); en este caso, 5 palabras de longitud 4 y 22 palabras de longitud 5. Por tanto, la longitud del código es $L = 4 \times 5 + 22 \times 27 \approx 4.81$, y la eficiencia vale

$$\eta = \frac{H_2(X)}{L} \approx 98,7 \%$$

Observe que no es necesario construir el árbol de codificación Huffman.

2. La eficiencia es 1 puesto que las probabilidades de los símbolos de la fuente son potencias enteras de 3 (el número de elementos del alfabeto de codificación).

Problema 5 (2 puntos).

Considere el código binario de paridad simple $(n, n-1)$ en el que la redundancia es tal que el número de símbolos no nulos de todas las palabras del código es par.

1. Demuestre que es cíclico y obtenga su polinomio generador.
2. Calcule la probabilidad de que no se detecte un error cuando se transmite sobre un canal binario simétrico sin memoria.

Solución.

1. En primer lugar, veamos que el código es lineal, lo que es cierto porque este código consta de todos los vectores de n bits y peso par, que contiene el vector nulo y es un conjunto cerrado para la suma. Para ver que es cíclico, es suficiente con notar que la rotación cíclica de cualquiera de las palabras del código preserva su peso (par) y da como resultado otra palabra del código. El polinomio generador es $x - 1$.

2. La probabilidad de no detectar un error es

$$\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{2i} p^{2i} (1-p)^{n-2i}$$

siendo $A_{2i} = \binom{n}{2i}$ el número de palabras del código de peso $2i$.

Problema 6 (1 punto).

Considere un enlace de las siguientes características: $C = 1$ Mbits/s, tasa de error de bit $\kappa = 5 \cdot 10^{-6}$ y tiempo de asentimiento despreciable. Si se usa un protocolo ARQ de parada y espera con $m = 100$, ¿para qué rango de valores de n no supera la cadencia eficaz los 500 Kbits/s?

Solución. Conocida la forma de variación de la cadencia eficaz (o de la eficiencia) del protocolo con n , el problema plantea una cuestión geométrica simple: se trata de determinar las soluciones, si las hay, de la ecuación

$$(1 - \kappa(n+m)) \frac{n}{n+m} = \frac{1}{2}$$

Si la ecuación no tiene solución real o hay una sola, entonces para ningún valor de n supera la cadencia eficaz los 500 Kbits/s.

Pero si la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como es el caso, $n_1 \approx 100,5$ y $n_2 \approx 99799,5$, entonces la cadencia eficaz no supera los 500 Kbits/s para $\{n : n \leq 100 \text{ o } n \geq 99800\}$.

12 junio 2009 (parte de atrás)

8. Una familia de códigos lineales queda definida por la matriz de comprobación de paridad con la siguiente estructura:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_{m-1}^T & & \end{pmatrix}. \text{ Siendo } V_{m-1} \text{ una matriz por bloques cuyas columnas son todos los vectores binarios de longitud } m-1. \text{ Calcula longitud, dimensión y distancia.}$$

9. Imagine un enlace de datos punto a punto con un emisor que supiera al instante si las tramas que transmite han llegado bien. Sea p la probabilidad de error en la transmisión de una trama cualquiera. ¿Cuál es la cadencia eficaz del enlace?

10. Explique de forma clara y precisa en que condiciones la eficiencia de una red CSMA/CD resulta ser mejor que la de Aloha.

- b) Considere ahora el código con matriz de comprobación de paridad

$$H^T = \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & H \end{pmatrix}.$$

Muestre que si u y v pertenecen al código definido por H , entonces (u, v) es una palabra del código definido por H^T . Deduzca de aquí la distribución de pesos del código compuesto (1 punto)

La matriz H^T define el código $\{20, 10, 4\}$ $\{(u, v) : u, v \in C\}$ en donde C denota el código que H da. En efecto

$$0 = (a, b) \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & H \end{pmatrix}^T = (aH^T + bH^T, bH^T) \Leftrightarrow aH^T = bH^T = 0.$$

Puesto que $p_H(u, v) = p_H(u) + p_H(v)$, la distribución de pesos $\{B_i\}$ del código compuesto es

$$B_i = \sum_k A_k A_{i-k}.$$

Lo que significa $B_0 = B_{20} = 1, B_4 = B_8 = B_{12} = 30, B_6 = B_{14} = 225, B_{10} = 152$.

5. $g(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ genera un código cíclico [15, 12].

- a) ¿Es $11 \dots 1$ una palabra del código? (1 punto)

No, las palabras del código tienen todas peso par ($g(1) = 0$).

- b) Encuentre un vector de peso 1 corregible con este código. ¿Son igualmente corregibles los desplazamientos cíclicos de este vector? ¿Por qué? (1 punto)

Los 7 errores simples que este código corrige se pueden elegir libremente. Hay, claro está, 15 posibles errores simples, de manera que es imposible corregir todos ellos.

6. (1 punto) Calcule el valor de la cadencia eficaz máxima en un enlace que utiliza la estrategia de envío continuo con rechazo selectivo.

Use el libro o sus propios cálculos para ver que el tamaño óptimo de las tramas es $n^* = -m + \sqrt{m/p_v}$. Sustituyendo este valor en la expresión de la cadencia eficaz, resulta un valor máximo

$$C_c = (1 - \sqrt{mp_b})^2 C.$$

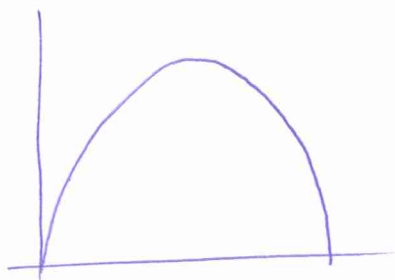
7. (1 punto) Un hipotético sistema del tipo Aloha ramurado, con ramuras de duración igual a una trama, consta de n estaciones. Todas transmiten en cada ramura con probabilidad $1/n$ excepto una que lo hace con probabilidad p . Obtenga una expresión para el tráfico cursado.

Basta con calcular la probabilidad de transmisión con éxito en una ramura cualquiera, que es

$$p(1-1/n)^{n-1} + (1-p)(n-1)(1/n)(1-1/n)^{n-2} = (1-1/n)^{n-1}.$$

Curiosamente, no depende de p . Explíquelo.

- Cadencia eficaz máxima:



$$C_{\max} = \frac{\partial C_e}{\partial n} = 0 \Rightarrow n_{\text{opt}}$$

Para envío continuo (rechazo simple o selectivo):

$$n_{\text{opt}} = -m + \sqrt{\frac{m}{P_b}}$$

12 junio 2009 (parte de atrás)

6. Calcular la $C_{\max}$ para rechazo selectivo:

$$C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n+m} = \frac{(1-P_b(n+m)) \cdot n \cdot C}{n+m}$$

$\uparrow$
 $P = P_b(n+m)$

$$\boxed{C_{\max} = C_e \Big|_{n=\text{opt}} = \left(1 - \sqrt{m \cdot P_b}\right)^2 \cdot C}$$

Convocatoria Enero 2014 (Dictado)

8. Calcular la región de parámetros en la que la estrategia de envío continuo con rechazo simple tiene una cadencia eficaz de al menos un 25% mejor que parada y espera en las mismas condiciones. Considera $T_{\text{as}} \cdot C = \text{longitud de trama}$. (1 pto)

Rechazo simple: $C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n+m + P \cdot T_{\text{as}} \cdot C}$

Parada y espera: $C_e = \frac{(1-p) \cdot n \cdot C}{n+m + T_{\text{as}} \cdot C}$

$$C_{e,s} \geq 1,25 \cdot C_{e,p.e} = C_{e,p.e} + 0,25 \cdot C_{e,p.e}$$

↑
parada y
espera

$$\frac{(1-P) \cdot n \cdot C}{n+m \cdot P \cdot T_{as} \cdot C} \geq 1,25 \cdot \frac{(1-P) \cdot n \cdot C}{n+m \cdot T_{as} \cdot C}$$

$$T_{as} \cdot C = l = n+m$$

$$\frac{1}{n+m+P(n+m)} \geq 1,25 \frac{1}{n+m+n+m} \Rightarrow \frac{1}{n+m(1+P)} \geq 1,25 \frac{1}{2(n+m)}$$

$$\Rightarrow (1+P) \leq \frac{2}{1,25}$$

$$P \leq \frac{2}{1,25} - 1$$

Examen FT (2013)

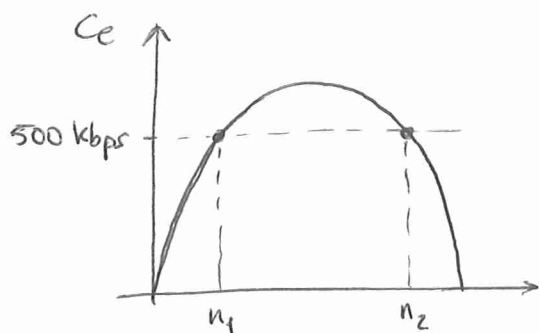
5. (parcial 2013)

a) El tamaño óptimo de trama es aquel con el que se consigue la cadencia eficaz máxima. se calcula:

$$\frac{\partial C_e}{\partial n} = 0 \Rightarrow n_{opt} = -m + \sqrt{\frac{m}{P_b}} \stackrel{\substack{m=100 \\ P_b=5 \cdot 10^{-6}}}{=} \frac{10^4}{\sqrt{5}}$$

$$l_{opt} = n_{op} + m = \frac{10^4}{\sqrt{5}} + 100$$

b) El comportamiento de C_e frente a la longitud del campo de datos (n) :



$$n_2 \leq n \leq n_1$$

$$C_e = 500 \text{ kbps.}$$

$$C_e = (1-p) \cdot \frac{n \cdot C}{n+m} = \frac{[1-k(n+m)] \cdot n \cdot C}{n+m} = 500 \text{ kbps} = \frac{C}{2}$$

$$n - k \cdot n^2 - k \cdot m \cdot n = 0,5(n+m)$$

$$n - k \cdot n^2 - k \cdot m \cdot n - 0,5n - 0,5m = 0$$

$$n^2 - \frac{n(1 - k \cdot m - 0,5)}{k} + \frac{0,5m}{k} = 0$$

$$n^2 - n \left(\frac{1 - 5 \cdot 10^{-6} \cdot 100 - 0,5}{5 \cdot 10^{-6}} \right) + \frac{0,5 \cdot 100}{5 \cdot 10^{-6}} = 0$$

$$n^2 - n \cdot 999000 + 10^7 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow n_1 = 100 \\ \searrow n_2 = 10^5 \end{matrix}$$

Examen FT (2013)

Pregunta 7.

$$\bar{n}_{tx} = \frac{1}{p(\text{exito})} = \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-p_b(n_{opt}+m)}$$

$$p = p_b(n+m)$$

$$n_{opt} = -m + \sqrt{\frac{m}{p_b}}$$

Comprobamos que: $\frac{1}{1 - P_b(n_{opt} + m)} = \sqrt{\frac{C}{C_{max}}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - P_b(n_{opt} + m)} = \sqrt{\frac{C}{(1 - \sqrt{m \cdot P_b})^2 \cdot C}} \Rightarrow \boxed{\sqrt{\frac{1}{(1 - \sqrt{m \cdot P_b})^2}} = \frac{1}{1 - P_b(n_{opt} + m)}} \quad (*)$$

$$\bar{n}_{tx} = \frac{1}{1 - P_b(n_{opt} + m)} = \frac{1}{1 - P_b(-m + \sqrt{\frac{m}{P_b}} + m)} = \frac{1}{1 - P_b \cdot \sqrt{\frac{m}{P_b}}} =$$

$$= \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{m \cdot P_b^2}{P_b}}} = \frac{1}{1 - \sqrt{m \cdot P_b}}$$

$$(*) \quad \frac{1}{1 - P_b(n_{opt} + m)} = \frac{1}{1 - \sqrt{m \cdot P_b}}$$

Boletín 17/11/14

Problema 6.

a) Rechazo selectivo: $C_{max} = \phi \cdot C \quad 0 < \phi < 1$

$$\frac{C_{max}}{C} = S = \phi$$

$$C_{max} = (1 - \sqrt{m \cdot P_b})^2 \cdot C = \phi \cdot C$$

$$P_b' = \frac{P_b}{2}$$

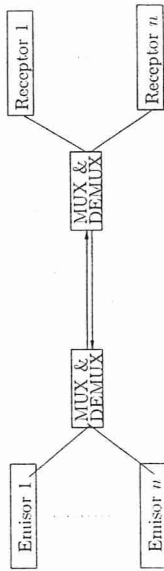
$$C_{max}' = (1 - \sqrt{m \cdot P_b'})^2 \cdot C \Rightarrow C_{max}' = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{m \cdot \frac{P_b}{2}}\right)^2 \cdot C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{max} = \left(1 - \frac{1 - \sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot C}$$

Problema 6.

a) La cadencia eficaz máxima en un enlace que opera con la estrategia de rechazo selectivo vale ϕC , con $0 < \phi < 1$. ¿Cuánto valdría si la probabilidad de error por bit se redujese a la mitad? (1 punto)

b) Considere un enlace punto a punto compartido por un número suficientemente grande de pares de usuarios, emisor $i \rightarrow$ receptor i , *independientes*. Cada par emplea una estrategia de retransmisión por parada y espera con idénticos parámetros de funcionamiento. Razone cuál sería la cadencia eficaz de este enlace. (1 punto)



a) La cadencia eficaz máxima de la estrategia de envío continuo con rechazo selectivo vale

$$(1 - \sqrt{mp_n})^2 C$$

siendo m el número de bits de control en cada trama y p_n la probabilidad de error por bit. Así pues

$$(1 - \sqrt{mp_n})^2 = \phi$$

y, haciendo $p'_n = p_n/2$, la cadencia eficaz máxima pasaría a valer

$$\sqrt{mp'_n} = \frac{\sqrt{mp_n}}{\sqrt{2}} \Rightarrow (1 - \sqrt{mp'_n})^2 C = \left(1 - \frac{1 - \sqrt{\phi}}{\sqrt{2}}\right)^2 C.$$

b) Suponga que el multiplexor es capaz de intercalar de forma ideal (sin solapamientos y sin tiempos muertos) las tramas provenientes de cada emisor (idem para los asentimientos), ya sean tramas nuevas o retransmisiones. En estas condiciones, el canal directo se utiliza todo el tiempo y cada trama se envía exactamente el número de veces necesario para que llegue a su receptor sin errores. Pero este es precisamente el funcionamiento idealizado de la estrategia de envío continuo con rechazo selectivo y ventana de transmisión infinito, de modo que la cadencia eficaz de este enlace de comunicaciones coincide

$$C_e = (1 - p) \frac{n}{n + m} C \text{ bits/u.t.}$$

Observe que cada par emisor $\rightarrow$ receptor puede entenderse, a conveniencia, como una pareja de entes de comunicaciones físicos o bien como una pareja *virtual*. En este último caso, se concluye algo muy simple: la división de tasa (*rate splitting*) en origen, combinada con multiplexores estadísticos optimiza el uso del enlace, no importa cuál sea la estrategia de retransmisión elegida.

- b) Si no hay vectores de peso impar la distancia del código es al menos 4 y los errores simples se pueden corregir. Puesto que

$$x^{17} + x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^6 + x^4 + x^3 + x + 1 \pmod{g(x) = x^8}$$

la palabra del código más cercana a $v(x)$ es $v(x) + x^8$. Esa sería la salida del decodificador.

Problema 5 (2 puntos) Considere el código con matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Obtenga razonadamente la distancia.
- Demuestre que el código sólo contiene palabras de peso par.
- Sabiendo que el código corrige el mismo número de errores de peso par que de peso impar, obtenga la distribución de pesos de los errores corregibles.
- La distancia es 4: no hay columnas nulas ni dos iguales, la suma de cualesquiera tres columnas produce un vector cuyo último bit nunca es nulo y es posible encontrar cuatro columnas linealmente dependientes, por ejemplo las cuatro primeras.
- Sólo sumando un número par de columnas se obtiene un síndrome nulo, ya que la última fila de H contiene sólo unos. O bien, la última de las ecuaciones de comprobación de paridad $yH^t = 0$ es

$$\sum_{i=1}^{11} y_i = 0$$

lo que se cumple si y sólo si $p_H(y)$ es par.

- Como $d_c = 4$ se tiene de inmediato que $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_1 = 11$. El código corrige, además, algunos errores dobles y triples. Echando mano del enunciado se tiene que $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_0 + \alpha_2$ y se sabe que $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 32$. La solución de estas dos ecuaciones lineales es $\alpha_2 = 15$ y $\alpha_3 = 5$.

Problema 6 (1 punto) Medidas realizadas en un enlace punto a punto que emplea la retransmisión de tramas con rechazo selectivo han determinado que si se dobla la longitud del campo de datos de las tramas la cadencia eficaz no varía. Si las tramas portan 150 bits de control y la probabilidad de error por bit es 10^{-5} , ¿qué longitud tienen las tramas y cuánto vale la eficiencia?

Sea x el tamaño (desconocido) de las tramas. De acuerdo con el enunciado tiene que cumplirse que $C_e(2x) = C_e(x)$, siendo

$$C_e(x) = (1 - \kappa(x + m)) \frac{x}{x + m}$$

para $\kappa = 10^{-5}$ y $m = 150$. Por tanto, igualando las expresiones

$$(1 - \kappa(2x + m)) \frac{2x}{2x + m} = (1 - \kappa(x + m)) \frac{x}{x + m}$$

se sigue que x tiene que ser solución de

$$(1 - \kappa(2x + m)) \frac{2}{2x + m} = (1 - \kappa(x + m)) \frac{1}{x + m}$$

o bien de

$$2(1 - \kappa(2x + m))(x + m) = (1 - \kappa(x + m))(2x + m)$$

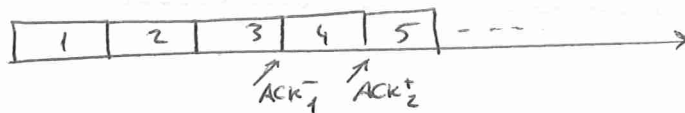
que es una ecuación de segundo grado. Operando de modo sencillo, la ecuación anterior se escribe como

$$(x + m)(2x + m) = \frac{m}{\kappa}$$

cuya única solución positiva es $x_0 \approx 2626$ bits. La eficiencia valdrá entonces

$$\frac{C_e}{C_e}(x_0) \approx 94\%.$$

b)

 ∇x :

Al multiplexar un número suficientemente grande de br el comportamiento global se puede ver como un envío continuo. Puesto que los transmisiones son independientes unos de otros, solo se retransmitirán las tramas fallidas. Se trata por tanto de un rechazo selectivo.

Boletín 17/11/14Problema 6.

Datos: $Ce|_n = Ce|_{zn}$

$$m = 150$$

$$Pb = 10^{-5}$$

¿? S?

Rechazo selectivo:

$$Ce = \frac{(1 - Pb(n+m)) \cdot n \cdot \cancel{C}}{n+m} = \frac{(1 - Pb(zn+m)) \cdot zn \cdot \cancel{C}}{zn+m}$$

$$(1 - Pb(n+m)) \cdot (zn+m) = (1 - Pb(zn+m)) \cdot (n+m) \cdot z$$

$$zn+m - Pb \cdot zn^2 - Pb \cdot zn \cdot m - Pb \cdot m \cdot zn - Pb \cdot m^2 = zn + zm - Pb \cdot zn \cdot zn \dots$$

elegimos n positivo $n \approx 2626$ bits

$$L = n+m = 2626 + 150 \text{ bits}$$

$$S = \frac{Ce}{C} = \frac{(1 - Pb(n+m)) \cdot n}{n+m} = 0,94$$

$$Pb = 10^{-5}$$

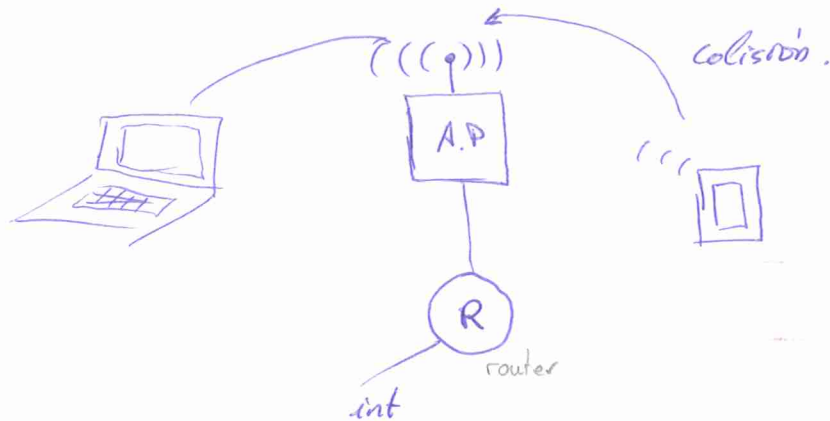
$$n = 2626$$

$$m = 150$$

TEMA 6: CANALES DE ACCESO MÚLTIPLE.

1. Introducción.

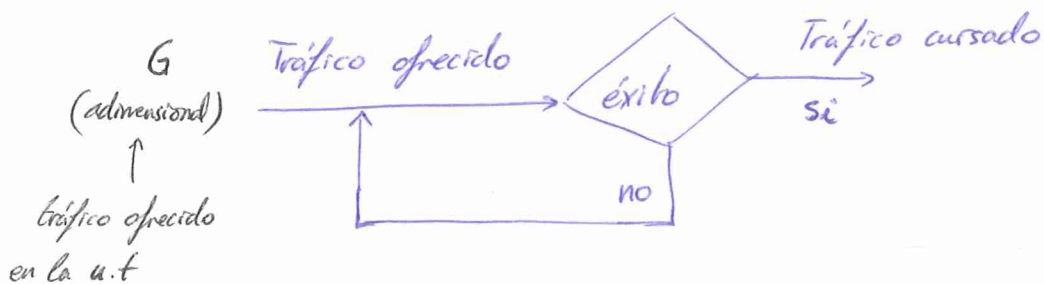
Se estudian sistemas de transmisión donde el medio es compartido



Solución del problema: Protocolos MAC (Control de Acceso al Medio)

- Aloha
- CSMA, CSMA/CD, CSMA/CA

El sistema es el siguiente:



— Parámetros:

• Suponemos que todas las estaciones transmiten tramas de la misma longitud.

tipos de transmisión:

$$\tau = \frac{L}{C}$$

$\uparrow$ longitud de la trama (bits)
 $\uparrow$ bps.

$\tau \equiv$ u. tiempo

Tráfico ofrecido:

- Intensidad de tráfico ofrecido: G

G : tráfico ofrecido por todas las estaciones en la u. de tiempo

Ej: si cada estación transmite $\lambda_i = 500$ kbps y hay $n = 100$ estaciones calcula G sabiendo que el canal tiene $C = 10$ kbps y $L = 1000$ bits.

λ_T = tráfico total ofrecido.

$$\lambda_T = n \cdot \lambda_i = 100 \cdot 500 \text{ bps} = 50 \text{ Mbps}$$

$$\boxed{G = \lambda_T \cdot \tau}$$

$\frac{\text{bits}}{\text{u.t}} \quad \frac{\text{bit}}{\text{s}} \quad \frac{\text{s}}{\text{u.t}}$

$$\tau = \frac{L}{C} = \frac{1000 \text{ bit}}{10^7 \text{ bps}} = 10^{-4} \frac{\text{s}}{\text{u.t}}$$

$$\boxed{G = 50 \text{ Mbps} \times 10^{-4} \frac{\text{s}}{\text{u.t}} = 5 \cdot 10^7 \cdot 10^{-4} = 5000 \frac{\text{bit}}{\text{u.t}}}$$

$$\boxed{G = \lambda_T \cdot \tau = 50 \text{ k pkt/s} \cdot 10^{-4} \frac{\text{s}}{\text{pkt}} = 5} \quad \text{paquetes cada } \tau$$

$\frac{\text{paquetes}}{\text{s}} \quad \frac{\text{s}}{\text{pkt}}$

Tráfico cursado:

- Intensidad de tráfico cursado: S

$$S \equiv \text{tráfico cursado en la u.t (cada } \tau_s) \quad \underline{0 < S \leq 1}$$

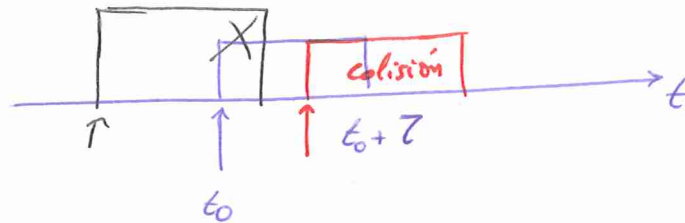
S $\equiv$ indica el n.º medio de tramas que se pueden cursar en la u.t (cada τ_s)

$$\boxed{S \equiv \text{Eficiencia de los protocolos MAC}}$$

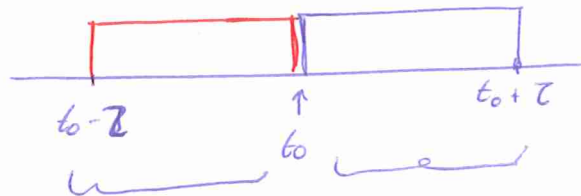
2. Protocolo Aloha. Aloha puro y Aloha ramurado.

— Aloha puro: Se aplica en redes de transmisión vía radio.

Idea: Cada uno (estación) transmite cuando quiere.



Para que no existiese colisión: (Nadie transmite entre $t_0 - \tau$, $t_0 + \tau$)



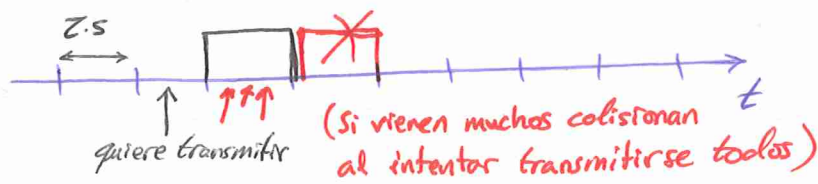
Para que no exista colisión no puede haber mas llegada entre $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$

$$S = p \cdot G$$

$$S_{\max} \approx 0,18$$

18%

— Aloha ramurado: Consiste en sincronizar todas las estaciones ramurando el tiempo:



• Solo se puede transmitir al principio de una ramura.

Consideraciones:

- Suponemos que existen n estaciones
- Cada estación transmite una trama cada T_s con probabilidad p .

S = Intensidad de tráfico cursado = nº medio de tramas que se pueden cursar en la u.t.

$S = 1$, si solo transmite 1 de las n estaciones.

↓

$$S = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$$

Buscamos la eficiencia máxima:

$$p \approx \frac{1}{n}$$

$$S = n \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

Consideramos $n \rightarrow \infty$

$$S_{\max} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{n-1} =$$

$$x = -n \quad n \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$$

Límite nº e:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e^{-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}}_e \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1}}_1 = e^{-1}$$

$$S_{\max} = e^{-1} = 0,37$$

Ejemplo: Calcular: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{an}\right)^{n-1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{a} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x}_{e^{-1}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1}}_{1} = e^{-\frac{1}{a}}$$

Examen 12 julio 2012

Problema 7.

n estaciones

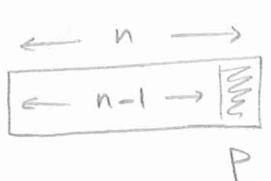
S = intensidad de tráfico cursado = n.º medio de tramas cursados en una ranura.

$$S = 1 \cdot \text{probabilidad (solo transmite una estación)} + 0 \cdot p \text{ (tx más de 1)} = 0$$

$$= \text{prob (solo transmite 1 estación)} =$$

$$= p \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} + \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} \cdot \underbrace{(1-p)(n-1)}_{\substack{\text{multiplicado por el n.º de n menos la que se} \\ \text{transmite}}}$$

$\uparrow$ transmite p y las otras no.
 $\uparrow$ transmite una y el resto no
 $\uparrow$ no transmiten el resto de $\frac{1}{n}$
 $\uparrow$ no transmite la p



Ahora busquemos la eficiencia máxima:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} + \frac{(n-1)}{n} \cdot (1-p) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} \right) =$$

$$= p \cdot \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}}_{e^{-1}} + (1-p) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_1 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2}}_{e^{-1}} =$$

$$= p \cdot e^{-1} + (1-p) \cdot e^{-1} = \underline{\underline{e^{-1}}}$$

Examen 24 mayo 2011.

Problema 6.

$$S = n^2 \text{ medio de tramos que se pueden cursar en una ramura}$$

$$= 2 p (\text{transmite solo 2 estaciones}) + 1 \cdot p (\text{transmite solo 1 estación}) +$$

$$0 \cdot \text{en otro caso} = 2 \cdot \left[\binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} \right] + 1 \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

$$\left[S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\cancel{2} \cdot \underbrace{\frac{n \cdot (n-1)}{\cancel{2}}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{e^{-1}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2}}_{e^{-1}} \right] + \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}}_{e^{-1}} \right] =$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{2 \cdot \cancel{(n-2)!}} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$= e^{-1} + e^{-1} = \boxed{2 \cdot e^{-1}}$$

¿Aumenta la eficiencia si $p = \frac{1}{2n}$?

$$S = 1 p (\text{transmite solo 1}) + 2 \cdot p (\text{transmite 2})$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! (n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{2 \cdot \cancel{(n-2)!}}$$

$$p(\text{tx solo 1}) = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$$

$$p(\text{tx dos}) = \binom{n}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}$$

$$S = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$S = \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{2n}} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{1}{4n^2} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-2} \cdot 2$$

$$p = \frac{1}{2n}$$

$$S = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \frac{n \cdot (n-1)}{n^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-2}$$

$$S_{\max} = S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^{n-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{n(n-1)}{n^2} \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^{n-2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{x}{2}-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{n(n-1)}{n^2} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{x}{2}-2} \right) =$$

$$2n = x$$

$$n = \frac{x}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

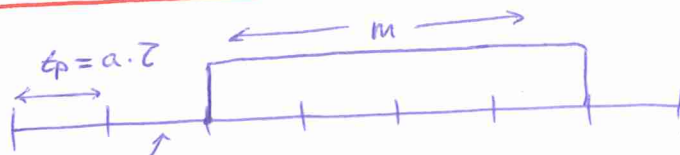
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = e^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1} = e^{-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \underbrace{\left[\left(1 - \frac{1}{x} \right)^x \right]}_{e^{-1}}^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-1} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right)^x \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

3. PROTOCOLO CSMA.



t_p : retardo máximo de propagación.



ETHERNET: limitado por restricciones de retardo a 1500 m.

$$a = \frac{t_p}{\tau} \quad m = \frac{\tau}{a\tau} = \frac{1}{a} \text{ ramas.}$$

$$a \ll 1 \rightarrow m \gg 1$$

Condición para poder transmitir:

Se transmite al principio de una rama si el canal está libre.

Antes de transmitir se "escucha" el medio.

Eficiencia (acceso aleatorio)

- Tráfico ofrecido, G : número medio de intentos de transmisión en un intervalo de duración igual al tiempo de transmisión de una trama
- Tráfico cursado, S : número medio de tramas recibidas sin error durante un intervalo de duración igual al tiempo de transmisión de una trama
- En general, S es función de G y de otros parámetros del sistema (número de estaciones, retardo, etc.)
- La eficiencia de un algoritmo de acceso múltiple es el valor máximo posible de S

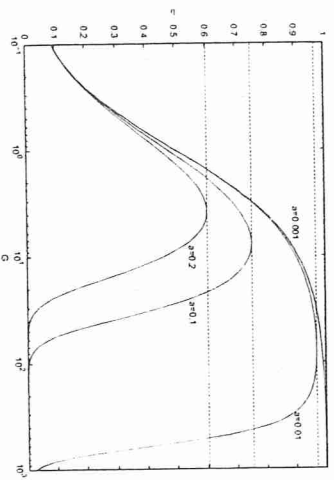
- Aloha ranurado con n estaciones y probabilidad p de intentar la transmisión en una ranura

$$S = \mathbb{P}(\text{transmisión con éxito}) = np(1-p)^{n-1}$$

- Eficiencia S es máxima si $p = 1/n$. En ese caso

$$\eta = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \rightarrow \frac{1}{e} \approx 37\% \text{ si } n \rightarrow \infty$$

Gráficas CSMA/CD



Eficiencia de CSMA

- CSMA:

$$S|_{\text{CSMA}} = \frac{aGe^{-aG}}{1 + (a-1)e^{-aG}}$$

Obsérvese que:

$$S|_{\text{CSMA}} \rightarrow \frac{G}{1+G}, \text{ si } a \rightarrow 0$$

$$\frac{G}{1+G} \rightarrow 1, \text{ si } G \rightarrow \infty$$

- CSMA/CD:

$$S|_{\text{CSMA/CD}} = \frac{aGe^{-aG}}{a + aGe^{-aG} + a(1 - (1 + aG)e^{-aG})}$$

Eficiencia:

$$\eta|_{\text{CSMA/CD,max}} \approx \frac{1}{1 + 3.31a}$$

Examen de Fundamentos de Telemática

24 de mayo de 2011

Nombre: _____ D.N.I.: _____

1. Dada la fuente X , de rango $\mathcal{X} = \{i \in \mathbb{Z}^+ : i \leq 4\}$ y función de masa de probabilidad $p_i = \mathbb{P}(X = i) = 2^{-i}$ para $i < 4$, y un canal cuaternario con borrado con probabilidad de error p en la transmisión de cada símbolo

- Determine la información media transmitida por cada símbolo de la fuente cuando se usa directamente el canal (es decir, sin ninguna codificación). (1 punto)
- Si el coste de transmisión de un símbolo por el canal dado es unitario, ¿cuánto estaríamos dispuestos a pagar por un canal cuaternario fiable si queremos transmitir fielmente un mensaje arbitrariamente largo y no importa el tiempo de transmisión? (1 punto)
- Si el régimen de transmisión de ambos canales es idéntico y los costes son los del apartado anterior, ¿cuánto costaría transmitir un mensaje de la fuente de n (arbitrariamente grande) símbolos si se usasen simultáneamente los dos canales? (1 punto)

2. (1 punto) La secuencia

$A, N, U, L, (1, 2, L), (5, 3, U), Z, (7, 2, Z), (3, 8, N), (1, 2, \emptyset)$

representa la división en frases del algoritmo LZ77 aplicado a un mensaje. Las ternas tienen el significado (índice, longitud de la frase, sufijo), la primera letra del mensaje tiene índice 1 y $\emptyset$ denota el sufijo nulo. Averigüe el mensaje.

3. La matriz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & I_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es de comprobación de paridad de un código lineal. Resuelva razonadamente las siguientes cuestiones:

- Obtenga la distribución de pesos de los errores corregibles. (1 punto)
 - Considere el subconjunto de palabras del código que comienzan por 0. Obtenga la distribución de pesos de este subcódigo. (1 punto)
4. $g(x) = x^8 + x^5 + x^4 + x^3 + 1$ genera un código cíclico $[17, 9]$.
- Muestre que no existen palabras del código de peso 2. (1 punto)
 - Tampoco las hay de peso 3. ¿Cuál sería la salida de un decodificador de mínima distancia si se recibe el polinomio $x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + x + 1$? (1 punto)

5. (1 punto) Dos equipos están conectados mediante M enlaces paralelos idénticos con tasa de transmisión C bits/s. ¿Cuál sería la cadencia eficaz agregada si se utiliza una estrategia de envío continuo con rechazo simple para transmitir por cada uno de ellos? Compárela con la cadencia eficaz de un único enlace de tasa de transmisión MC bits/s que usase la misma estrategia y tuviera iguales los restantes parámetros.

6. (1 punto) En un hipotético sistema del tipo Aloha ramurado, con ranuras de duración igual a una trama, las transmisiones son exitosas si en cada ranura hay uno o dos intentos de transmisión. Si las estaciones transmiten independientemente con probabilidad $p = 1/n$ en cada ranura, ¿cuál será la eficiencia (para $n \rightarrow \infty$) del sistema? ¿Aumenta la eficiencia si $p = 1/(2n)$? Suponga que ninguna estación transmite dos tramas en una misma ranura.

Examen de Fundamentos de Telemática

12 de julio de 2011

Nombre: _____ D.N.I.: _____

1. (1 punto) Determine la capacidad de un canal si se sabe que la matriz de probabilidad conjunta de las variables aleatorias de entrada y salida es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix}$$

2. (2 puntos) Considere un sistema de transmisión formado por una fuente ternaria uniforme, una canal cuaternario y codificadores de fuente y de canal ideales.

- Si se sabe que 1/3 de los símbolos transmitidos por el canal son redundantes, ¿cuál es su capacidad en bits?
- Si el coste de uso del canal (i.e., el coste de transmisión de un símbolo) es unitario, ¿cuál será el coste de transmitir un mensaje de la fuente de longitud $n (\gg 1)$?

3. (1 punto) La secuencia

$$A, L, (1, 4, B), (1, 2, R), (1, 9, D), E, (8, 2, O), (4, 5, L), (1, 2, D), (A, 2, \emptyset)$$

representa la división en frases del algoritmo LZ77 aplicado a un mensaje. Las ternas tienen el significado (índice, longitud de la frase, sufijo), la primera letra del mensaje tiene índice 1 y $\emptyset$ denota el sufijo nulo. Averigüe el mensaje.

4. La matriz

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ I_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es de comprobación de paridad de un código lineal. Resuelva razonadamente las siguientes cuestiones:

- Obtenga la distribución de pesos del código (1 punto)
- Considere ahora el código con matriz de comprobación de paridad

$$H' = \begin{pmatrix} H & H \\ 0 & H \end{pmatrix}.$$

Muestre que si u y v pertenecen al código definido por H , entonces (u, v) es una palabra del código definido por H' . Deduzca de aquí la distribución de pesos del código compuesto. (1 punto)

5. $g(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ genera un código cíclico [15, 12].

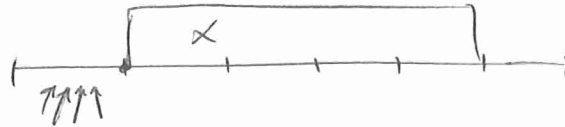
- ¿Es $11 \dots 1$ una palabra del código? (1 punto)
- Encuentre un vector de peso 1 corregible con este código. ¿Son igualmente corregibles los desplazamientos cíclicos de este vector? ¿Por qué? (1 punto)

6. (1 punto) Calcule el valor de la cadencia eficaz máxima en un enlace que utiliza la estrategia de envío continuo con rechazo selectivo.

7. (1 punto) Un hipotético sistema del tipo Aloha ranurado, con ranuras de duración igual a una trama, consta de n estaciones. Todas transmiten en cada ranura con probabilidad $1/n$ excepto una que lo hace con probabilidad p . Obtenga una expresión para el tráfico cursado.

¿Puede haber colisión en CSMA?

Si.

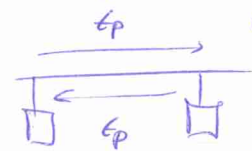


4. PROTOCOLO CSMA/CD

CSMA con Detección de Colisión.



- Antes de transmitir se "escucha" el medio. Si está libre se transmite.
- Iniciada la transmisión se sigue "escuchando" el medio para detectar colisión. Esto se hace durante $2tp$ (1 ranura).
- Si se detecta colisión se corta la transmisión y el medio queda libre.



TIEMPO MÍNIMO DE TRANSMISIÓN?

$$\tau_{min} = 2 \cdot tp$$

$$\tau_{min} = \frac{L_{min}}{C}$$

longitud mínima de trama:

$$L_{min} = \tau_{min} \cdot C$$

La eficiencia máxima en CSMA/CD:

$$S_{max} = \frac{1}{1 + 3,31 \cdot a}$$

$$a = \frac{tp}{\tau}$$

10. Explique de forma clara en que condiciones la eficiencia de una red CSMA/CD es mejor que la de Aloha.

$$\begin{array}{ll} \text{Aloha ramurado:} & \text{CSMA/CD:} \\ S_{\max} = e^{-1} \approx 0,37 & S_{\max} = \frac{1}{1 + 3,31 \cdot a} \end{array}$$

CSMA/CD será mejor que Aloha cuando $\frac{1}{1 + 3,31 \cdot a} > 0,37$. Para valores de $a > \quad$ despejar a .

Examen FT 2013

Cuestión 8. ¿Es cierto que si a una red CSMA/CD se añaden nuevas estaciones el rendimiento empeora? Apoye o refute esta idea.

Falso. Lo que le afecta al rendimiento de CSMA/CD es el retardo de propagación (t_p)

Ejercicios CSMA/CD.

Problema 8.1.

Datos: $C = 1 \text{ Gbps}$
 $\text{Distancia} = 1 \text{ km}$
 $V_p = 200.000 \text{ km/s}$

$$L_{\min} = Z_{\min} \cdot C$$

$$Z_{\min} = 2 \cdot t_p$$

$$t_p = \frac{\text{Distancia}}{V_p} = \frac{1 \text{ km}}{2 \cdot 10^5 \text{ km/s}} = 5 \mu\text{s}.$$

$$L_{\min} = 10^{-5} \text{ s} \cdot 10^9 \frac{\text{bits}}{\text{s}} = 10^4 \text{ bits}$$

$$Z_{\min} = 2 \cdot t_p = 10 \mu\text{s} = 10^{-5} \text{ s}$$

2. Determine la fracción de ranuras exitosas y la fracción de ranuras vacías.

Problema 7.

1. Si el número medio de intentos necesarios para la transmisión de un mismo paquete en un canal Aloha ranurado con tráfico poissoniano es 2, calcule la fracción de las ranuras en las que se produce una colisión.
2. Ídem en una red CSMA no persistente con un retardo máximo de propagación igual a la décima parte del tiempo de transmisión de una trama.

Problema 8.

1. Suponga que considera construir una red CSMA/CD de 1 Gbps sobre un cable de 1 Km sin repetidores. La velocidad de propagación de la señal en el cable es de 200000 Km/s. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de trama?
2. Una red token-ring de fibra óptica tiene 200 Km de longitud y su velocidad de transmisión es de 100 Mbps. La velocidad de propagación de la señal en la fibra es de 200000 Km/s y el tamaño máximo de trama es de 8000 bits. ¿Cuál es la máxima eficiencia del anillo?
3. Medidas realizadas en un canal Aloha ranurado con un número infinito de usuarios muestran que el 10 % de las ranuras están vacías. ¿Cuál es la eficiencia? ¿Cuál es el porcentaje de ranuras en las que hay colisión?

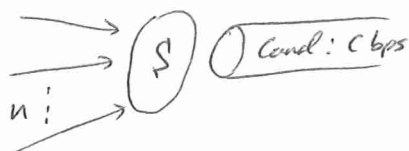
Problema 9. Suponga que se tiene una red CSMA/CD de 10 Mbps sobre un cable de 1 Km sin repetidores. Considere que la velocidad de propagación de la señal en el cable es de 200000 Km/s. ¿Cuántas estaciones podrían conectarse, en el mejor de los casos, a esta red si cada una de ellas genera de forma aleatoria datos a razón de 100 Kbps en tramas de longitud constante igual a 10 veces el tamaño mínimo? Explícite las hipótesis que permitirían alcanzar tal número de estaciones.

Problema 10. Suponga que se modifica el método de acceso de token-ring de forma que ahora es la estación destino la que elimina la trama de datos del anillo, enviando una trama de confirmación corta en lugar de dejar que la trama original vuelva al emisor. Calcule la eficiencia con este método.

Problema 11. Dada una red CSMA/CD en la que todas las estaciones transmiten tramas de igual longitud, 10 veces mayor que la longitud mínima, ¿cuál es el número máximo de estaciones que pueden conectarse si cada una genera tráfico (nuevo) con una intensidad de 0.01?

Problema 12. Dada una red CSMA/CD ranurada, determine la longitud media de los intervalos de ranuras en las que hay colisión si:

1. El tráfico ofrecido es poissoniano.
2. La red tiene N estaciones que, cuando el medio está libre, transmiten independientemente unas de las otras con probabilidad p .



tasa de entrada de inf. al canal $\leq$ tasa de infor. por el canal.

$$N_{i \max} \cdot \lambda_{i \max} \leq C \cdot S_{\max}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 velocidad de tx eficiencia
 de cada estación.



Problema 9.

$$L = 10 \text{ Lmin} \Leftrightarrow \tau = 10 \cdot \tau_{\min} = 10 \cdot 2 \tau_p = 20 \tau_p$$

$$C = 10 \text{ Mbps}$$

$$\text{Distancia} = 1 \text{ km}$$

$$V_p = 200000 \text{ km/s}$$

$$N?$$

$$J_i = 100 \text{ kbps.}$$

$$N \cdot J_i \leq C \cdot S_{\max}$$

$$N \leq \frac{C \cdot S_{\max}}{J_i} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0,862}{100 \cdot 10^3} = 86,2$$

$$S_{\max} = \frac{1}{1 + 3,31 \cdot a} = \frac{1}{1 + 3,31 \cdot \frac{1}{20}} = 0,862$$

$$a = \frac{\tau_p}{\tau} = \frac{\tau_p}{20 \tau_p} = \frac{1}{20}$$

$$\tau = 20 \tau_p$$

Por tanto:

$$N_{\max} = 86$$

Problema 11.

$$G = 10 \tau_{\min}$$

$$N_{\max}?$$

$$\text{Intensidad de tráfico ofrecido: } 0,01 = G_i$$

$$G = \sum_i G_i = N_{\max} \cdot G_i$$

$$G_i = \frac{\lambda_i}{c}$$

$$N_{\max} \cdot \lambda_i \leq C \cdot S_{\max}$$

$$a = \frac{\tau_p}{\tau} = \frac{\tau_p}{20 \tau_p} = \frac{1}{20}$$

$$N_{\max} \leq \frac{C \cdot S_{\max}}{\lambda_i} = \frac{S_{\max}}{G_i} = \frac{0,862}{0,01} = 86,2$$

$$S_{\max} = \frac{1}{1 + 3,31 a} = 0,862$$

$$N_{\max} = 86$$

Julio 2014.

10. El rendimiento del sistema aloha es: $S(p) = n \cdot p (1-p)^{n-1}$

si $p = \frac{z}{n}$ y $n \rightarrow \infty$ calcular la eficiencia.

$$S = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \underset{p = \frac{z}{n}}{=} n \cdot \frac{z}{n} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1} \stackrel{(*)}{=}$$

Nota: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{x = -n}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1} = e^{-1}$$

$$\stackrel{(*)}{=} z \left(1 - \frac{1}{n/2}\right)^{n-1} =$$

$$S \underset{n \rightarrow \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} z \left(1 - \frac{1}{n/2}\right)^{n-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} z \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} z \underbrace{\left[\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x\right]^2}_{e^{-1}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1}}_1$$

$$\boxed{S_{\max} = z \cdot e^{-1}}$$

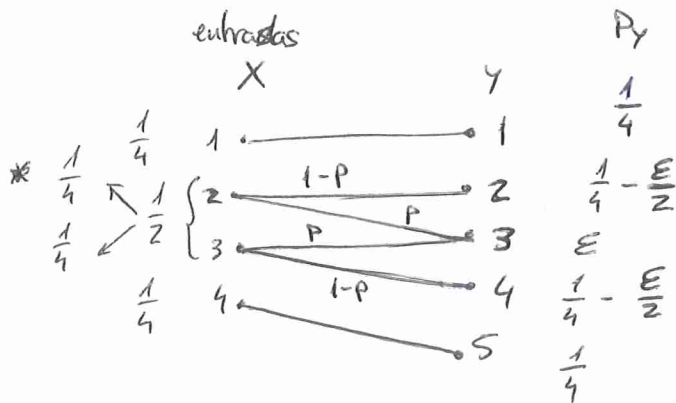
ENERO 2012.

1.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4x5
↑
entradas salidas

¿p? $I(x; y) = \frac{7}{4}$ bits?



$$P(y=1) = \overbrace{P(y=1/x=1)}^{1/4} \cdot P(x=1)$$

↓
 $P(x=1) = \frac{1}{4}$

$$P(y=2) = P(y=2/x=2) \cdot P(x=2) = (1-p) \cdot \frac{1}{4} = P(y=4)$$

$$I(x; y) = H(x) - H(x/y) = H(y) - \underbrace{H(y/x)}_{P(y/x)}$$

Vamos por este camino puesto que parece que podremos sacar $P(y/x)$

* Como el canal se comporta igual para el 2 y para el 3 con las mismas probabilidades. Esto solo puede ser si sus probabilidades son equiprobables.

Hecho al principio de los apuntes.

4.

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right] \rightarrow \frac{1}{2^3}$$

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32} \right] \rightarrow \frac{1}{2^5}$$

$$P_{128} = \left\{ \overbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{m-1}}, \frac{1}{2^{m-1}}}^{x_1, x_2} \right\}$$

$m=128$

Si $\log_2 \frac{1}{p_i} \equiv \text{entero } \forall i \Rightarrow L = H_2(\vec{p})$

código óptimo: $\bar{L} = H_2(\vec{p})$

$$H(x) = H(p) + p \cdot H(x_1) + (1-p) H(x_2) \quad p = \frac{1}{2}$$

$$H_2(x) = \underbrace{H_2\left(\frac{1}{2}\right)}_1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_0 \cdot H(x_1) + \frac{1}{2} H(x_2) =$$

Calculamos la entropía: $H_2(\vec{p}) = \sum_i p_i \log_2 \frac{1}{p_i} =$

$$= \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}} \cdot \log_2 2^{m-1} \right) \cdot 2 =$$

mal porque:

$$= \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{m-1}{2^{m-1}} \cdot 2}_{12.6} \dots \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 + \dots$$

$$\boxed{H_2(\vec{p}) = 12.6 \cdot \frac{1}{2} + \frac{m-1}{2^{m-2}} = 63 + \frac{m-1}{2^{m-2}}}$$

NO LO ACABAMOS. ANULADO EN EL EXAMEN

Examen FT. 2013

Cuestión 1.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p/2 & 1-p & p/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Suponga que X es uniforme. Calcule $H(X, Y)$ y determine el valor de p que la maximiza.

$$P(X=1) = \frac{1}{3}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3}$$

$$H(X, Y) = \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{1}{p_{ij}}$$

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{p}{2} - \frac{1}{3} & (1-p)\frac{1}{3} & \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ p/6 & \frac{1-p}{3} & \frac{p}{6} \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$H(X, Y) = H\left(\underbrace{\frac{1}{3}, \frac{p}{6}, \frac{1-p}{3}}_{Z_1}, \underbrace{\frac{p}{6}, \frac{p}{6}, \frac{1-p}{3}}_{Z_2}\right) \Rightarrow H(X, Y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{p}{6}, \frac{p}{6}, \frac{1-p}{3} \right)$$

Aplicando partición:

$$H(z) = H(p) + p \cdot H(z_1) + (1-p) \cdot H(z_2)$$

$$H(x, y) = \underbrace{H\left(\frac{2}{3}\right)}_{cte} + \underbrace{\frac{2}{3} H_2(z_1)}_1 + \frac{1}{3} \cdot H(z_2) \quad \textcircled{*}$$

constante

$$\begin{aligned} \max(H(x, y)) &= \max \left\{ H_2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} H_2(z_2) \right\} = \\ &= H_2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \max \left\{ H_2(z_2) \right\} \end{aligned}$$

No hay que dar este paso

$$\rightarrow H_2(z_2) = H(p) + p \cdot \underbrace{H(z_2)}_1 + (1-p) \cdot \underbrace{H(z_4)}_0 = H(p) + p$$

Puesto que es difícil

calcular el máximo.

$$p = \frac{2}{3}$$

$$1-p = \frac{1}{3}$$

$$P_{z1} = \left\{ \frac{1/3}{2/3}, \frac{1/3}{2/3} \right\}$$

$$P_{z2} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$P_{z2} = \left\{ \frac{p/6}{1/3}, \frac{p/6}{1/3}, \frac{(1-p)/3}{1/3} \right\}$$

$$P_{z2} = \left\{ \underbrace{\frac{p}{2}, \frac{p}{2}}_{z_3}, \underbrace{1-p}_{z_4} \right\}$$

De aquí por razonamiento sacamos el máximo.

Porque: $\frac{p}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{2}{3}$

$$(1-p) = \frac{1}{3}$$

son equiprobables

$$P_{z2} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}$$

$H_2(z)$ es máximo si sus

valores son equiprobables. Esto se cumple para: $\boxed{p = \frac{2}{3}}$

$$\textcircled{*} = H_2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \log_2 3 \text{ bits}$$

b) Suponga que $p=1$ y que los símbolos de x que se transmiten fielmente son equiprobables. Calcule el máximo de $I(x; y)$ y determine para qué distribución de x se alcanza.

Se hará más adelante.

Cuestión 1 (2 pts) Considere el canal discreto sin memoria con matriz de probabilidades de transición

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p/2 & 1-p & p/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X e Y designan, respectivamente, la entrada y la salida de este canal.

- Suponga que X es uniforme. Calcule $H(X, Y)$ y determine el valor de p que la maximiza
- Suponga que $p = 1$ y que los símbolos de X que se transmiten fielmente son equiprobables. Calcule el máximo de $I(X; Y)$ y determine para qué distribución de X se alcanza.

Cuestión 2 (1 pto). Se quiere transmitir los símbolos de una fuente cuaternaria por un canal binario ideal. Para ello, se codifican primero con un codificador binario de eficiencia 0,9 y, a continuación salida de éste se codifica con un código binario ideal de longitud L. ¿Cuánto vale L?

Cuestión 3 (1 pto) Considere infinitas fuentes independientes de igual entropía $H(X)$ y $v_i = 2^{-i}$, para $i = 0, 1, 2, \dots$. Si queremos transmitir sobre un canal de tasa unitaria y $C = H(X)$ mensajes del mayor número posible de fuentes, ¿cuál es la mayor de las tasas de transmisión fuentes que transmiten sobre el canal?

Cuestión 4 (1 pto). Determine la eficiencia de un código compacto cuaternario con una fuente de 9 símbolos de vector de probabilidad $p = (0, 15, 0, 15, 0, 15, 0, 15, 0, 1, 0,075, 0,075, 0,075, 0,075)$. Dejarla expresada como función de la entropía de la fuente.

Cuestión 5 (1, 5 pts). Sean H_r y H_s los códigos Hamming binarios de r y s bits de redundancia respectivamente, y sean H_r y H_s sus matrices de comprobación de paridad. Recuerde que los Hamming tienen distancia 3 y corrigen únicamente los errores simples.

- Obtenga la distancia del código que tiene por matriz de comprobación de paridad

$$\begin{pmatrix} H_r & 0 \\ 0 & H_s \end{pmatrix}$$

- Obtenga también su distribución de pesos de errores corregibles.

Cuestión 6 (1, 5 pts) Para el código [1023, 1012] generado por $g(s) = (x-1)(x^{10} + x^3 + 1)$

- Codifique sistemáticamente el mensaje x.
- Decodifique el polinomio $x^{12} + x^{10} + x^5 + x^3 + x^2$. El factor $x^{10} + x^3 + 1$ es primitiva

Cuestión 7 (1 pto) Calcule el número medio de transmisiones de una trama en un enlace donde se emplea la estrategia de envío continuo con rechazo selectivo con el tamaño óptimo de tramas. Compruebe que es igual a $a\sqrt{C/\max_n C_e}$, donde C denota la capacidad nominal.

Cuestión 8 (1 pto). ¿Es cierto que si a una red CSMA/CD se añaden nuevas estaciones el rendimiento empeora?. Apoye o refute esta idea.

$$n_{\text{Et}} = \frac{1}{1-P}$$

$$P = P_B(1+n)$$

$$n = n_{\text{opt}}$$

$$C_e = n$$

$$n_{\text{opt}} = \frac{1}{1-P}$$

$$n_{\text{opt}} = n - \sqrt{\frac{n}{P_B}}$$

lo que significa que $r(x)$ sería una palabra del código —todos los múltiplos de $g(x)$ lo son— con grado menor que $g(x)$, lo que es imposible a menos que $r(x) = 0$.

4. El polinomio

$$g(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)$$

genera un código cíclico binario $[15, 8]$ y todos sus factores son primitivos.

- a) Use las propiedades que conozca para determinar la distancia del código (0.75 puntos)
 - b) Decodifique el vector recibido $x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^{10} + x^7$. (0.75 puntos)
- a) El polinomio generador tiene peso par ($g(1) = 0$), así que la distancia es par. Como $x^4 + x^3 + 1$ es primitivo, los errores dobles de distancia menor que 15, que son todos, son detectables; y como $g(x)$ tiene peso 4, la distancia es 4.
 - b) $x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^{10} + x^7 = x^7 g(x) + x^{10}$. Puesto que los errores simples son corregibles con este código, el decodificador estima la palabra $x^7 g(x)$.

(parcial 2013)

5. Considere un enlace con las siguientes características: $C = 1$ Mb/s, $T_{as} = 100$ ms y $\kappa = 5 \cdot 10^{-6}$ (κ es la probabilidad de error por bit). Suponga que se usa un protocolo ARQ de envío continuo y rechazo selectivo con $m = 100$.

- a) ¿Cuánto vale el tamaño óptimo de trama? (0.5 puntos)
 - b) ¿Para qué rango de valores de longitud de trama no supera la cadencia eficaz los 500 kb/s? (1 punto)
- a) La expresión para la cadencia eficaz (normalizada) en la estrategia de rechazo selectivo es

$$\frac{C_e}{C} = (1 - \kappa(n + m)) \frac{n}{n + m} = \frac{n}{n + m} - \kappa n.$$

Si se supone continua la variable n , el tamaño óptimo de trama es la solución de la condición de primer orden

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{C_e}{C} \right) = \frac{m}{(n + m)^2} - \kappa = 0,$$

es decir $n^* = -m + \sqrt{m/\kappa}$. Para los datos del enunciado

$$n^* = -100 + \sqrt{\frac{100}{5 \cdot 10^{-6}}} = \frac{10^4}{\sqrt{5}} - 100 \approx \frac{10^4}{\sqrt{5}}.$$

- b) Los puntos de corte son la solución de la ecuación cuadrática

$$(1 - \kappa(n + m)) \frac{n}{n + m} = \frac{1}{2},$$

o bien

$$\kappa n^2 - n \left(\frac{1}{2} - \kappa m \right) + \frac{m}{2} = 0$$

cuyas raíces son

$$n^* = \frac{(1/2 - \kappa m) \pm \sqrt{(1/2 - \kappa m)^2 - 2m\kappa}}{2\kappa} \approx \frac{(1/2 - \kappa m) \pm (1/2 - 3\kappa m)}{2\kappa}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\kappa} - 2m \approx 10^5 \text{ bits} \\ m = 100 \text{ bits.} \end{cases}$$

La cota de 500 kb/s no se supera si $n < 100$ bits o si $n > 10^5$ bits.

EXAMEN FT. ENERO 2012.

1. Considera un canal de matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sean X e Y las variables de entrada y salida del canal y sea

$\bar{P} = \{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \}$ el vector de probabilidades de la variable aleatoria Y.

¿Cuanto ha de valer p para que la información mutua sea de 7/4 bits?

2. Dado un canal binario ideal de régimen de transmisión V_c bps y cuatro fuentes binarias de entropías (en bits): 1, 0.5, 0.25, 0.125. ¿Cuál es el máximo régimen de transmisión de las fuentes para transmisión fiable si han de compartir el canal a partes iguales?

3. Dada una fuente que genera n símbolos de forma equiprobable cuyos mensajes se precodifican con un código compacto binario de eficiencia 0.9. Si se quieren transmitir esos mensajes de manera fiable y eficiente a través de un canal binario de capacidad C bits y régimen de transmisión V_c . ¿Cuántos símbolos de canal serán necesarios por cada símbolo del mensaje precodificado?

4. Considere una fuente que genera 128 símbolos con probabilidades, que ordenadas de forma decreciente, verifican que: las dos últimas son iguales y cada una de las demás es el doble de la anterior. Si se codifican los símbolos uno a uno, ¿cuál es la longitud de un código compacto binario? ¿Cuántos códigos distintos hay para esta fuente?

5. Dada una fuente cuaternaria sin memoria que emite símbolos de 2 bits con probabilidades $p(A)=0.3$, $p(B)=0.25$, $p(C)=0.25$, $p(D)=0.2$. Si se utiliza codificación aritmética ¿Cuál es la secuencia de símbolos de esta fuente más larga que se puede representar con n bits?

6. Dado un código cíclico binario de longitud 63 y dimensión 56 engendrado por $g(x) = x^7 + x^6 + x^2 + 1$, siendo $x^6 + x + 1$ un polinomio primitivo, caracterice las propiedades de detección y corrección de errores de este código. ¿Cuál es el menor código cíclico que contiene a $x^6 + x + 1$?

7. Supóngase un vector corregible con un cierto código lineal en el que las posiciones erróneas son las r primeras: $e=(e_1 \dots e_r 0 \dots 0)$. Considérese otro patrón de errores, e' , cuyas posiciones erróneas son un conjunto de las del vector anterior $e'=(e_1 \dots e_{r-1} 0 \dots 0)$. Demostrar que si e es corregible e' también lo es. Demuestre por contradicción.

8. Una familia de códigos lineales queda definida por la matriz de comprobación de paridad con la siguiente estructura:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}, \text{ Siendo } V_{m-1} \text{ una matriz por bloques cuyas columnas son todos los vectores binarios de longitud } m-1. \text{ Calcula longitud, dimensión y distancia.}$$

9. Imagine un enlace de datos punto a punto con un emisor que supiera al instante si las tramas que transmite han llegado bien. Sea p la probabilidad de error en la transmisión de una trama cualquiera. ¿Cuál es la cadencia eficaz del enlace?

10. Explique de forma clara y precisa en que condiciones la eficiencia de una red CSMA/CD resulta ser mejor que la de Aloha.

Anulado

No entra

cod. extendida

Anulado



Cuestión 6. Para el código $[1023, 1012]$ generado por $g(x) = (x-1)(x^{10}+x^3+1)$

a) Codifique sistemáticamente el mensaje x .

$$X(x) = x^{n-k} \cdot u(x) + r(x)$$

$$u(x) = x$$

$$u(x) = \text{información}$$

$$n-k = \text{grado}(g(x)) = 11$$

$$r(x) = x^{n-k} \cdot u(x) \cdot \text{mod } g(x)$$

$$X(x) = x^{11} \cdot u(x) + r(x)$$

$$r(x) = x^{11} \cdot \text{mod } g(x) = x^{12} \cdot \text{mod } g(x)$$

$$\begin{array}{r} \cancel{x^{12}} \\ \cancel{x^{11} + x^5 + x^4 + x + 1} \\ \hline x^{10} + x^3 + x \end{array} \quad \begin{array}{r} x^{11} + x^{10} + x^4 + x^3 + x + 1 \\ \hline x + 1 \end{array}$$

$$r(x) = x^{10} + x^5 + x^3 + x^2 + 1$$

$$X(x) = x^{12} + x^{10} + x^5 + x^3 + x^2 + 1$$

b) Decodifique el polinomio $x^{12} + x^{10} + x^5 + x^3 + x^2$. El factor $x^{10} + x^3 + 1$ es primitiva.

No es del código puesto que si lo desplazas el polinomio es de grado 10, menor que el grado del polinomio (grado 11) y no puede ser del código siendo menor de 11.

$$\begin{array}{r} \cancel{x^{12} + x^{10} + x^5 + x^3 + x^2} \\ \cancel{x^{11} + x^4 + x} \\ \hline +1 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^{11} + x^{10} + x^4 + x^3 + x + 1 \\ \hline x + 1 \end{array}$$

• Calcular el $g(x)$.

$$g(x) = \gamma(x) \text{ mod } g(x) = 1$$

• $\gamma(x) \notin C \Rightarrow \exists e(x)$ este detecta los simple pero no los corrige.

$$\text{est}(x) = g(x)$$

$$P_H(e) \leq \left\lceil \frac{dc-1}{2} \right\rceil \geq 1$$

Hay que comprobar si corrige los errores simples. Los corregirá si $\frac{dc-1}{2} \geq 1$.

Necesitamos calcular la dc .

Calculamos de:

- $dc \geq 2$
- $S(x)$ tiene P_H par $\Rightarrow$ todas las palabras código son P_H par $\Rightarrow$ de es par
- $S(x)$ tiene un $p(x)$ como factor: $\left. \begin{array}{l} n \leq 2^r - 1 \\ 1023 \leq 2^{10} - 1 = 1023 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Detecta} \\ \text{dobles} \end{array}$

entonces $dc \geq 4$ $\Rightarrow$ Esto garantiza que corrige todos los errores simples.

$$\text{est}(x) = 1$$

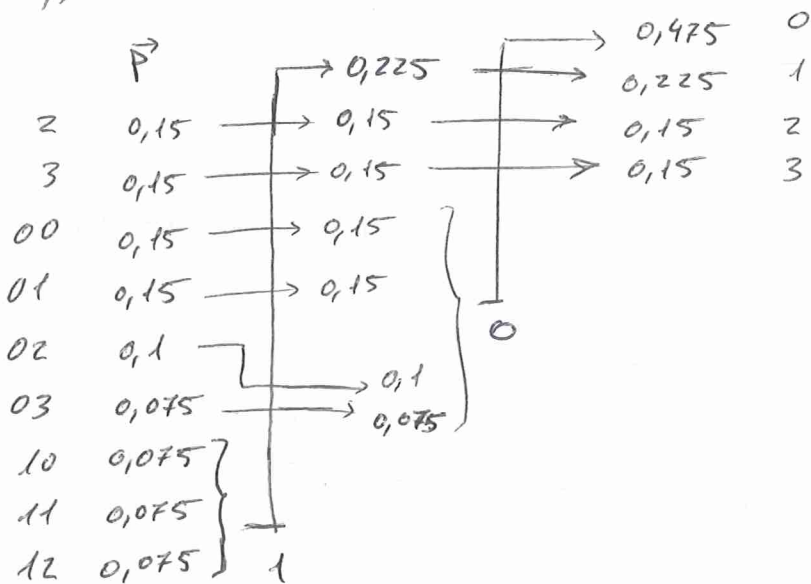
$$x(\text{est}) = y(x) + 1$$

Cuestión 4. ¿? código cuaternario.

$$\boxed{\tau = \frac{\mu_y(\vec{p})}{L} = \frac{\mu_y(\vec{p})}{1,7}}$$

si $\log_4 \frac{1}{p_i} \equiv \text{entero } \forall i \Rightarrow \overline{L} = H_4(p^3) \rightarrow \log_4 \frac{1}{0,15} \equiv \text{no es entero.}$

Huffman:



$$s' = 2 + (n-2) \bmod (s-1)$$

$$s = 4$$

$$n = 9$$

$$= 2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{resto}}}{7} \bmod 3 = 2 + 1 = 3$$

$$\bar{L} = \sum_i l_i \cdot p_i = \underbrace{(1 \cdot 0,15)}_{0,3} \cdot 2 + \underbrace{(2 \cdot 0,15)}_{0,6} \cdot 2 + \underbrace{2 \cdot 0,1}_{0,2} + \underbrace{(2 \cdot 0,075)}_{0,6}$$

$$\boxed{\bar{L} = 1,7}$$

Lunes 1, diciembre 2014.

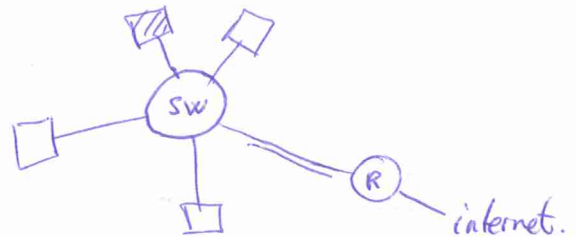
↓

ETHERNET

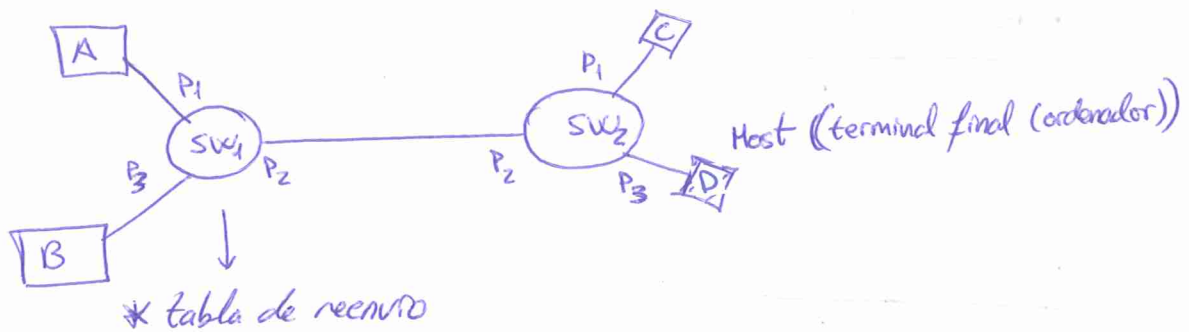
1. LANs CONMUTADAS
2. VLANs
3. STP Protocol.

1. LANs CONMUTADAS

LAN: Red de Área Local.



- Aprendizaje hacia atrás (Paso de información de un ordenador A a B)



A → D

Si el destino no está en la tabla de reenvío hace flooding (enviar por todas las líneas de salida posibles).

Al hacer esto "descubre" el host A y lo guarda. Este es alcanzable por P₁.

* tabla de reenvío

Destino	Puerto
A	P ₁
C	P ₂
B	P ₃

Destino	Puerto (salida)
A	P ₂
C	P ₁

SW₂ hace flooding del paquete recibido SW₁ descubre que A es alcanzable por P₂.

• C → A:

SW₂ no hace flooding. Conoce el destino A y "descubre" donde está

C.
SW₁ "descubre" donde está C.

• C → B:

SW₂ flooding

SW₁ flooding

• B → A:

SW₁ reenvío (ya sabe donde está A).

SW₁ descubre a B.

• C → D:

SW₂ flooding

SW₁ flooding

Ahora se inicializa la tabla del SW₂.

• D → C

SW₂ flooding

SW₁ descarta el paquete recibido (porque llega por el camino que lo reenvía)

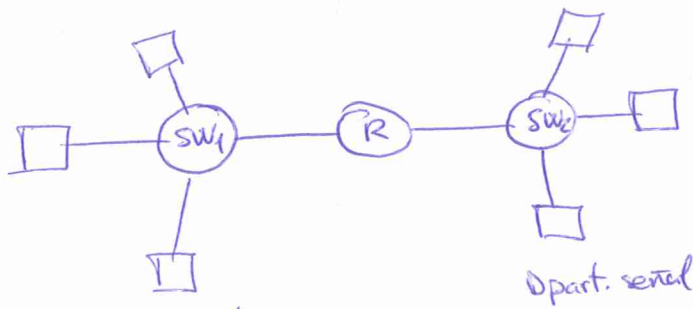
A esta acción se le llama filtrado.

Flooding: Destino desconocido.

Reenvío: Destino conocido.

Filtrado: Si se recibe un paquete por el puerto usado para hacer reenvío.

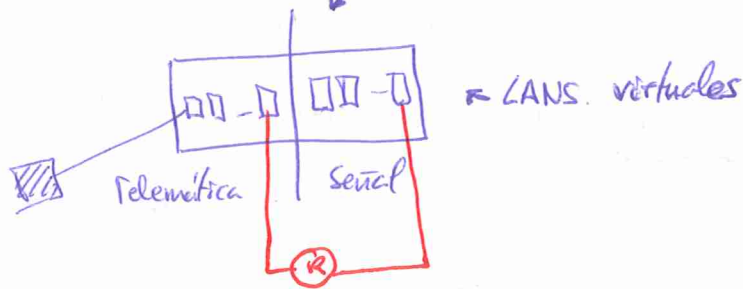
2. VLANs (Virtual LAN)



Dept. Telemática

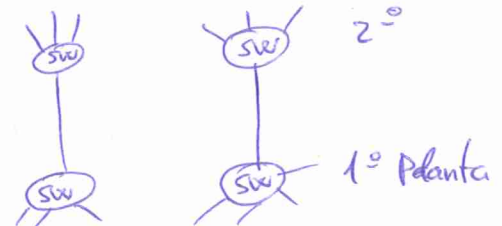
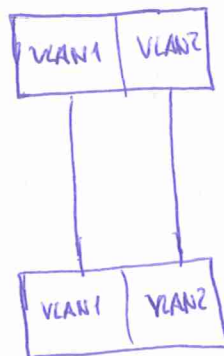
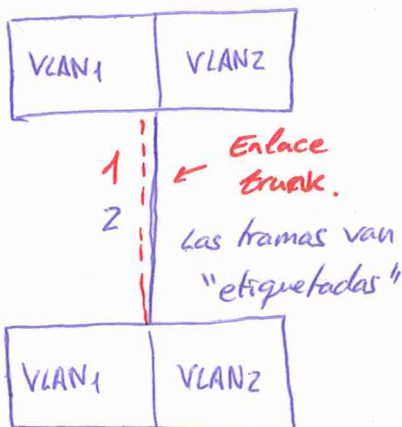
Dept. señal

Separados por switch (programable por software)



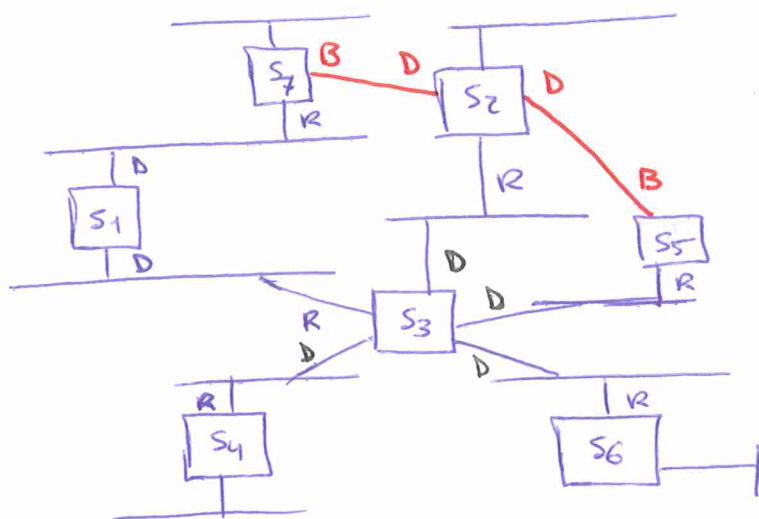
VLAN TRUNKING

Si se utiliza trunking



*NOTA: Mediante trunking nunca se pueden comunicar distintas VLANs.

3. STP.



El encaminamiento entre sws tiene que ser único. STP no busca el camino óptimo (de menor costo), busca un camino único.

Algoritmo STP. (Spanning Tree Protocol)

1. Buscamos el sw raíz. Es el sw de menor ID. (sw1)
2. Todos los puertos del sw raíz son designados (D) (pueden utilizarse para transmitir datos)
3. En el resto de sw se busca el puerto raíz. (El de camino más corto hacia el sw raíz)
4. Un puerto de un switch conectado con un puerto raíz de otro es designado
5. Un puerto de un sw conectado con otro que no es raíz será bloqueado si pertenece al sw de mayor ID. Si no será designado.

Examen de Fundamentos de Telemática

23 de mayo de 2014

Nombre: _____ D.N.I.: _____

Cuestión 1 (2 puntos). Sea la matriz de probabilidad conjunta de las variables aleatorias de entrada (X) y salida (Y) de un canal

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/12 \end{bmatrix}.$$

- Determine $I(X; Y)$.
- Determine la capacidad del canal.

Las fmp marginales de X e Y son $(2/3, 1/3)$ y $(1/2, 1/4, 1/4)$, respectivamente. Por lo tanto

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = H(1/3) + H(1/2, 1/4, 1/4) - H(1/2, 1/4, 1/6, 1/12) = 3/4 H(1/3).$$

La matriz de probabilidades conjuntas se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

de manera que el canal es un canal binario con borrado $1/4$. Su capacidad es $3/4$ bits/símbolo.

Cuestión 2 (1 punto). Los mensajes de una fuente con un alfabeto de 48 símbolos equiprobables se quieren transmitir fielmente a través de un canal binario simétrico con probabilidad de error $p = 0,2$. ¿Cuáles son las longitudes de los códigos ideales de fuente y de canal?

$$L_f = H_2(X) = \log_2 48 = 3 \log_2 3. \quad L_c = 1/C = 1/(1 - H_2(0,2)).$$

Cuestión 3 (1 punto). Suponga una fuente binaria sin memoria de entropía máxima. Suponga que se considera la utilización simultánea de dos canales para la transmisión de los mensajes de la fuente en el menor tiempo posible. Sea uno un canal binario de capacidad 0,6 bits, y el otro un canal ternario de capacidad 0,9 unidades de información ternarias. Si el primero de los canales tiene un régimen de transmisión de 1000 símbolos por segundo y el segundo de 500 símbolos por segundo, ¿cuál es el tiempo mínimo necesario para transmitir de manera fiable un mensaje de la fuente de longitud n arbitrariamente grande?

$$T = \frac{nH(X)}{v_1 C_1 + v_2 C_2} = \frac{n}{1000 \cdot 0,6 + 500 \cdot \log_2 0,9} \text{ segundos.}$$

Cuestión 4 (1 punto). El conjunto $\{0, 10, 110, 111\}$ es un código binario compacto para la fuente con probabilidades $\{1/2, 3/8, 1/16, 1/16\}$, con una eficiencia del 94,2 %. El codificador de fuente puede entenderse como una fuente binaria sin memoria. ¿Cuál es la probabilidad de que emita un 0? Tiene dos maneras de calcularlo.

De acuerdo con la teoría, la salida del codificador de fuente tiene entropía $H_2(Y) = H(p) = \eta$, siendo η la eficiencia del código. Así pues, $p = H^{-1}(\eta)$ de donde $p \approx 0,64$ (resuelva esta ecuación por ensayo y error). Observe que, en el código propuesto, la proporción de ceros es mayor que la de unos, en concreto 15/26 frente a 11/26. Sin embargo, $H_2(15/26) \neq \eta$. ¿Puede explicarlo?

Cuestión 5 (1,5 puntos). El subcódigo par $\mathcal{H}_{r,e}$ de un código Hamming binario $\mathcal{H}_r$ es la colección de palabras de $\mathcal{H}_r$ que tienen peso par.

- Los parámetros de $\mathcal{H}_{r,e}$ son $[2^r - 1, 2^r - r - 2, 4]$. Explique estos números.
- Este código corrige únicamente errores simples y dobles. ¿Cuántos de cada tipo?

- a) Los parámetros de $\mathcal{H}_r$ son $[2^r - 1, 2^r - r - 1, 4]$. $\mathcal{H}_{r,c}$ tiene la misma longitud y dimensión una unidad mayor (consta de la mitad de las palabras de $\mathcal{H}_r$). Tiene distancia 4 porque $\mathcal{H}_r$ contiene palabra de peso 4, pero no de peso 2.
- b) Corrige todos los errores simples. $2^r - 1$. El resto de los $2^{r+1} - 1$ errores corregibles son dobles, es decir, 2^r .

Cuestión 6 (1,5 puntos). Para el código $[63, 57]$ generado por $g(x) = (x - 1)(x^5 + x^2 + 1)$,

- a) Codifique sistemáticamente el mensaje x .
- b) Ante el polinomio $x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + 1$ el decodificador estima la palabra del código $(x^2 + x + 1)g(x)$. ¿Es correcto? El código tiene distancia 4.

- a) La codificación sistemática es

$$x^7 - x^7 \text{ mód } g(x) = x^7 + x^5 + x^4 + 1.$$

- b) Sí. $(x^2 + x + 1)g(x) = x^8 + x^3 + x^2 + 1$ que sólo dista en un término (x^7) del vector recibido.

Cuestión 7 (1 punto). Calcule la expresión de la cadencia eficaz para una estrategia convencional de parada y espera si en el canal de retorno los asentimientos se pierden con probabilidad q .

El sistema es estocásticamente idéntico a uno en donde no hay errores ni pérdidas en el canal de retorno y las tramas de datos se se transmiten correctamente con probabilidad

$$1 - p'_t = (1 - p_t)(1 - q)$$

donde p_t es la probabilidad de error o pérdida de una trama de datos en el sistema original. En estas condiciones, la cadencia eficaz es

$$C_{ef} = (1 - p_t)(1 - q) \frac{n}{n + m + T_{as}C} C$$

con la notación habitual.

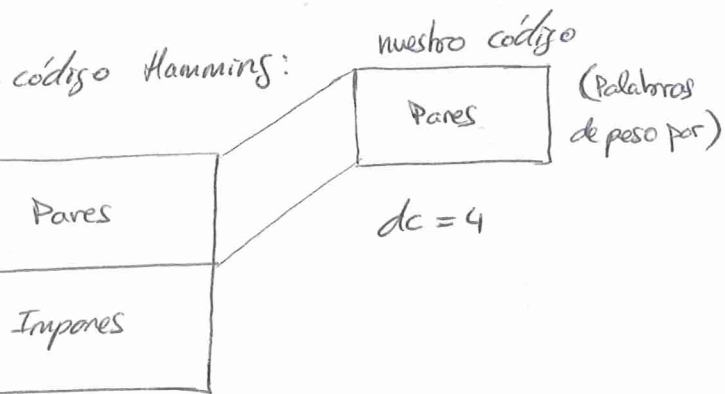
Cuestión 8 (1 punto). ¿Por qué existe un tamaño mínimo para la longitud de las tramas en Ethernet?

Los emisores sólo escuchan el canal mientras dura la transmisión. Si las tramas son muy cortas, podrían dejar de escuchar antes de que la señal de colisión les llegue.

Examen 23 de mayo de 2014

Cuestión 5

Hr, e



a)

La distancia código era 3 pero al coger las palabras código pares $dc \geq 4$ y por tanto en nuestro código es $dc = 4$. Por ejemplo:

$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$

b)

$$P_H(\vec{e}) \leq \left\lceil \frac{dc-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{4-1}{2} \right\rceil = 1$$

Por ser la $dc = 4 \Rightarrow$ los errores simples son todos corregibles.

$$\boxed{\text{simples} = n = 2^r - 1}$$

$$n = 2^r - 1$$

$$k = 2^r - r - 2$$

$$n - k = 2^r - 1 - 2^r + r + 2 = r + 1$$

dobles: $2^{n-k} - n - 1 = 2^{r+1} - 2^r + 1 - 1$

$$= 2^{r+1} - 2^6 = 2^r \cdot 2 - 2^r =$$

$$= 2^r(2-1) = 2^r$$

Tabla de síndromes:

s	$P_H(\vec{e})$	$n=0$
s ^{n-k} {	0	1
	1	n
	2	$2^{n-k} - n - 1$

Cuestión 6.

C(63, 57)

$$g(x) = (x-1)(x^5+x^2+1)$$

a) $u(x) = x$

$$n-k = 6 \text{ (grado } g(x))$$

$$X(x) = x^6 \cdot x + r(x) \quad \textcircled{1}$$

$r(x) \rightarrow$ polinomio redundancia.

$$\textcircled{2} \quad x^7 + x^5 + x^4 + 1$$

$$X(x) = x^{n-k} \cdot u(x) + r(x)$$

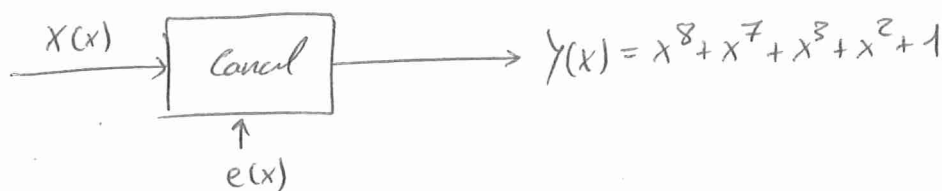
$$r(x) = x^{n-k} \cdot u(x) \bmod g(x)$$

$$\begin{array}{r} x^7 \\ x^7 + x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ \hline -x^6 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \\ \hline +x^5 - x^4 + 1 \end{array}$$

$$r(x) = x^5 + x^4 + 1$$

(da igual positivo o negativo)

b) $x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + 1$ pc: $(x^2 + x + 1)g(x)$ ¿Es correcto?



$$Y_{est}(x) = (x^2 + x + 1) \cdot g(x)$$

$$s(x) = Y(x) \bmod g(x)$$

$$\begin{array}{r} x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + 1 \\ x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 \\ \hline -x^5 - x^4 + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ x^2 \\ \hline s(x) = x^5 + x^4 + 1 \end{array}$$

El síndrome no es un error corregible por lo tanto el error estimado no es el síndrome. Tenemos que buscar la palabra código obtenida como sumas de versiones desplazadas de $g(x)$ lo más cercanas posibles a $Y(x)$.

$$110001101: Y(x)$$

$$1101111: g(x)$$

$$\begin{array}{r}
 1101111 : g(x) \\
 1101111 : x \cdot g(x) \\
 \hline
 10110001 \\
 1101111 : x^2 g(x) \\
 \hline
 1 \boxed{0} 0001101 = (1+x+x^2) \cdot g(x) \\
 \quad \quad \quad x^7
 \end{array}$$

$$(1+x+x^2)g(x) = y(x) + x^7$$

utilizando versiones desplazadas de $g(x)$ pretendamos que la p.c solo se diferencie en un bit. Ese será el error. (Busco la que más se parece a la recibida)

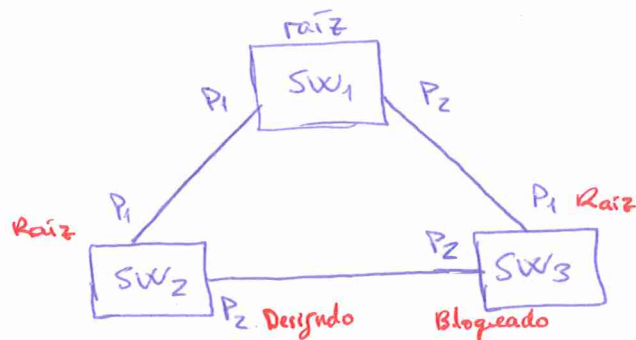
$$dc = 4 \Rightarrow P_H(e) \leq \left[\frac{dc-1}{2} \right] = 1$$

$est(x) = x^7$. Si que es corregible.
Está bien. Puesto que el error estimado es uno simple y los simples los corrige todos.

STP

En el esquema de la figura:

Razona el estado de los puertos una vez ejecutado STP.



- 1) SW raíz (menor ID)
- 2) Puertos del SW raíz son designados
- 3) Elegir en los otros SW el puerto raíz.
- 4) Para el resto de puertos estarán bloqueados en el SW de mayor ID.

El STP busca el camino único, no el más corto

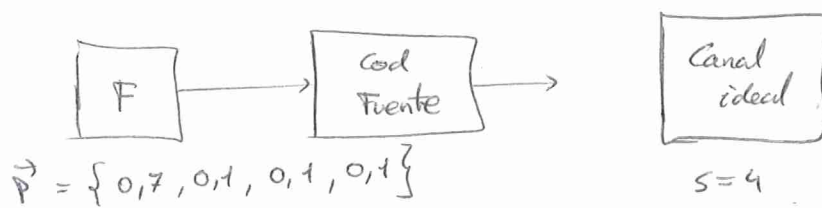
Cuestión 1

código óptimo si $\log_s \frac{1}{P_i} = \text{entero}$

a) se compactan los símbolos fuente con un codificador fuente, la codificación por defecto será compacta. Si la eficiencia = 1 será óptimo. Siempre que se cumpla $\log_s \frac{1}{P_i} = \text{entero}$ el código será óptimo.

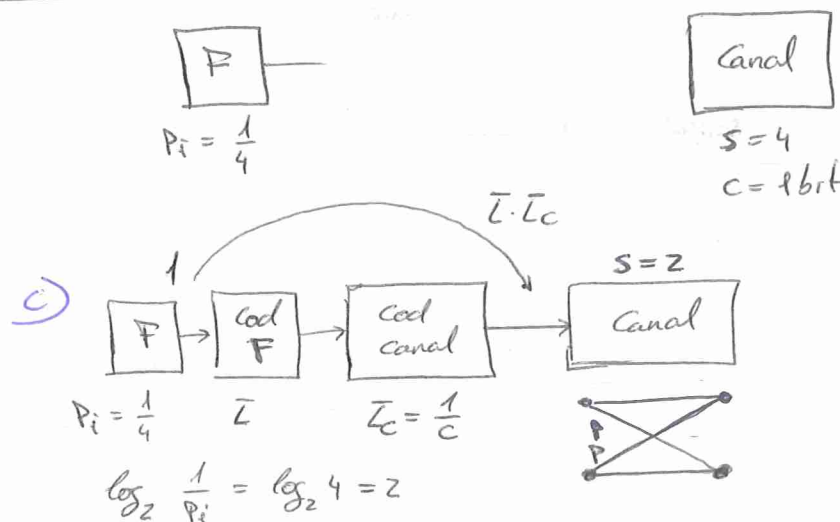
b) Hay que meter un codificador de canal porque el canal no es fiable introduce errores.

NOTA: si hay que compactar y se puede compactar hay que meter un codificador de fuente.



Si el canal es ideal no hace falta codificador de canal.

OTRO CASO:



Este canal no es ideal

$$\bar{L} = H_2(\vec{P}) = \log_2 4 = 2 \text{ bits}$$

$$C = \log_s s - H(\text{fila de } Q) = \log_2 2 - H(P) = 1 - H\left(\frac{1}{4}\right) = 0,19 \text{ bits}$$

Porción de símbolos de canal que son de información.

d)

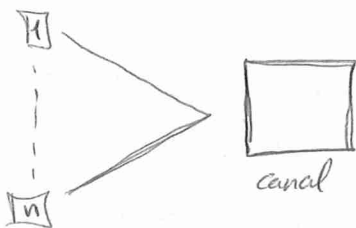
$$\bar{L} \cdot \bar{L}_c = \bar{L} \cdot \frac{1}{C}$$

↓

$$\frac{\text{simb. de inf.}}{\text{simb. fuente}} \times \frac{\text{simbolos de canal}}{\text{simb. de inf.}}$$

Cuestión 2.

a) Considero los codificadores de fuente y canal ideales para obtener el número máximo de fuentes.



Tasa de entrada de inf. $\leq$ tasa de tx de inf.

$$N \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bits}}}{V_f} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bits}}}{H(x)} \leq C_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bits}}}{V_{c1}} + C_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bits}}}{V_{c2}} + \dots$$

$$\sum_{i=1}^n V_{fi} \cdot H(x_i) \leq C_1 \cdot V_{c1} + C_2 \cdot V_{c2}$$

→ Cuando tenemos varias fuentes y varios canales el th. de Shannon se convierte en esto.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \cdot i \leq C_1 \cdot V_{c1} + C_2 \cdot V_{c2}$$

$$n \leq 0,5 \cdot 100 + 1,5 \cdot 50$$

$$\boxed{n \leq 125}$$

$$C_2 = \frac{3}{4} C_{ideal} = \frac{3}{4} \text{ u. cuaternarias} =$$

$$= \frac{3/4}{\log_4 2} = 1,5 \text{ bits}$$

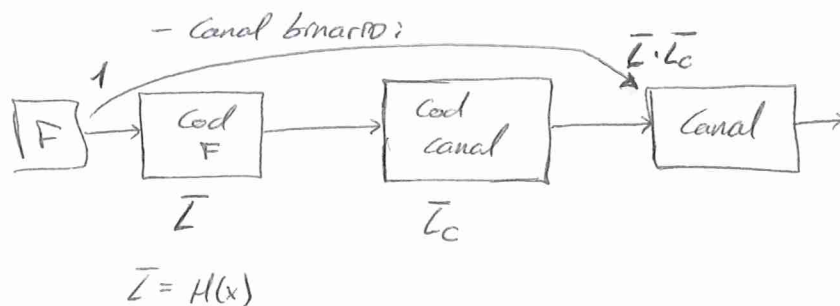
↓

Este dato no me dice nada

De cada 4 bits del canal 3 son de información

b)

Coste de transmisión:



$$\text{coste}_b = k \cdot \frac{H_2(x)}{c} = k \cdot \frac{H_2(x)}{0,5} = 2 \cdot k \cdot H_2(x)$$

↓
canal binario

Por tanto la opción más barata es
el canal cuaternario

- Canal cuaternario:

$$\text{coste}_c = 2k \cdot \frac{H_2(x)}{c_2} = 2k \cdot \frac{H_2(x)}{1,5}$$

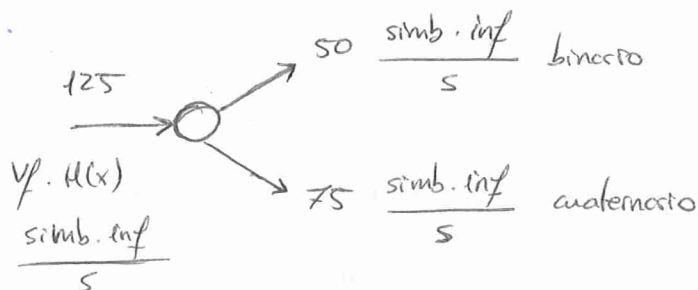
$$2k H_2(x) > 2k \frac{H_2(x)}{1,5}$$

c) si se usan los dos canales simultaneamente calcula el coste medio de transmisión de cada símbolo fuente.

$$C_1 = 0,5 \quad C_2 = 1,5$$

$$V_1 = 100 \quad V_2 = 50$$

$$C_1 \cdot V_1 = 50 \frac{\text{simb. inf}}{s}$$



coste de transmisión:

el coste medio: $\text{coste}_b \cdot P_b + \text{coste}_c \cdot P_c$

$$P_b = \frac{50}{125}$$

$$P_c = \frac{75}{125}$$

parámetros de canal

- Capacidad
- velocidad de canal

Examen de Comunicación de Datos

7 de noviembre de 2014

Nombre: _____ DNI: _____

Cuestión 1. (2 puntos). Los mensajes de una fuente cuaternaria uniforme se transmiten a través de un canal binario simétrico con probabilidad de error $p = 1/4$. Si se desea una transmisión fiable y eficiente, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

- ¿Se pueden comprimir los mensajes de la fuente?
 - ¿Es necesario un codificador de fuente? ¿Y un codificador de canal?
 - ¿Qué fracción de los símbolos transmitidos por el canal son redundantes?
 - ¿Cuántos bits serán necesarios, en media, para transmitir un símbolo de la fuente?
- No. La fuente es uniforme.
 - A pesar de que la fuente es incompresible, es necesario un codificador de fuente para representar sus mensajes utilizando los símbolos del alfabeto de canal. También es necesario un codificador de canal para garantizar la fiabilidad puesto que el canal no es ideal e introduce errores.
 - $1 - C = 1 - (\log_2(2) - H_2(1/4)) = 1 - 0,19 = 0,81$.
 - $v_c/v_f \geq H(X)/C = \log_2(4)/0,19 = 10,5$ bits/símbolo.

Cuestión 2. (2 puntos). Se tienen n fuentes discretas independientes X_i , $i = 1, \dots, n$, con entropía $H(X_i) = i$ bits y regímenes de emisión $v_i = 1/i$ símbolos por unidad de tiempo. Sus símbolos se deben transmitir de forma fiable y eficiente usando simultáneamente dos canales. Uno de ellos es un canal binario de capacidad 0,5 bits y régimen de transmisión 100 símbolos por unidad de tiempo. El otro es un canal cuaternario de capacidad $3/4$ la del ideal y régimen de transmisión 50 símbolos por unidad de tiempo.

- ¿Cuántas fuentes podrían multiplexarse como máximo?
- Suponiendo que la transmisión de un símbolo por el canal cuaternario cuesta el doble que por el canal binario. ¿cuál de las siguientes opciones de transmisión nos resultaría más rentable económicamente si nos es indiferente el tiempo de transmisión: usar exclusivamente el canal binario, usar exclusivamente el canal cuaternario o usar simultáneamente ambos canales?

- $\sum_{i=1}^n v_i H(X_i) = \sum_{i=1}^n i \cdot 1/i = n \leq v_{c1}C_1 + v_{c2}C_2 = 100 \cdot 1/2 + 50 \cdot 3/4 \cdot \log_2(4) = 125$.
- Coste de enviar un símbolo de fuente por el canal binario: $k \cdot H(X)/C_1 = 2kH_2(X)$.
Coste de enviar un símbolo de fuente por el canal cuaternario: $2k \cdot H(X)/C_2 = 4/3kH_2(X)$.
Si se usan ambos canales, el coste medio será un valor comprendido entre los dos anteriores. Por tanto, la opción más económica es la de usar exclusivamente el canal cuaternario.

Cuestión 3. (2 puntos). Se denomina código t -perfecto aquél capaz de corregir errores de peso Hamming $p_H(\vec{e}) \leq t$ y únicamente estos. Asumimos que tenemos un código $C(23, k)$ 3-perfecto.

- ¿Cuál será el valor de la redundancia?
- ¿Cuál es la probabilidad de recibir un mensaje con errores si se transmite sobre un canal binario simétrico cuya probabilidad de error de bit es de 10^{-4} ? ¿Cuál es la probabilidad de no poder corregir el mensaje (es suficiente obtener un valor numérico aproximado)?

- a) 11 bits de redundancia.
- b) $\Pr[\text{Recibir un mensaje con errores}] = 2,3 \cdot 10^{-3}$.
 $\Pr[\text{No poder corregir un error}] \approx 8,84 \cdot 10^{-13}$.

Cuestión 4. (0,5 puntos). Dado un código Hamming H_4 , especifique su matriz de comprobación de paridad H . ¿Cuántos errores de peso Hamming 2 son corregibles? Justifique la respuesta.

La matriz estará formada por 15 columnas de vectores de dimensión 4 (todos los posibles menos el vector 0 en cualquier orden). No corrige ningún error de peso 2.

Cuestión 5. (1,5 puntos). Considere el código lineal binario $\mathcal{C}$ con matriz de comprobación de paridad

$$H = \begin{bmatrix} H_4 & 0 \\ 0 & H_4 \end{bmatrix}$$

en donde H_4 es la matriz de comprobación de paridad del código Hamming binario $[15, 11]$.

- a) Indique la longitud, la dimensión y la distancia de $\mathcal{C}$.
- b) Demuestre que $\mathcal{C}$ sólo puede corregir errores simples y dobles. ¿Cuántos dobles?
- c) La distribución de pesos del código Hamming es $A_0 = A_{15} = 1$, $A_3 = A_{12} = 35$, $A_4 = A_{11} = 105$, $A_5 = A_{10} = 168$, $A_6 = A_9 = 280$, $A_7 = A_8 = 435$. La distribución de pesos de $\mathcal{C}$ viene dada por la fórmula $B_i = \sum_{j=0}^i A_j A_{i-j}$. Calcule el número de palabras de peso mínimo de $\mathcal{C}$.
- a) $\mathcal{C}(30, 22, 3)$.
- b) 225 errores dobles.
- c) $B_3 = 70$.

Cuestión 6. (1 punto). La factorización en polinomios irreducibles de $x^7 - 1$ es

$$x^7 - 1 = f_0(x)f_1(x)f_2(x)$$

con $f_0(x) = (x-1)$, $f_1(x) = (x^3+x+1)$, $f_2(x) = (x^3+x^2+1)$ y $f_1(x)$ primitivo. Indique razonadamente si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

- a) $g_1(x) = f_0(x)f_1(x)$ genera un código cíclico $\mathcal{C}_1[7, 3]$ de distancia 4.
- b) Si $\mathcal{C}_2$ es otro código cíclico generado por $g_2(x) = f_1(x)$ de la misma longitud que $\mathcal{C}_1$, se cumple que $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$.

a) Es verdadera.

- $g_1(x)$ es un polinomio mónico de grado 4 que divide a $x^7 - 1$. Luego es generador de un código cíclico con $n = 7$, $k = 3$ y $n - k = 4$.
- $d \geq 2$ por ser un código cíclico. d par porque $(x-1)|g_1(x)$ y $d \neq 2$ porque $n \leq 2^s - 1$ ($n = 7 = 2^3 - 1$), con $s = 3$ el grado del polinomio primitivo $f_1(x)$ que es factor de $g_1(x)$. Como el peso de $g_1(x)$ es 4, se concluye que $d = 4$.

b) Es falsa. $g_2(x)$ tiene peso 3 y $\mathcal{C}_1$ sólo contiene palabras de peso par. Luego $\mathcal{C}_2 \not\subset \mathcal{C}_1$.

Cuestión 7. (1 punto). El polinomio $g(x) = (x-1)(x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ genera un código cíclico $[32767, 32751]$ y todos sus factores son primitivos.

- a) Enumere las propiedades de detección de errores que conozca para este código. (0,5 puntos)
- b) Codifique sistemáticamente el mensaje x . (0,25 puntos)

Cuestión 3. $C(23, k)$, 3-perfecto

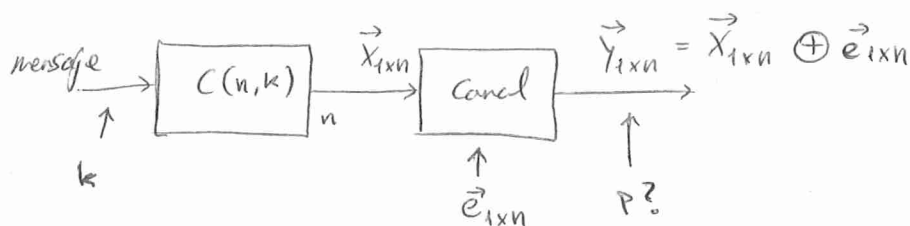
a) ¿Cuál será el valor de la redundancia?

$$n-k = \log_2 2^{n-k} = \log_2 2048 = 11 \text{ bits de redundancia}$$

$\vec{s}_{1 \times n-k}$	$P_H(\vec{e})$	
0	1	
1	$n = 23$	
2	$\binom{n}{2} = \binom{23}{2} = 230 + 23 = 253$	
3	$\binom{n}{3} = \binom{23}{3} = 1771$	

b)

Probabilidad de recibir mensaje con fallos:



Si $\vec{y}_{1 \times n} = \vec{x}_{1 \times n} \Rightarrow$ Mensaje llega sin fallos y esto es posible si no falla ninguno de los bits.

$$P(\text{tena fallos el mensaje}) = 1 - P(\text{no tenga fallos}) = 1 - P(\text{no falle ninguno de sus bits}) =$$

$$= 1 - (1-p)^n = 1 - (1-p)^{23} = 1 - (1 - 10^{-4})^{23}$$

¿Probabilidad de no poder corregir el mensaje?

$$P(\text{no poder corregir el mensaje}) = 1 - P(\text{poder corregir el mensaje}) =$$

$\vec{s}$	$P_H(\vec{e})$	n
0		
1	$n = 23$	
2		
3		

$$= 1 - P(\text{error producido este en la tabla de síndromes}) =$$

$$= 1 - \left[23 \cdot (1-p)^{n-1} + \binom{23}{2} p^2 (1-p)^{n-2} + \binom{23}{3} p^3 (1-p)^{n-3} \right] \approx$$

$$\approx 23 = n$$

Cuestión 5.

$$H = \begin{bmatrix} H_4 & 0 \\ 0 & H_4 \end{bmatrix}$$

c) Número de palabras de peso mínimo de C . $dc=3$

$$B_i = \sum_{j=0}^i A_j \cdot A_{i-j}$$

$$\begin{aligned} i=3 \quad B_3 &= A_0 \cdot A_{3-0} + A_1 \cdot A_{3-1} + A_2 \cdot A_{3-2} + A_3 \cdot A_{3-3} = \\ &= A_0 \cdot A_3 + A_3 \cdot A_0 = 1 \cdot 35 + 35 \cdot 1 = 70 \end{aligned}$$

Cuestión 6.

a) $g(x) = f_0(x) \cdot f_1(x) = (x-1)(x^3+x+1) \quad C(7,3) \quad dc=4$

$n=7$ $g(x)$ es factor de x^n+1

- $(x-1)$: debe dividir a $x^7+1 \rightarrow$ Si, $(x+1)$ divide a todo x^n+1

- x^3+x+1 : idem $\rightarrow$ Por se primitivo es factor de

$$x^{n'}+1 = x^7+1$$

$$n' = 2^r - 1 = 2^3 - 1 = 7$$

$n=7$
 $\text{grado}(g(x)) = n-k = 4 \quad \boxed{k=3}$

De las propiedades detectoras:

a) $dc \geq 2$ Porque los detectan. No los corrigen.
b) $g(x)$ P_H par $\Rightarrow$ todas las p.c son de P_H par.
 $\Downarrow$
 dc es par. $\Rightarrow dc \geq 4$

c) $p(x) = f(x)$
 $7 = n \leq 2^r - 1 = 2^3 - 1 = 7$ } detecta dobles

$$\boxed{g(x) = (x-1)(x^3+x+1) = x^4 + x^3 + x^2 + 1}$$