

# Ejercicios Tratamiento de Datos - Curso 2014-2015

Aníbal R. Figueiras Vidal

Lorena Álvarez Pérez

## Tema 2: “Decisión Analítica”

**2.D1** Pruébese que un test MAP de  $J$  hipótesis se puede realizar mediante una sucesión de tests LRT binarios de cada hipótesis contra las siguientes.

**2.Q1** Un problema de decisión ternario unidimensional con hipótesis equiprobables está definido por las siguientes verosimilitudes:

$$\begin{aligned} p(x|H_0) &= 2(1 - 2|x - \tfrac{1}{2}|) & , & \quad 0 < x < 1 \\ p(x|H_1) &= 1 & , & \quad 0 < x < 1 \\ p(x|H_2) &= 2x & , & \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

- a) Determinése el decisor de mínima probabilidad de error.
- b) Discútase si el decisor anterior es equivalente al constituido por un primer decisor de mínima probabilidad de error que elige entre  $H_0$  y  $H_1 \cup H_2$ , y tras ello, caso de aceptar la hipótesis  $H_1 \cup H_2$ , se aplica un segundo decisor, también de mínima probabilidad de error, para decidir entre  $H_1$  y  $H_2$ .

**2.Q2** En un problema de decisión M-aria bidimensional con observaciones  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ , se comprueba que  $p(x_1|x_2, H_j)$  no depende de  $j$ . Se desea diseñar un decisor ML, aunque se sabe que las probabilidades a priori,  $\{Pr(H_j)\}_{j=1,\dots,M}$ , son diferentes. Discútase cuál de los siguientes diseños es válido:

a)  $j^* = \arg \max_j \{p(x_1|H_j)\}$

b)  $j^* = \arg \max_j \{p(x_2|H_j)\}$

c)  $j^* = \arg \max_j \{p(x_2, H_j)\}$

**2.Q3** Un problema de decisión binario unidimensional obedece a las verosimilitudes

$$p(x|H_1) = \frac{a}{2} \exp(-a|x|)$$

$$p(x|H_0) = \frac{b}{2} \exp(-b|x|),$$

con  $b > a$  ( $> 0$ ).

- a) Determinése la forma del decisor de Neyman-Pearson.
- b) Calcúlese el parámetro del decisor para obtener  $P_{FA} = 10^{-2}$ .
- c) Calcúlese  $P_D$  para el diseño hecho en b).

**2.Q4** Se conocen las verosimilitudes  $\{p(\mathbf{x}|H_i)\}$  de un problema de decisión con tres hipótesis equiprobables  $\{H_i\}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , y dos decisiones posibles  $\{D_j\}$ ,  $j = 0, 1$ .  $\{C_{ji}\}$  es la política de costes.

- a) Determinése el decisor óptimo.
- b) Supóngase que  $C_{00} = C_{11} = 0$ ,  $C_{10} = C_{01} = 1$ , y  $C_{12} = 2C_{02} = 2$ . Establézcase el decisor óptimo de umbral ( es decir, con la forma  $q(\mathbf{x}) \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} \eta$  )
- c) Considérese el caso particular unidimensional

$$p(x|H_0) = \Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$p(x|H_1) = L(x|1) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$$

$$p(x|H_2) = \frac{1}{2} \Pi(x|2) = \begin{cases} 1/2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

bajo las condiciones establecidas en b). Determinése el decisor óptimo en función del valor de  $x$ .

**2.Q5** Un problema bidimensional de decisión binaria se rige por las verosimilitudes

$$p(x_1, x_2|H_0) = \begin{cases} \frac{1}{4} \exp(-x_1)u(x_1), & -3 < x_2 < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x_1, x_2|H_1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp(-2x_1)u(x_1), & -1 < x_2 < 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y las probabilidades “a priori” de las hipótesis son iguales.

Determinése el decisor de mínima probabilidad de error.

**2.Q6** Las verosimilitudes de las hipótesis en un problema binario son

$$\begin{aligned} p(x|H_0) &= a \exp(-ax)u(x) \\ p(x|H_1) &= a^2 x \exp(-ax)u(x) \end{aligned}$$

( $a > 0$ ).

- i) Un diseñador no puede determinar las probabilidades a priori de las hipótesis y opta por implementar un test de Neyman-Pearson con  $P_{FANP} = \alpha$ . Establézcase dicho test.
- ii) En realidad,  $\Pr(H_0) = \beta$  ( $0 < \beta < 1$ ). Establézcase el test MAP.

- iii) Calcúlese la probabilidad de error  $P_{eNP}$  que en realidad proporciona el test de Neyman-Pearson.
- iv) Determínese el valor de  $\alpha$  para el que  $P_{eNP}$  se hace mínima.

**2.E1** Considérese el problema de decisión binaria descrito por:

$$p(x|H_1) = a \exp(-ax)u(x) \quad (a > 0)$$

$$p(x|H_0) = \begin{cases} a/2, & 0 < x < 2/a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Diséñese el decisor ML
- b) Calcúlese  $P_{FA}$  y  $P_M$
- c) Si el decisor que se ha diseñado en a) se aplica a una situación en la que la verosimilitud de las observaciones supuesta  $H_0$  es en realidad

$$p'(x|H_0) = \begin{cases} a/4, & 0 < x < 4/a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

discútase los efectos que se producen, calculando también las (nuevas)  $P'_{FA}$  y  $P'_M$ .

**2.E2** Considérense las hipótesis binarias

$$\begin{aligned} H_0 : x &= n \\ H_1 : x &= s + n \end{aligned}$$

siendo  $s > 0$  una constante conocida, y estando el ruido  $n$  caracterizado por

$$p(n) = \begin{cases} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{|n|}{s}\right), & |n| < s \\ 0, & |n| > s \end{cases}$$

Las probabilidades de las hipótesis son  $\Pr(H_0) = 1/3$ ,  $\Pr(H_1) = 2/3$ .

- a) Establézcase el decisor MAP
- b) Calcúlense las correspondientes  $P_{FA}$  y  $P_M$ , así como la probabilidad de error
- c) Calcúlese cuánto variarían las anteriores probabilidades si se aplicase a esta situación el mismo tipo de decisor pero diseñado suponiendo que  $n$  fuese gaussiano con igual varianza que el ruido verdaderamente presente (y media también nula).

**2.E3** Considérese un problema bidimensional de decisión binaria con verosimilitudes

$$p(x_1, x_2|H_1) = \begin{cases} a(x_1^2 + x_2^2), & x_1^2 + x_2^2 \leq 1/4 \quad \text{y} \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x_1, x_2|H_0) = \begin{cases} b, & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \quad \text{y} \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Diseñese el decisor MAP correspondiente. Discútanse las formas de las regiones de decisión en función de los márgenes de valores del parámetro  $c = \Pr(H_0)/\Pr(H_1)$ .
- b) Calcúlense  $P_{FA}$ ,  $P_M$  y  $P_e$  cuando  $\Pr(H_0) = 2/3$ .

**2.E4** Considérese el problema de detección

$$\begin{aligned} H_1 : \mathbf{x} &= \mathbf{m} + \mathbf{r} \\ H_0 : \mathbf{x} &= \mathbf{r} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{m}$  es un vector  $N$ -dimensional conocido y  $\mathbf{r}$  un vector de  $N$  muestras independientes, la  $n$ -ésima distribuida como gaussiana de media 0 y varianza  $v_n$

- a) Diseñese el detector ML
- b) Determinénse  $P_{FA}$  y  $P_D$  en función de los datos del problema ( $\mathbf{m}$  y  $\mathbf{v}$ ), expresándolas mediante la función

$$\text{erfc}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp(-t^2/2) dt$$

- c) Discútase cómo afectan los niveles de las componentes de señal y ruido ( $m_n^2$  y  $v_n$ ) al comportamiento de las probabilidades que se han calculado en el apartado b).

**2.E5** En el problema de decisión binaria

$$\begin{aligned} H_1 : x &= d + r \\ H_0 : x &= r \end{aligned}$$

$d$  es una constante positiva y  $r$  sigue una distribución  $\Gamma(\alpha, a)$

$$p(r) = \frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-ax) u(x), \quad a > 0$$

con  $\alpha > 1$ .

- i) Previa representación de las verosimilitudes, diseñese el decisor ML.
- ii) Indíquese si el umbral de decisión se acerca o aleja relativamente de  $x = d$  al variar cada uno de los parámetros del problema ( $d$ ,  $a$ ,  $\alpha$ ).
- iii) Discútase como varían las prestaciones del decisor óptimo según los valores de los parámetros.
- iv) Verifíquese la degradación de la decisión si se emplea el diseño óptimo para un valor  $\alpha' \neq \alpha$ .

**2.E7** Considérese el problema de decisión binaria

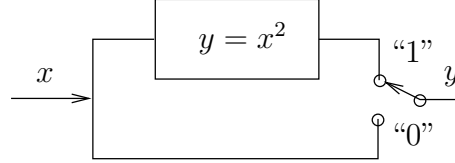
$$\begin{aligned} H_1 : x &= \mathbf{s}_1^T \mathbf{r} \\ H_0 : x &= \mathbf{s}_0^T \mathbf{r} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{s}_i$  son vectores conocidos, y  $\mathbf{r}$  es un ruido multiplicativo gaussiano  $N$ -dimensional de media nula y matriz de covarianzas  $V$

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |V|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{r}^T V^{-1} \mathbf{r}\right)$$

- i) Diseñese el decisor ML.
- ii) Suponiendo que  $v_1 > v_0$ , determinar cualitativamente cómo se comportan  $P_{FA}$  y  $P_M$  si se aplica a la situación anterior un decisor ML diseñado suponiendo que la matriz de covarianzas es  $V'$ . ¿Puede mejorar la probabilidad total de error? (Admítanse iguales probabilidades a priori).

**2.E8** El conmutador de la figura se encuentra en su posición superior (“1”) con probabilidad conocida  $P$ . La variable aleatoria  $x$  tiene una densidad de probabilidad uniforme  $U(0, 1)$ .



La posición del conmutador no se puede observar, aunque sí el valor  $y$  presente a su salida. A partir de la observación de este valor, se pretende aplicar un decisor bayesiano para decidir cuál es la posición del conmutador: siendo la política de costes  $C_{00} = C_{11} = 0$ ,  $C_{10} = 2C_{01}$ .

- a) Formúlese el problema en la forma habitual.
- b) Determinése el correspondiente test, teniendo en cuenta los posibles valores de  $P$ .
- c) Calcúlense  $P_{FA}$  y  $P_M$ .

(Sugerencia: para determinar  $p(y)$ , relaciónense las funciones de distribución de  $y$  y de  $x$ ).

**2.E9** Se ha de decidir por máxima verosimilitud si una cierta variable aleatoria  $x$  de media nula y varianza  $v$  sigue una densidad de probabilidad gaussiana o laplaciana (exponencial bilateral) a partir de  $K$  medidas  $\{x^{(k)}\}$  de dicha variable tomadas independientemente,

- a) Dada la forma habitual de la densidad de probabilidad laplaciana

$$p(x) = \frac{a}{2} \exp(-a|x|) \quad (a > 0)$$

presentar esta densidad de probabilidad en función de su varianza  $v$ .

- b) Establézcase el decisor necesario, tomando la gaussianidad como  $H_1$ .
- c) Resuélvase el problema determinando umbrales para  $K = 1$ .
- d) A la vista del resultado de c), discútase el efecto de las muestras en el caso general según su tamaño respecto a la desviación típica.

**2.E10** Se lanza al aire un dado tradicional (caras con puntos de 1 a 6) y se genera la v.a.  $x$  tal que

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right), & 0 < x < a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

de modo tal que su media viene dada por el resultado del lanzamiento (es igual a los puntos que muestra la cara de arriba).

Supóngase que, para una tirada, se tiene acceso a 3 medidas del valor de  $x$  tomadas independientemente, de valores  $x^{(1)} = 2, x^{(2)} = 5, x^{(3)} = 10$ . Decídase a partir de ellas el resultado del lanzamiento del dado según el criterio de máxima verosimilitud.

**2.E11** Se desea clasificar objetos que pertenecen a una de dos clases,  $H_0$  y  $H_1$ , mediante la consideración de dos de sus dimensiones,  $x_1$  y  $x_2$ , estadísticamente independientes entre sí y cuyas verosimilitudes son:

$$p(x_1|H_0) = \begin{cases} 1 - \frac{x_1}{2}, & 0 < x_1 < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} ; \quad p(x_1|H_1) = \begin{cases} \frac{x_1}{2}, & 0 < x_1 < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x_2|H_0) = \begin{cases} 1, & 0 < x_2 < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} ; \quad p(x_2|H_1) = \begin{cases} 1, & 1 < x_2 < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las clases son equiprobables y los costes de ambos tipos de errores de clasificación son unitarios. De otro lado, el coste de medir  $x_1$  es despreciable, pero el de medir  $x_2$  es  $C_M$ .

- a) Determinése el coste medio  $C_B$  resultante de aplicar el clasificador bayesiano sobre  $x_1, x_2$ .
- b) Con objeto de reducir el coste medio anterior, se considera la alternativa de aplicar un procedimiento de clasificación secuencial: clasificar según  $x_1$  si la decisión es suficientemente clara y, caso contrario, medir  $x_2$  y clasificar considerando ambas. Concretamente, dada la simetría en torno al umbral de decisión de las verosimilitudes de  $x_1$ , se detiene el proceso en el primer paso si  $x_1$  se aleja de dicho umbral un valor mayor que  $\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ).
  - b.1) Determinése el umbral de decisión para el primer paso.
  - b.2) Calcúlese la probabilidad de que se tome una decisión en un solo paso,  $Pr(1)$ .
  - b.3) Considerando la probabilidad anterior y los costes medios correspondientes a decidir en un paso y a decidir en dos, calcúlese el coste medio de la clasificación secuencial,  $C_S$ .
  - b.4) Discútase la mejor elección del parámetro  $\gamma$ . ¿Hay alguna limitación sobre el valor de  $C_M$ ?

**2.E13** Un juego consiste en una sucesión indefinida de jugadas en las que el primer jugador lanza una moneda equilibrada y, tras ver el resultado (cara:  $H_1$ ; cruz:  $H_0$ ), establece el importe de la apuesta,  $x$  ( $x > 0$ ). El segundo jugador puede aceptar o no la apuesta; si la acepta, lanza la moneda: la cara gana a la cruz, y el empate no tiene consecuencias. En una partida, el segundo jugador sabe que las apuestas del primero siguen las leyes probabilísticas:

$$p(x|H_i) = \begin{cases} 1, & |x - m_i| < 1/2 \\ 0, & |x - m_i| > 1/2 \end{cases} \quad 1/2 < m_0 \leq m_1 < m_0 + 1$$

y conoce también los valores de  $m_0$  y  $m_1$ .

- a) Calcúlese el beneficio medio (importe de la apuesta por la probabilidad de ganarla menos la probabilidad de perderla) a la vista de  $x$  para el segundo jugador.
- b) Considerando el resultado del apartado anterior, establézcase la regla de decisión para aceptar o rechazar la apuesta que ha de aplicar el segundo jugador para maximizar su beneficio.
- c) Calcúlese el beneficio medio del segundo jugador cuando sigue la regla determinada en el apartado anterior.

- d) Indíquese como debe elegir  $m_1$  y  $m_0$  el primer jugador para minimizar sus pérdidas. Coméntese el resultado.

**2.E14** Un problema de decisión binaria bidimensional viene caracterizado por la equiprobabilidad de las hipótesis y por las verosimilitudes

$$p(x_1, x_2|H_0) = K_0 x_1(1 - x_2) \quad , \quad 0 < x_1, x_2 < 1$$

$$p(x_1, x_2|H_1) = K_1 x_1 x_2 \quad , \quad 0 < x_1, x_2 < 1$$

( $K_0, K_1 > 0$ )

- Calcúlense los valores de las constantes  $K_0$  y  $K_1$ .
- Establézcase el decisor de mínima probabilidad de error, e indíquese el carácter de los estadísticos  $x_1$  y  $x_2$ .
- Determinense las ddp marginales  $p_{X_i|H_j}(x_i) = p(x_i|H_j)$ ,  $i = 1, 2$  y  $j = 0, 1$ . ¿Qué relación estadística hay entre  $x_1$  y  $x_2$  bajo cada hipótesis?
- Calcúlense  $P_{FA}$ ,  $P_M$  y  $P_e$ .
- En la práctica, la medida de  $x_2$  viene acompañada de un ruido aditivo  $n$  independiente de  $x_1$  y  $x_2$ ; es decir, se observa  $y = x_2 + n$ . Diseñese el decisor óptimo para esta situación cuando la ddp de este ruido tiene la forma:

$$p(n) = 1, \quad 0 < n < 1$$

- Calcúlense  $P'_{FA}$ ,  $P'_M$  y  $P'_e$  para la situación y el diseño del apartado anterior.

**2.E15** Considérese un problema de decisión binaria unidimensional en el que las verosimilitudes siguen ddp's Rayleigh

$$p(x|H_i) = a_i^2 x \exp(-a_i^2 x^2/2) u(x)$$

$i = 0, 1$ ; siendo  $a_0^2 > a_1^2$ .

- Demuéstrese que, si  $(a_0/a_1)^2 \eta > 1$ , siendo  $\eta$  el umbral del LRT, éste se reduce a un test de umbral aplicado sobre la v.a. observada  $x$ :

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} U$$

determinando la expresión de  $U$  en función de  $a_0^2$ ,  $a_1^2$  y  $\eta$ . ¿Qué ocurre si  $(a_0/a_1)^2 \eta < 1$ ?

- Considérense los parámetros característicos del decisor:

- especificidad:  $E = Pr(D_0|H_0)$
- sensibilidad:  $S = Pr(D_1|H_1)$

Calcúlense sus valores en función de los parámetros del sistema.

- Como se sabe, es posible elegir un valor de  $U$  para conseguir un cierto compromiso entre  $S$  y  $E$ . Suponiendo que se procede así, establézcase la expresión analítica de la curva (tipo OC)  $S$  vs  $E$ , y represéntese de forma aproximada. Indíquese cómo se comporta la curva cuando  $(a_1/a_0)^2 \rightarrow 0$  y cuando  $(a_1/a_0)^2 \rightarrow 1$ .
- ¿Qué ocurre si  $a_1^2 > a_0^2$ ?

**2.E16** Las verosimilitudes de las hipótesis de un problema de decisión binaria con observaciones unidimensionales son:

$$p(x|H_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-x), & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$p(x|H_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x), & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

y las hipótesis son equiprobables.

- Establézcase el decisor MAP (ML) en forma de umbral.
- Calcúlense  $P_{FA}$ ,  $P_M$  y  $P_e$ .
- Un desajuste del sensor hace que las observaciones pasen a ser

$$y = ax + b$$

con  $0 < a < 1$  y  $b > 1$ .

Suponiendo que se sigue empleando el decisor diseñado en a), calcúlense  $P'_{FA}$ ,  $P'_M$  y  $P'_e$ .

- El diseñador se da cuenta de que las tasas de errores medidas y las calculadas no concuerdan, verifica el sensor y determina el desajuste existente; de acuerdo con ello, rediseña el decisor MAP (ML).

Establézcase ese decisor en forma de umbral sobre  $y$ .

- Calcúlense  $P''_{FA}$ ,  $P''_M$  y  $P''_e$  para el decisor determinado en d). Discútanse los resultados.
- Un nuevo desajuste de los sensores lleva a observar

$$z = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x/2, & x < 0 \end{cases}$$

¿Qué valores corresponden a  $P'''_{FA}$ ,  $P'''_M$  y  $P'''_e$  si se sigue aplicando el decisor establecido en a)?

- De nuevo, el diseñador sigue el proceso indicado en d), y encuentra el desajuste expuesto en f). ¿Cuál será el resultado de su rediseño?
- Calcúlense  $P'^V_{FA}$ ,  $P'^V_M$  y  $P'^V_e$  para el último rediseño. Discútanse los resultados.

**2.E17** En un problema de decisión binaria bajo situación de hipótesis equiprobables y  $C_{00} = C_{11} = 0$ ,  $C_{01} = 2C_{10}$ , la verosimilitud de  $H_1$  es la Erlang

$$p(x|H_1) = \frac{x^2}{2} \exp(-x)u(x)$$

y la de  $H_0$  es la Weibull

$$p(x|H_0) = x^2 \exp(-x^3/3)u(x)$$

- Establézcase el decisor.
- Calcúlense  $P_{FA}$ ,  $P_M$  y  $P_e$ .
- En realidad, la verosimilitud de  $H_0$  es la Weibull antes indicada para la variable  $y = \sqrt[3]{3x}$ . Calcúlense  $P'_{FA}$ ,  $P'_M$  y  $P'_e$  si se aplica el decisor que se ha establecido.



- iv) El diseñador se da cuenta de lo indicado en iii) y corrige el diseño del decisor. Indíquese cuál es este nuevo diseño.
- v) Calcúlense  $P''_{FA}$ ,  $P''_M$  y  $P''_e$  para el diseño corregido.

**2.E18** Las probabilidades a priori de un problema de decisión binaria son  $\Pr(H_0) = 4/5$ ,  $\Pr(H_1) = 1/5$ , y las verosimilitudes:

$$p(x|H_1) = \exp(-x)u(x)$$

$$p(x|H_0) = 2 \exp(-2x)u(x)$$

- i) Diseñese el decisor de mínima probabilidad de error.
- ii) Calcúlense  $P_{FA}$ ,  $P_M$  y  $P_e$ .
- iii) Una avería en el sensor que lee los valores de la  $x$  hace que se maneje  $y = \sqrt{x}$ . Determinénse los nuevos valores  $P'_{FA}$ ,  $P'_M$  y  $P'_e$  si no se modifica el diseño realizado.
- iv) Se pretende compensar el defecto del sensor introduciendo la transformación  $z = 0.9y^2$ , sin modificar el decisor. ¿Cuáles serán los nuevos valores  $P''_{FA}$ ,  $P''_M$  y  $P''_e$ ?

**2.E19** Una observación  $x$  puede corresponder a una de tres hipótesis (excluyentes)  $\{H_i\}, i = 0, 1, 2$ ; siendo las correspondientes verosimilitudes

$$p(x|H_i) = a_i \exp(-a_i x)u(x), \quad i = 0, 1, 2$$

con  $a_0 > a_1 > a_2 > 0$ . La hipótesis  $H_0$  corresponde a ausencia de una señal, mientras que  $H_1 \cup H_2 = \bar{H}_0$  implica su presencia.

- a) No se conocen las probabilidades a priori de las hipótesis, por lo que se adopta el criterio de Neyman-Pearson, fijando la probabilidad de falsa alarma  $P_{FA} = \Pr(D_1 \cup D_2|H_0) = \Pr(\bar{D}_0|H_0)$  en un cierto valor  $\alpha$ .
  - a1) Establézcase el decisor correspondiente.
  - a2) Calcúlense  $\Pr(D_1 \cup D_2|H_1)$  y  $\Pr(D_1 \cup D_2|H_2)$ .
- b) Para distinguir  $H_1$  de  $H_2$ , se recurre a una segunda aplicación del criterio de Neyman-Pearson, forzando que  $\Pr(D_2|H_1)$  tome el valor  $\alpha'$ , que se elige para no provocar inconsistencias.
  - b1) Determinénse el mecanismo a aplicar para conseguirlo.
  - b2) Indíquese cómo ha de elegirse  $\alpha'$  para que este sistema, combinado con el diseñado en a), no produzca inconsistencias.
  - b3) Calcúlense  $\{\Pr(D_j|H_i)\}$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ , cuando se aplican conjuntamente ambos sistemas.
- c) En realidad,  $\Pr(H_1|H_1 \cup H_2) = \Pr(H_2|H_1 \cup H_2)$ . Calcúlese la probabilidad real de detección de señal,  $P_D$ .
- d) Además de lo dicho en c), en realidad  $\Pr(H_0) = 9/10$  y  $\Pr(H_1 \cup H_2) = 1/10$ . Calcúlese la probabilidad de error asociada al sistema conjunto,  $\Pr(e) = \Pr(D_1 \cup D_2|H_0)\Pr(H_0) + \Pr(D_0|H_1 \cup H_2)\Pr(H_1 \cup H_2)$ .

**2.E20** Dos hipótesis equiprobables dan lugar a observaciones unidimensionales según las verosimilitudes

$$p(x|H_1) = \exp(-x)u(x)$$

$$p(x|H_0) = 2 \exp(-2x)u(x)$$

- i) Establézcase el decisor de mínima probabilidad de error, y calcúlense sus  $P_{FA}$  y  $P_M$ .
- ii) Resulta posible tomar - independientemente una de otra - tres observaciones,  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$ ,  $x^{(3)}$ , de la variable  $x$  bajo la hipótesis que se esté produciendo. Establézcase el decisor de mínima probabilidad de error utilizando conjuntamente las tres, y calcúlense sus probabilidades de falsa alarma y de pérdida,  $P_{FA3}$  y  $P_{M3}$ .
- iii) Se implementa un decisor que procede según la mayoría de los tres decisores óptimos individuales aplicados a  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$ ,  $x^{(3)}$ . Calcúlense sus probabilidades de falsa alarma y de pérdida,  $P_{FA(M3)}$  y  $P_{M(M3)}$ . Cuantifíquese la degradación respecto al decisor óptimo encontrado en ii).

**2.E21** Es posible plantear el diseño óptimo de decisores con arquitecturas limitadas, como la lineal, aunque su aplicación práctica no resulta habitual (disponiendo de toda la información para un diseño óptimo incondicional, no es frecuente la obligación de emplear una arquitectura restringida).

Considérese el siguiente ejemplo.

Las hipótesis binarias  $H_0$ ,  $H_1$  son equiprobables, y las observaciones bidimensionales se rigen por las verosimilitudes:

$$p(x_1, x_2|H_0) = \frac{ab}{2} \exp(-a|x_1|) \exp(-b x_2)$$

$$p(x_1, x_2|H_1) = \frac{cd}{2} \exp(-c|x_1|) \exp(-d x_2)$$

en el dominio  $-\infty < x_1 < \infty$ ,  $0 < x_2 < \infty$ ;  $a > c > 0$ ,  $b > d > 0$ . La política de costes corresponde al criterio MAP.

- i) Diséñese el decisor óptimo, y represéntese la forma de su frontera en el plano  $(x_1, x_2)$ .
- ii) Justifíquese que la forma del decisor lineal óptimo es  $x_2 + w_0 \underset{D_0}{\overset{D_1}{\geq}} 0$ .
- iii) Diséñese el decisor lineal óptimo calculando los valores de  $P_{FA}$  y  $P_M$ .

Se adopta ahora el criterio de Neyman-Pearson, obligando a que la probabilidad de falsa alarma sea  $P'_{FA} = \alpha$ .

- iv) Diséñese el correspondiente decisor lineal, calculando  $P'_M$ .
- v) ¿En qué forma variará la frontera del decisor óptimo diseñado en i) cuando se aplique este nuevo criterio?

**2.E22** Las verosimilitudes de un problema de decisión binaria son:

$$p(x|H_1) = a \exp(-ax)u(x)$$

$$p(x|H_0) = b \exp(-bx)u(x)$$

con  $b > a > 0$ .

- i) Establézcase el decisor ML óptimo.
- ii) Calcúlense las características de calidad  $P_{FA}$  y  $P_M$  de dicho decisor.
- iii) En la lectura de los valores de  $x$  se produce una saturación, de modo que se maneja realmente

$$y = \begin{cases} x, & 0 < x < m \\ m, & x > m \end{cases}$$

Calcúlense los nuevos valores de las características de calidad,  $P'_{FA}$  y  $P'_M$ , si no se modifica el diseño anterior.

- iv) Establézcase el decisor ML óptimo para el problema planteado con  $y$  como variable observada.
- v) Calcúlense  $P''_{FA}$  y  $P''_M$  para el segundo diseño.

**2.E23** Las verosimilitudes de las hipótesis de un problema bidimensional de decisión binaria son

$$p(x_1, x_2|H_0) = \exp[-(x_1 + x_2)] u(x_1) u(x_2)$$

$$p(x_1, x_2|H_1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \exp[-(x_1 + x_2)] u(x_1) u(x_2)$$

La política de costes es la que corresponde a minimizar la probabilidad de error y las probabilidades a priori son  $\Pr(H_0) = 1/3$ ,  $\Pr(H_1) = 2/3$ .

- i) Diséñese el decisor óptimo.
- ii) Calcúlense  $P_{FA}$ ,  $P_M$  y  $P_e$ .

**2.E24** En una situación de decisión binaria caracterizada por las verosimilitudes

$$p_X(x|H_0) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

$$p_X(x|H_1) = \begin{cases} 1/2, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

y la equiprobabilidad de las hipótesis, el aparato de registro de valores lleva a cabo una indebida rectificación de media onda, de modo que se observa

$$y = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- i) Establézcase el decisor MAP para  $y$  observada, sorteando entre  $D_1$  y  $D_0$  de forma equiprobable en casos de empate.
- ii) Calcúlense  $P_{FA}$ ,  $P_M$  y  $P_e$  para el diseño anterior, comparándolas con los valores  $P_{FA0}$ ,  $P_{M0}$  y  $P_{e0}$  que correspondería al decisor MAP para  $x$  observada.
- iii) Propóngase un mecanismo para recuperar el valor  $P_{FA0}$  cuando se observa  $y$ . ¿Cuánto se degradan  $P_M$  y  $P_e$  al aplicarlo?

**2.A1** Los decisores “con duda” admiten, además de la aceptación de una de las hipótesis posibles, la declaración de que no se toma decisión (se “duda”), de acuerdo con una apropiada definición de costes.

Así, supóngase en el caso binario:

- coste nulo, si no hay error
- coste unitario, si hay error
- coste  $d$ ,  $0 < d < 0.5$ , si se declara  $D$  (“duda”).

a) Diseñese el correspondiente decisor bayesiano en función de las probabilidades “a posteriori” (para lo que debe considerarse que hay tres posibles decisiones ( $D_0$ ,  $D_1$  y  $D$ ), y que debe elegirse, a la vista de  $\mathbf{x}$ , la que implique menor coste).

Exprésese el mecanismo de decisión por máximos.

¿Qué implicaría  $d > 0.5$ ?

b) Supóngase un caso unidimensional con  $\Pr(H_i) = 1/2$ , ( $i = 0, 1$ ) y  $p(x|H_i)$  gaussiana de media  $m_i$  ( $m_1 > m_0$ ) y varianza  $v$ . Imponiendo las condiciones del decisor bayesiano con “duda” diseñado en a) a las probabilidades “a posteriori”, exprésese tal decisor en función de  $x$  (mediante la aplicación de umbrales).

### Tema 3: “Estimación”

**3.Q1** Considérese la variable aleatoria  $x$  con ddp

$$p(x) = a \exp [-a(x - d)]u(x - d)$$

con parámetros  $a > 0$  y  $d$ .

Establézcanse las expresiones de los estimadores de máxima verosimilitud de ambos parámetros,  $\hat{a}_{ML}$  y  $\hat{d}_{ML}$ , en función de los valores de  $K$  muestras de  $x$  tomadas independientemente,  $\{x^{(k)}\}_{k=1}^K$ .

**3.Q2** La va  $x$  tiene como ddp

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/a, & 0 < x < a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo  $a$  un parámetro conocido. Se aplica la transformación

$$y = \text{th}(bx)$$

donde  $b > 0$  es un parámetro desconocido.

- a) Determínese la ddp  $p_Y(y)$ .
- b) Obténgase el estimador ML del parámetro  $b$ ,  $\hat{b}_{ML}$ , a partir de  $K$  observaciones de  $y$  tomadas independientemente unas de otras,  $\{y^{(k)}\}_{k=1}^K$ .

**3.Q3** En el proceso de estimación de un parámetro determinista  $m$  inmerso en un ruido aditivo  $n$  con distribución  $G(n|0, v)$ ,  $m$  está también afectado por un ruido multiplicativo  $n'$  independiente de  $n$  y con distribución  $G(n'|m', v')$ ; es decir, las  $K$  muestras tomadas independientemente tienen la forma

$$x^{(k)} = n'^{(k)}m + n^{(k)}$$

pero el analista no lo advierte y aplica el estimador ML que correspondería a la situación sin ruido multiplicativo:

$$x^{(k)} = m + n^{(k)}$$

- a) Determínese el estimador que aplica el analista,  $\hat{m}_{fML}$ .
- b) Establézcase el estimador ML que corresponde a la situación real,  $\hat{m}_{ML}$ .
- c) Calcúlense y compárense los sesgos y varianzas de ambos estimadores.

**3.Q4** Las vvaa  $s_1, x_1, x_2$  siguen la ddp conjunta

$$p(s, x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{a^3}{2} \exp[-a(s + x_1 + x_2)] + \frac{b^3}{2} \exp[-b(s + x_1 + x_2)] & , \quad s, x_1, x_2 > 0 \\ 0 & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

( $a, b > 0$ ).

- i) Determínese  $\hat{s}_{ms}(x_1)$
- ii) ¿Qué ocurre si  $a = b$ ?

**3.Q5** Se aplica la transformación

$$y = \tanh(\alpha x) = \frac{\exp(\alpha x) - \exp(-\alpha x)}{\exp(\alpha x) + \exp(-\alpha x)}, \quad \alpha > 0$$

a la va  $x$  con ddp

$$p_X(x) = \exp(-x)u(x)$$

a) Determinése  $p_Y(y)$ .

b) Calcúlese el estimador ML del parámetro  $\alpha$ ,  $\hat{\alpha}_{ml}$ , a partir de  $K$  valores de  $y$  tomados de forma independiente,  $\{y^{(k)}\}$ .

**3.Q6** Un sistema añade a la señal de entrada una componente  $m$  y, tras ello, amplifica el resultado con una ganancia  $a$  (sin cambio de polaridad:  $a > 0$ ). Los parámetros (deterministas)  $m$  y  $a$  son desconocidos.

Para estimar  $m$  y  $a$ , se inyecta al sistema un ruido gaussiano  $x$  de media 0 y varianza  $v$  conocida. Se toman  $K$  muestras de la salida de modo independiente,  $\{y^{(k)}\}_{k=1}^K$ .

Calcúlense los estimadores de máxima verosimilitud de  $m$  y  $a$ ,  $\hat{m}_{ml}$  y  $\hat{a}_{ml}$ .

**3.Q7** Se dispone de  $K$  muestras tomadas de manera independiente,  $\{x^{(k)}\}$ , de la v.a. potencial

$$p(x|a, b) = \frac{b+1}{a^{b+1}} x^b, \quad 0 < x < a$$

( $b > -1$ ). Calcúlense  $\hat{a}_{ml}$  y  $\hat{b}_{ml}$ , en función de dichas muestras.

**3.Q8** En algunas situaciones prácticas, se dispone únicamente de conjuntos truncados de muestras; es decir, no se puede acceder a muestras que toman valores en determinada región del espacio de observación.

Considérese el siguiente ejemplo.

La v.a.  $x$  con ddp

$$p_x(x) = a \exp(-ax) u(x), \quad a > 0$$

no puede ser observada para valores de  $x$  mayores que  $x_0(> 0)$ . Se toman  $K$  muestras independientes de los valores accesibles,  $\{x'^{(k)}\}_{k=1}^K$ .

i) ¿Cuál es la ddp de los valores accesibles,  $p_{x'}(x)$ ?

ii) Establézcase la ecuación no lineal que tiene como solución el estimador ML del parámetro determinista  $a$  a partir de  $\{x'^{(k)}\}_{k=1}^K$ ,  $\hat{a}_{ml}$ .

**3.Q9** Al medirse la va  $x$ , con ddp

$$p(x) = U(x|0, 1) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se produce una distorsión, registrándose

$$y = x + ax^2 \operatorname{sgn}(x)$$

con  $a > 0$ .

Obtégase  $\hat{a}_{ml}(\{y^{(k)}\})$ , siendo  $\{y^{(k)}\}$   $K$  muestras tomadas de forma independiente.

**3.Q10** Un sensor de toma de muestras produce un efecto de saturación sobre la entrada  $x$ , proporcionando una salida  $y$  tal que

$$y = \begin{cases} x, & x < c \\ c, & x \geq c \end{cases}$$

El sensor registra los valores tomados de forma independiente

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= 1.186; & y^{(2)} &= 1.070; & y^{(3)} &= 2.312; & y^{(4)} &= 1.814; & y^{(5)} &= 2.312 \\ y^{(6)} &= 1.978; & y^{(7)} &= 2.312; & y^{(8)} &= 2.004; & y^{(9)} &= 2.312; & y^{(10)} &= 1.566 \end{aligned}$$

y se sabe que la v.a.  $x$  sigue la d.d.p. uniforme

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

con  $a < c < b$ .

- i) Dedúzcase el valor de  $c$ .
- ii) Determinénse  $\hat{a}_{ml}$  y  $\hat{b}_{ml}$ , recordando que la estimación ML de la probabilidad de un suceso discreto es su frecuencia relativa.

Se sustituye el sensor por otro sin defecto, y se toman otras 10 muestras de forma independiente:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= 1.733; & x^{(2)} &= 1.286; & x^{(3)} &= 2.844; & x^{(4)} &= 2.413; & x^{(5)} &= 1.675 \\ x^{(6)} &= 3.070; & x^{(7)} &= 1.472; & x^{(8)} &= 2.216; & x^{(9)} &= 2.302; & x^{(10)} &= 1.369 \end{aligned}$$

- iii) Considerando ambos conjuntos de muestras, determinénse los estimadores ML de  $a$  y  $b$ ,  $\hat{a}_{2ml}$  y  $\hat{b}_{2ml}$ .

**3.Q11** Las vv.aa.  $x, y$ , se distribuyen conjuntamente según

$$p(x, y|a) = \begin{cases} 1/a^2, & 0 < x, y < a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde  $a > 0$  es un parámetro determinista desconocido.

Para estimar  $a$ , se toman  $K$  muestras  $\{x^{(k)}, y^{(k)}\}$  independientemente unas de otras.

Determinénse  $\hat{a}_{ml}(\{x^{(k)}, y^{(k)}\})$ .

**3.Q12** Un analista dispone de las muestras  $\{x^{(k_1)}\}$ ,  $1 \leq k_1 \leq K_1$ ,  $\{y^{(k_2)}\}$ ,  $1 \leq k_2 \leq K_2$ , tomadas independientemente unas de otras, de dos vvaas  $x$  e  $y$  independientes entre sí, cuyas ddps dependen de un parámetro determinista común  $d$ :  $p_X(x|d)$ ,  $p_Y(y|d)$ , respectivamente:

- i) Establézcase la fórmula general que proporciona  $\hat{d}_{ml}$  a partir de los valores de dichas muestras.
- ii) Discútase si es posible en general obtener  $\hat{d}_{ml}$  combinando linealmente los estimadores ML del parámetro  $d$  a partir de  $\{x^{(k_1)}\}$ ,  $\hat{d}_{1ml}$ , y de  $\{y^{(k_2)}\}$ ,  $\hat{d}_{2ml}$ .
- iii) Obténganse  $\hat{m}_{ml}$ ,  $\hat{m}_{1ml}$  y  $\hat{m}_{2ml}$  para el caso particular

$$p_X(x|m) = \frac{1}{m} \exp\left(-\frac{x}{m}\right) u(x)$$

$$p_Y(y|m) = \frac{1}{2m} \exp\left(-\frac{y}{2m}\right) u(y)$$

y explíquese por qué en este caso  $\hat{m}_{ml}$  es combinación lineal de  $\hat{m}_{1ml}$  y  $\hat{m}_{2ml}$ .

- iv) Obténganse  $\hat{a}_{ml}$ ,  $\hat{a}_{1ml}$  y  $\hat{a}_{2ml}$  para el caso particular

$$p_X(x|a) = a \exp(-ax)u(x)$$

$$p_Y(y|a) = 2a \exp(-2ay)u(y)$$

**3.E1** Considérese la observación

$$x = s + n$$

con la señal  $s$  inmersa en un ruido  $n$  independiente de ella, y siendo sus densidades de probabilidad

$$p_S(s) = \begin{cases} 1, & 0 < s < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} = \Pi(s - 1/2)$$

$$p_N(n) = \begin{cases} 1, & -1/2 < n < 1/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} = \Pi(n)$$

Establézcase el estimador de error cuadrático medio mínimo de  $s$ ,  $\hat{s}_{ms}$ . Discútase el resultado.

**3.E2** Se dispone de  $K$  muestras, tomadas independientemente, de una variable  $x$  laplaciana  $L(m, v)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2v}} \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{v}}|x - m|\right)$$

Obtener el estimador ML conjunto de  $m, v$ .

**3.E3** i) Establézcase el estimador ML de un parámetro determinista  $m$  observado en  $K$  muestras

$$\text{de ruido gaussiano correlacionado: } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r^{(1)} \\ \vdots \\ r^{(K)} \end{bmatrix} : G(0, V_r)$$

- ii) Ídem si el ruido toma valores independientes.
- iii) Ídem si además el ruido tiene muestras idénticamente distribuidas.



**3.E4** Se toman independientemente  $K$  muestras  $\{x^{(k)}\}$  de una distribución uniforme  $U(a, b)$  de parámetros  $a, b$  desconocidos.

- i) Determinénse los estimadores ML de los parámetros  $a, b$ .
- ii) Discútase si se pueden obtener los estimadores ML de la media  $m$  y la varianza  $v$  de la distribución directamente a partir de los estimadores anteriores.

**3.E5** Se toman  $K$  muestras independientes de la distribución exponencial bilateral que tiene ddp

$$p(x) = \frac{a}{2} \exp(-a|x - b|)$$

- i) Determinénse los estimadores ML de los parámetros  $a, b$ .
- ii) Determinénse los estimadores ML de la media y la varianza de la distribución.
- iii) Compárense los estimadores ML de la media de las distribuciones gaussiana, uniforme, y exponencial.

**3.E7** La v.a. señal  $s$  se ve perturbada por un ruido aditivo  $r$  independiente de  $s$ , dando lugar a la v.a. observable

$$x = s + r$$

El comportamiento de la señal y ruido viene descrito por las d.d.p.

$$p(s) = a \exp(-as)u(s)$$

$$p(r) = b \exp(-br)u(r)$$

$$a, b > 0 \quad a \neq b$$

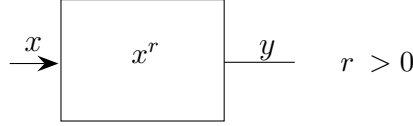
- a) Determinése  $\hat{s}_{ms}$ .
- b) Considérese  $b \gg a, 1$  y  $bx \gg 1$ , y establézcase el valor a que tiende asintóticamente  $\hat{s}_{ms}$ . Discútase si ese valor es pausable a la vista de las características del problema en esta situación.
- c) Considérese  $a \gg b, 1$  y  $ax \gg 1$ , y procédase como en el apartado anterior.
- d) Establézcase  $\hat{s}_{ml}$ .
- e) A la vista de los resultados anteriores, indíquese cuando sería razonable emplear  $\hat{s}_{ml}$ .

**3.E8** Se mide el parámetro determinista desconocido  $s, s > 0$ , mediante dos sistemas, que proporcionan las observaciones

$$x_i = a_i s + n_i, \quad i = 1, 2$$

siendo  $\{a_i\}, \{n_i\}$ , vv.aa. gaussianas e independientes entre sí, con medias  $E\{a_i\} = 1, E\{n_i\} = 0$ , y varianzas  $\{v_{ai}\}, \{v_{ni}\}$ , respectivamente ( $i = 1, 2$ ).

- a) Establézcase la expresión que proporciona el estimador ML de  $s, \hat{s}_{ML}$ .
- b) Calcúlese  $\hat{s}_{ML}$  para el caso particular  $v_{ai} = 0, i = 1, 2$ .
- c) Calcúlese  $\hat{s}_{ML}$  para el caso particular  $v_{ni} = 0, i = 1, 2$ .

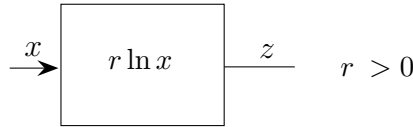


**3.E9** La v.a.  $x$  con ddp

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se transforma como indica en la figura, dando lugar a la v.a. observable  $y$ .

- Obtégase el estimador de máxima verosimilitud de  $r$ ,  $\hat{r}_{ML}$ , a partir de  $K$  observaciones de  $y$  tomadas de forma independiente.
- Considérese la situación



y obtégase  $\hat{r}_{ML}$  de  $K$  observaciones de  $z$  tomadas independientemente. Coméntese el resultado.

**3.E10** Para averiguar la ganancia de dos sensores iguales se mide con ellos un parámetro determinista  $c$  de valor conocido, proporcionando los sensores las salidas

$$\begin{aligned} x_1 &= gc + n_1 \\ x_2 &= gc + n_2 \end{aligned}$$

siendo  $g$  la ganancia buscada y  $n_1, n_2$  los ruidos de medida de los sensores, que son gaussianos independientes entre sí, de medias nulas y varianzas conocidas  $v_1, v_2$ , respectivamente. Se toman  $K$  medidas independientes entre sí, constituyendo el conjunto de observaciones  $\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\}_{k=1}^K$ .

- Obtégase el estimador ML de  $g$ ,  $\hat{g}_{ml}$ .
- Calcúlense la media y la varianza condicionadas a  $g$  de  $\hat{g}_{ml}$ .
- ¿Es  $\hat{g}_{ml}$  un estimador absolutamente eficiente?

**3.E11** La señal aleatoria  $x$ , con ddp de tipo potencial

$$p_X(x) = \begin{cases} (a+1)x^a, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es amplificada por un sistema con ganancia aleatoria  $g$ , también potencial e independiente de  $x$

$$p_G(g) = \begin{cases} (b+1)g^b, & 0 < g < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo  $a > b + 1 > 1$ .

- a) Determínese el estimador de error cuadrático medio mínimo de la señal de salida  $y = gx$  a la vista de la entrada,  $\hat{y}_{ms}(x)$ .
- b) Determínese el estimador de error cuadrático medio mínimo de la entrada a la vista de la salida,  $\hat{x}_{ms}(y)$ .

**3.E12** Las vv.aa.  $s$  y  $x$  obedecen a la ddp conjunta

$$p(s, x) = \frac{1}{2}(1 + sx)\exp[-(s + x)] \quad u(s) \quad u(x)$$

- i) Determínese  $\hat{s}_{ms}(x)$  y  $\hat{x}_{ms}(s)$ .
- ii) Determínese  $\hat{s}_{map}(x)$ .
- iii) Determínese  $\hat{s}_{ml}(x)$ .
- iv) Establézcase la ecuación que permite determinar  $\hat{s}_{abs}(x)$  mediante búsqueda.

**3.E13** Las vvaa  $s$ ,  $x$ , se distribuyen conjuntamente según la ddp

$$p(s, x) = \begin{cases} 60sx^2, & 0 < s < 1 - x, \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

- i) Calcúlese  $\hat{s}_{map}(x)$ .
- ii) Calcúlese  $\hat{s}_{ml}(x)$ .
- iii) Calcúlese  $\hat{s}_{ms}(x)$ .
- iv) Compárese los estimadores calculados según el coste medio MAP.

**3.A1** El empleo de la estimación ML, y en particular de la media muestral, es coherente con la visión “frecuentista”, o clásica, de la probabilidad.

En efecto: la aparición de un suceso  $A$  puede asociarse con la v.a. “indicadora”

$$x_A = \begin{cases} 1, & \text{si se da } A \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

y la secuencia  $\{x_A^{(k)}\}$  que se observa en  $K$  sucesos independientes tiene una probabilidad que depende de la del suceso  $A$ ,  $P$  (desconocida).

- a) Estímese  $P$  vía ML.
- b) ¿A qué característica estadística de  $x_a$  corresponde  $P$ ?, ¿Y a qué estimador de ésta corresponde el obtenido para  $P$ ?

**3.A2** El método de los momentos para estimar variables deterministas  $s$  a partir de observaciones  $\mathbf{x}(s)$  consiste en obtener las estimaciones a partir de igualar la media y los consecutivos momentos (centrales, típicamente) calculados analíticamente a sus estimaciones muestrales. Resulta ventajoso cuando la estimación ML conduce a ecuaciones acopladas de difícil solución

a) Considérese la función densidad de probabilidad  $B(p, q)$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B_I(p, q)}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (p, q > 0)$$

donde  $B_I(p, q)$  es la función  $\beta$  integral

$$B_I(p, q) = \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1} dy$$

Compruébese que la estimación ML de  $p$  y  $q$  a partir de la observación de  $K$  muestras  $\{x^{(k)}\}$  tomadas independientemente, conduce a ecuaciones acopladas de solución no inmediata.

b) Previo cálculo de la media y la varianza de  $p(x)$ , determínense los estimadores  $\hat{p}_{mt}$  y  $\hat{q}_{mt}$  utilizando el método de los momentos (sobre  $\bar{x}$  y  $\bar{v}$ ).

(Recuérdese:  $B_I(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B_I(p, q)$ )

**3.A3** Sea  $\hat{s}$  un estimador de punto estadísticamente creciente de un parámetro determinista  $s$ ; es decir, si  $s_2 > s_1$  son dos valores de  $s$ , se verifica que  $\Pr\{(\hat{s} > \hat{s}_1)|s_2\} > \Pr\{(\hat{s} > \hat{s}_1)|s_1\}$ , donde  $\hat{s}_1$  es cualquier valor de  $\hat{s}$ .

El estimador de intervalo (del parámetro determinista  $s$ ) asociado a dicho estimador de punto es el par ordenado de valores  $\{s_a, s_b\}$  correspondientes a un valor estimado  $\hat{s}_0$  (que se obtendría a partir de una observación  $\underline{x}_0$ ) que minimiza  $s_b - s_a$ , anchura del intervalo  $[s_a, s_b]$ , cumpliendo la condición

$$\Pr\{(\hat{s} < \hat{s}_0)|s_a \cap (\hat{s} > \hat{s}_0)|s_b\} = 1 - \delta$$

siendo  $\delta$  ( $\delta \ll 1$ ) el nivel de confianza ( $1-\delta$ , el coeficiente de confianza) del estimador de intervalo; nivel que se preselecciona para realizar los cálculos.

a) Compruébese que la condición citada equivale a

$$\Pr\{(\hat{s} > \hat{s}_0)|s_a\} + \Pr\{(\hat{s} < \hat{s}_0)|s_b\} = \delta$$

b) Suponiendo que  $\Pr\{(\hat{s} > \hat{s}_0)|s_a\} = \delta_1 (< \delta)$ , compruébese que para  $s_1 < s_a$  se verifica  $\Pr\{(\hat{s} > \hat{s}_0)|s_1\} < \delta_1$ ; de modo que resulta muy improbable que si el parámetro  $s$  toma el valor  $s_1$  se obtenga el valor  $\hat{s}_0$  para el estimador de punto. Análogamente ocurre para  $s_2 > s_b$ .

c) En la práctica, y salvo que conduzca a resultados que vulneren claramente la minimización de la anchura del intervalo de confianza, se acepta el resultado de aplicar separadamente

$$\begin{aligned} \Pr\{(\hat{s} > \hat{s}_0)|s_a\} &< \delta/2 \\ \Pr\{(\hat{s} < \hat{s}_0)|s_b\} &< \delta/2 \end{aligned}$$

que proporciona, en general, prestaciones (levemente) subóptimas. Mediante la introducción de la v.a. normalizada

$$z = \frac{\hat{s} - E\{\hat{s}|s\}}{\sqrt{V\{\hat{s}|s\}}}$$

donde  $E\{\hat{s}|s\}$  y  $V\{\hat{s}|s\}$  son la media y la varianza de  $\hat{s}$  dado  $s$ , respectivamente (que se suponen no relacionadas entre sí), que se admiten conocidas, y la utilización de los percentiles<sup>1</sup> de  $z$ . Verifíquese que las ecuaciones implícitas para determinar  $s_a$  y  $s_b$  son

$$\hat{s}_0 = E\{\hat{s}|s_a\} + \sqrt{V\{\hat{s}|s_a\}}z_{1-\delta/2}$$

$$\hat{s}_0 = E\{\hat{s}|s_b\} + \sqrt{V\{\hat{s}|s_b\}}z_{\delta/2}$$

- d) Determínese el estimador de intervalo  $\{m_a, m_b\}$  con nivel de confianza  $\delta$ (dado) de la media  $m$  de una v.a.  $x$  de varianza conocida  $v$  (no relacionada con  $m$ ) asociado a la media muestral  $\bar{x}$  calculada a partir de  $K$  observaciones de  $x, \{x^{(k)}\}_{k=1}^K$ , tomadas independientemente, siendo  $K$  suficientemente alto como para considerar que  $\bar{x}$  tiene un comportamiento gaussiano.

**3.A4** Se puede definir el estimador de intervalo de una v.a.  $s$  dada una observación  $\mathbf{x}$  como el par ordenado de valores  $\{s_a(\mathbf{x}), s_b(\mathbf{x})\}$  que minimiza  $s_b - s_a$  (anchura del intervalo de confianza,  $[s_a, s_b]$ ) cumpliendo:

$$\Pr\{s_a < s < s_b|\mathbf{x}\} = 1 - \delta$$

donde  $\delta$  ( $\delta \ll 1$ ) es el nivel de confianza del estimador;  $1 - \delta$  se denomina coeficiente de confianza.

Considése la situación descrita por:

$$x = s + n$$

siendo:

$$s : G_{\{m, v_s\}}(s)$$

$$n : G_{\{0, v_n\}}(n)$$

e independientes entre sí.

- a) Determínese el estimador de intervalo de nivel de confianza  $\delta$  de  $s$ , expresado en función del percentil  $100(1-\delta/2)$  de la v.a.  $z : G_{\{0,1\}}(z)$ ; es decir, el valor  $z_{1-\delta/2}$  que verifica

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_{1-\delta/2}} \exp(-z^2/2) dz = 1 - \delta/2$$

- b) ¿Qué ocurre si  $v_n \gg v_s$ ?

- c) ¿Qué ocurre si  $v_s \gg v_n$ ?

**3.A5** La condición que proporciona el estimador óptimo de una va  $s$  a la vista de las vvaa  $\mathbf{x}$  bajo un coste  $C(s, \hat{s})$

$$\hat{s}_C(\mathbf{x}) = \arg \min_{\hat{s}} \bar{C}(\hat{s}|\mathbf{x}) = \arg \min_{\hat{s}} \int C(s, \hat{s}) p(s|\mathbf{x}) ds$$

---

<sup>1</sup>El percentil  $z_\epsilon$  de una v.a.  $z$  se define mediante

$$\int_{-\infty}^{z_\epsilon} P(y) dy = \epsilon$$

obviamente  $z_\epsilon = P^{-1}(\epsilon)$ , siendo  $P(z)$  la función de distribución de  $z$ ; es decir,  $z_\epsilon$  es aquel valor tal que la v.a.  $z$  permanece por debajo de él con una probabilidad  $\epsilon$ .

no puede aplicarse directamente si se restringe la forma de  $\hat{s}$  a una familia de funciones indexada por  $\mathbf{w}$ ,  $\hat{f}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$ , porque la versión

$$\hat{f}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \stackrel{?}{=} \arg \min_{\mathbf{w}} \bar{C}(f_{\mathbf{w}}|\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{w}} \int C(s, f_{\mathbf{w}}) p(s|\mathbf{x}) ds$$

en general, no tiene solución.

- i) Verifíquese que así ocurre si  $C(s, f_{\mathbf{w}}) = (s - f_{\mathbf{w}})^2$ ,  $p(s|x) = x \exp(-xs) u(s) u(x)$  y  $f_{\mathbf{w}} = w_0 + w_1 e^x$ .
- ii) Indíquese cuál es el procedimiento general para obtener  $\hat{f}_{\mathbf{w}}(\mathbf{x})$ .
- iii) Procédase a determinar  $\hat{f}_{\mathbf{w}}(x)$  para el caso del apartado i) si

$$p(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- iv) Discútase qué ocurre procediendo como en i) si se consideran estimadores de la forma  $g_{\mathbf{w}}(x) = w_0 + w_1/x$ .

## Tema 4: “Los casos generales gaussianos”

**4.D1** Demuéstrese que la solución de error cuadrático medio mínimo al problema de deconvolución

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}$$

con la señal  $\mathbf{s}$  ( $N_1 \times 1$ ) y ruido  $\mathbf{n}$  ( $N_2 \times 1$ ) correlacionados según

$$p\left(\begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}\right) = G\left(\begin{bmatrix} s \\ n \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \mathbf{m}_s \\ \mathbf{m}_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{ss} & \mathbf{V}_{sn} \\ \mathbf{V}_{ns} & \mathbf{V}_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

( $\mathbf{H}$  es una matriz  $N_2 \times N_1$ ) tiene como expresión

$$\hat{\mathbf{s}}_{ms}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^T \mathbf{x} + \mathbf{w}_0$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T &= (\mathbf{V}_{ss}\mathbf{H}^T + \mathbf{V}_{sn})(\mathbf{H}\mathbf{V}_{ss}\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{V}_{sn} + \mathbf{V}_{ns}\mathbf{H}^T + \mathbf{V}_{nn})^{-1} \\ \mathbf{w}_0 &= \mathbf{m}_s - \mathbf{W}^T(\mathbf{H}\mathbf{m}_s + \mathbf{m}_n) \end{aligned}$$

**4.Q1** A partir de las variables aleatorias unidimensionales  $s$  y  $r$ , con densidad de probabilidad conjunta

$$p(s, r) = G\left(\begin{bmatrix} s \\ r \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

se forma la observación  $x = s + r$

- a) Determinése  $\hat{s}_{ms}$ .
- b) ¿Era previsible el resultado? (Considérese la relación que existe entre  $E\{r|x\}$  y  $E\{s|x\}$ ).

**4.Q2** En un problema de decisión binaria las observaciones  $N$ -dimensionales  $\mathbf{x}$  se obtienen a partir de las señales  $M$ -dimensionales  $\{\mathbf{s}_i\}$ ,  $i = 0, 1$ , en la forma

$$H_0 : \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}_0 + \mathbf{n}$$

$$H_1 : \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}_1 + \mathbf{n}$$

siendo  $\mathbf{A}$  una matriz  $N \times M$  conocida,  $\mathbf{n}$  un ruido  $G(\mathbf{n}|\mathbf{0}, \mathbf{V})$ ,  $\mathbf{s}_1 = \mathbf{1}$  y  $\mathbf{s}_0 = -\mathbf{1}$ . Nótese que  $\mathbf{A}\mathbf{s}_1 = \mathbf{m}_1$ , vector determinista que se supone conocido. Las hipótesis son equiprobables y se aplica la política de minimizar la probabilidad de error.

- a) Determinése el decisor óptimo.
- b) Calcúlese la probabilidad de error  $Pr(e)$ . Utilícese la función error complementaria de error de Van Trees

$$\text{erfc}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u \exp(-x^2/2) dx$$

**4.Q3** La va observada en un problema de decisión binaria tiene la forma

$$H_0 : x = s_a + s_b + n$$

$$H_1 : x = s_a - s_b + n$$

siendo  $s_a$ ,  $s_b$ ,  $n$ , vvaas gaussianas independientes de medias  $m_a$ ,  $m_b$ , 0, y varianzas  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v$ , respectivamente. Las probabilidades de ambas hipótesis son  $Pr(H_0) = 10/11$  y  $Pr(H_1) = 1/11$ .

- Diséñese el decisor MAP.
- Discútase en términos cualitativos qué ocurre si  $s_a = 0$ .
- Discútase en términos cualitativos qué ocurre si  $s_b = 0$ .
- Discútase en términos cualitativos qué ocurre si  $m_a = 0$ .
- Discútase en términos cualitativos qué ocurre si  $m_b = 0$ .

**4.Q4** La ddp conjunta de las variables  $x_1$ ,  $x_2$ , tiene la forma

$$p(x_1, x_2 | \mathbf{m}, V) = G(x_1 | m_1 + m_2, v_1) G(x_2 | m_2, v_2)$$

- Supóngase que  $m_1$ ,  $m_2$ , son parámetros deterministas desconocidos, y que  $v_1$ ,  $v_2$ , son valores conocidos. Determinéense los estimadores  $\hat{m}_{1ml}$ ,  $\hat{m}_{2ml}$ , a partir del conjunto de observaciones tomadas independientemente  $\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\}_{k=1}^K$ .
- Supóngase que, además de conocerse  $v_1$ ,  $v_2$ , se conoce el valor de  $m_2$ . Demuéstrese que, en estas condiciones,  $x_2$  es un estadístico irrelevante para obtener el estimador de máxima verosimilitud de  $m_1$ ,  $\tilde{m}_{1ml}$ , y determínese dicho estimador.

**4.Q5** En un problema de decisión binaria gaussiano bidimensional las verosimilitudes tienen las formas

$$p(\mathbf{x} | H_1) = G\left(\mathbf{x} \middle| \mathbf{0}, \begin{bmatrix} v_a & 0 \\ 0 & v_b \end{bmatrix}\right)$$

$$p(\mathbf{x} | H_0) = G\left(\mathbf{x} \middle| \mathbf{0}, \begin{bmatrix} v_b & 0 \\ 0 & v_a \end{bmatrix}\right)$$

siendo  $v_a > v_b$ .

Determínese el decisor ML óptimo, y represéntense las regiones de decisión en el plano  $x_1$ ,  $x_2$ .

**4.Q6** Considérese la ddp gaussiana

$$p_1(s, x) = \frac{1}{2\pi v} \exp\left(-\frac{s^2 + x^2}{2v}\right)$$

- Determínese  $\hat{s}_{1ms}(x)$ .

Considérese ahora la ddp

$$p_2(s, x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi v [1 - \exp(-1/2v)]} \exp\left(-\frac{s^2 + x^2}{2v}\right), & 0 < s, x < 1, s^2 + x^2 < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



cuyo perfil es gaussiano, pero el soporte es el primer cuadrante del círculo unidad.

ii) Determinése  $\hat{s}_{2ms}(x)$ .

iii) Discútase a qué se debe la diferencia cualitativa entre  $\hat{s}_{1ms}(x)$  y  $\hat{s}_{2ms}(x)$ .

**4.Q7** Un problema tetradimensional de decisión binaria e hipótesis equiprobables está caracterizado por las verosimilitudes Gaussianas:

$$p(\mathbf{x}|H_1) = G\left(\mathbf{x} \left| \begin{bmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right)\right)$$

$$p(\mathbf{x}|H_0) = G\left(\mathbf{x} \left| \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right)\right)$$

Una decisión correcta no apareja coste alguno, y los costes de ambos tipos de errores son iguales.

i) Determinése el test óptimo.

ii) Calcúlese la probabilidad de error.

**4.Q8** Considérese el problema gaussiano de decisión binaria bajo criterio MAP definido por las verosimilitudes

$$p(\mathbf{x}|H_0) = G(\mathbf{x}|\mathbf{0}, V)$$

$$p(\mathbf{x}|H_1) = G(\mathbf{x}|\mathbf{m}, V)$$

y la probabilidad a priori  $\Pr(H_0)$ .

Como se sabe, la frontera de decisión viene dada por un hiperplano. Determinése los márgenes de valores de  $\Pr(H_0)$  para los que dicha frontera

i) pasa entre los puntos  $\mathbf{0}$  y  $\mathbf{m}$ ;

ii) deja dichos puntos en cada una de las regiones de decisión.

**4.Q9** En un problema bidimensional binario de decisión gaussiana las verosimilitudes de las hipótesis son

$$p(\mathbf{x}|H_0) = G(\mathbf{x}|\mathbf{-1}, \mathbf{I})$$

$$p(\mathbf{x}|H_1) = G(\mathbf{x}|\mathbf{1}, \mathbf{I})$$

y las condiciones de costes y probabilidades a priori corresponden a la situación ML.

i) Determinése el decisor óptimo y sus prestaciones  $P_{FA}$ ,  $P_M$  y  $P_e$ .

- ii) En la práctica, se trabaja con datos contaminados  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$ , siendo  $\mathbf{n}$  un ruido gaussiano independiente de  $\mathbf{x}$  de vector de medias nulo y matriz de covarianza  $V_n = \begin{bmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{bmatrix}$ . El diseñador lo sabe y aplica el correspondiente decisor óptimo. Determinése dicho decisor y sus prestaciones  $P'_{FA}$ ,  $P'_M$  y  $P'_e$ .
- iii) Discútase la degradación de prestaciones que provoca la presencia del ruido  $\mathbf{n}$ .

**4.Q10** Un problema bidimensional de decisión binaria presenta verosimilitudes gaussianas de medias nulas y matrices de covarianza

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}, \text{ bajo la hipótesis } H_1$$

$$V_0 = \begin{bmatrix} 1 - \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 - \rho^2 \end{bmatrix}, \text{ bajo la hipótesis } H_0$$

$$0 < \rho < 1.$$

Las hipótesis son equiprobables y se aplica el criterio MAP. Determinése y represéntense las regiones de decisión.

**4.E1** Considere el problema de decisión binaria sobre la variable tetradsimensional  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$

$$H_0 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ es } G \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$x_4$  es  $U[0, \sqrt{v}]$  (uniforme entre 0 y  $\sqrt{v}$ ) e independiente de las anteriores

$$H_1 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ es } G \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & v \end{bmatrix} \right)$$

$x_4$  es  $U[0, 1]$  e independiente de las anteriores.

Suponiendo  $v > 1$ :

- Establezca el decisor ML.
- Calcule  $P_{FA}$  y  $P_M$ .

**4.E2** Considérese el problema bidimensional binario Gaussiano:

$$H_0 : \mathbf{x} \text{ es } G \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$H_1 : \mathbf{x} \text{ es } G \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} \right), \quad v > 1$$

- Establézcase el decisor ML en función del estadístico suficiente  $z = x_1^2 + x_2^2$ .
- Determinése las verosimilitudes de  $z$  a través del cálculo de las correspondientes funciones de distribución,

$$P(z|H_i) = \Pr \{x_1^2 + x_2^2 < z|H_i\}$$

- c) Calcúlese  $P_{FA}$  y  $P_M$  a partir de las verosimilitudes de  $z$ .

**4.E3** Las verosimilitudes

$$p(\mathbf{x}|H_0) = G(\mathbf{x}|\mathbf{0}, v\mathbf{I})$$

$$p(\mathbf{x}|H_1) = G(\mathbf{x}|\mathbf{m}, v\mathbf{I})$$

donde  $\mathbf{0}$  y  $\mathbf{m}$  son vectores  $N$ -dimensionales de componentes 0 y  $\{m_n\}$ , respectivamente, e  $\mathbf{I}$  la matriz unitaria  $N \times N$ , corresponden a las observaciones  $\mathbf{x}$  ( $N$ -dimensionales) en un problema de decisión binaria (gaussiano).

- Diséñese el decisor ML.
- ¿Cuánto y en qué sentido habría que trasladar el umbral del decisor anterior si  $Pr(H_0) = 1/4$  y se deseara diseñar un decisor de mínima probabilidad de error?
- Calcúlese  $P_{FA}$  y  $P_M$  para el decisor ML. ¿Qué ocurre si crece el número de dimensiones y  $\{m_n\} \neq 0$ ?
- Si en la práctica se tiene acceso a

$$z = \mathbf{m}^T \mathbf{x} + n$$

donde  $n$  es  $G(n|m', v_n)$  e independiente de  $\mathbf{x}$ , en lugar de a las observaciones  $\mathbf{x}$ , ¿cómo ha de modificarse el diseño del decisor ML?

- Calcúlese  $P'_{FA}$  y  $P'_M$  para el diseño del apartado d). ¿Cómo varían respecto a  $P_{FA}$  y  $P_M$ ?

Nota: Utilícese, cuando convenga, la función de error complementario dada por la expresión:

$$\text{erfc}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp(-t^2/2) dt$$

**4.E4** En un problema de decisión binaria tridimensional de hipótesis equiprobables, se supone que las verosimilitudes son

$$p(\mathbf{x}|H_1) = G(\mathbf{x}|\mathbf{0}, v_1\mathbf{I})$$

$$p(\mathbf{x}|H_0) = G(\mathbf{x}|\mathbf{m}, v_0\mathbf{I})$$

donde  $I$  es la matriz unitaria  $3 \times 3$ . La política de costes establecida impone  $C_{01} = 9C_{10}$  y  $C_{00} = C_{11} = 0$ . Además,  $v_1 = 9v_0$ .

- Diséñese el decisor de coste medio mínimo bajo las condiciones anteriores.
- En realidad,  $p(\mathbf{x}|H_1)$  y  $p(\mathbf{x}|H_0)$  son ddps uniformes sobre soportes cúbicos centrados en el origen y varianzas  $v_1\mathbf{I}$  y  $v_0\mathbf{I}$ , respectivamente. Diséñese el correspondiente decisor óptimo bajo la misma política de costes anterior.
- Calcúlese las probabilidades de falsa alarma y de pérdida para los dos diseños anteriores, ( $P_{FAi}$ ,  $P_{Mi}$  y  $P_{FAii}$ ,  $P_{Mii}$ , respectivamente) en la situación real; así como las probabilidades de error,  $P_{ei}$  y  $P_{eii}$ .

**4.E5** En un problema bidimensional gaussiano se ha de decidir entre cuatro hipótesis equiprobables cuyas verosimilitudes tienen matrices de covarianzas iguales y diagonales  $vI$ , siendo sus medias  $[m, 0]^T$  para  $H_1$ ,  $[0, m]^T$  para  $H_2$ ,  $[-m, 0]^T$  para  $H_3$  y  $[0, -m]^T$  para  $H_4$ .

- i) Determinése el decisor MAP.
- ii) Calcúlese la probabilidad de error asociada a dicho decisor.
- iii) Considérese un problema análogo en  $D$  dimensiones. ¿Cuál sería la probabilidad de error?, ¿cómo evoluciona dicha probabilidad con  $D \rightarrow \infty$ ?

**4.E6** Las verosimilitudes de un problema bidimensional de decisión binaria siguen las formas conoidales

$$p(x, y|H_1) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \{1 - [(x-1)^2 + (y-1)^2]\}, & (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x, y|H_0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} [1 - (x^2 + y^2)], & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El problema se plantea como decisión ML.

- i) Determinése el decisor ML.
- ii) Calcúlese  $P_{FA}$ ,  $P_M$  y  $P_e$ .
- iii) ¿Cómo cambia la frontera de decisión si las verosimilitudes pasan a ser gaussianas con las mismas medias anteriores y matrices de covarianza iguales y diagonales,  $vI$ ?
- iv) Calcúlese  $P'_{FA}$ ,  $P'_M$  y  $P'_e$  para el caso del apartado iii), utilizando la función complementaria de error de Van Trees,  $\text{erfc}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty \exp(-t^2/2) dt$ .
- v) ¿Cómo cambia la frontera de decisión si las verosimilitudes pasan a ser piramidales cuadradas,  $p''(x, y|H_0)$  con los vértices de la base en  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(0, -1)$ , y  $p''(x, y|H_1)$  de igual forma pero con su centro trasladado a  $(1, 1)$ ?
- vi) Calcúlese  $P''_{FA}$ ,  $P''_M$  y  $P''_e$  para el caso del apartado v).

**4.E7** Una  $v$  con distribución gaussiana de media 0 y varianza  $v$  se ve interferida aditivamente por un ruido impulsivo de valor  $m$  ó  $-m$  ( $m > 0$ ), que aparece con probabilidad  $\lambda$ , siendo  $\lambda < 1/3$ , en cada una de sus formas (positiva y negativa).

Se observa la señal resultante  $x$ , y se desea elegir una de las tres alternativas posibles: no se ha producido interferencia, ha aparecido una interferencia positiva, o se ha dado una interferencia negativa.

- i) Diseñese el decisor de mínima probabilidad de error.
- ii) Calcúlese las probabilidades de falsas detecciones y de pérdida de cada una de las dos formas de interferencias.

(Hay dos tipos de falsa detección: detección en ausencia y detección con signo equivocado).

**4.A1** Extender las formulas de la estimación en el caso general gaussiano y sus situaciones particulares cuando señal  $\mathbf{s}$  y ruido  $\mathbf{r}$  tienen medias no nulas:  $\mathbf{m}_s$  y  $\mathbf{m}_r$ , respectivamente. (Sugerencia: retírense las medias de las variables).

Interprétese el resultado para el caso de observaciones independientes de la misma variable en ruido i.i.d. en función de la presencia de  $\mathbf{m}_s$  y la media muestral corregida (según la media del ruido,  $\mathbf{m}_r$ ).

- 4.A2** i) Demuéstrese por inducción que la suma de los cuadrados de  $N$  vv.aa. gaussianas  $\{x_n\}$  independientes entre sí, de medias nulas y varianzas  $v$  (por tanto, equidistribuidas)

$$z = \sum_{n=1}^N x_n^2$$

sigue la ddp gamma de parámetro de forma  $N/2$  y parámetro de escala  $2v$

$$p_N(z) = \frac{1}{(2v)^{N/2} \Gamma(N/2)} z^{N/2-1} \exp(-z/2v) u(z)$$

(también llamada  $\chi^2$  de  $N$  grados de libertad si  $v = 1$ ; es Erlang si  $N$  es par), donde  $\Gamma(\cdot)$  indica la función gamma integral

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty t^{r-1} \exp(-t) dt$$

que verifica  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

Téngase en cuenta que la función beta integral

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

está relacionada con la gamma según

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

- ii) Considérese el problema de decisión binaria tetradimensional gaussiano de hipótesis equiprobables y verosimilitudes

$$p(\mathbf{x}|H_1) = G(\mathbf{x}|\mathbf{0}, v_1 \mathbf{I})$$

$$p(\mathbf{x}|H_0) = G(\mathbf{x}|\mathbf{0}, v_0 \mathbf{I})$$

( $v_1 > v_0$ ). Determinése el decisor MAP y calcúlense las  $P_{FA}$  y  $P_M$ .

## Tema 6: “Estimación y regresión lineales”

**6.Q1** Las señales  $s_1$  y  $s_2$  se observan en la forma

$$x_1 = s_1 + s_2 + n_1$$

$$x_2 = s_1 - s_2 + n_2$$

siendo  $n_1, n_2$ , ruidos de media 0 e incorrelacionados con ellas y entre sí, de varianzas iguales  $v_{nn}$ . Las señales  $s_1$  y  $s_2$  también tienen media nula y están incorrelacionadas entre sí, siendo sus varianzas  $v_{11}$  y  $v_{22}$ , respectivamente.

a) Determinése el estimador lineal de error cuadrático medio mínimo de

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, \text{ indicándolo como } \hat{\mathbf{s}}(x) = \begin{bmatrix} \hat{s}_1(\mathbf{x}) \\ \hat{s}_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

b) Discútase el comportamiento del estimador anterior en situaciones de ruido débil ( $v_{nn} \ll v_{11}, v_{22}$ ) e intenso ( $v_{nn} \gg v_{11}, v_{22}$ ).

**6.Q2** La matriz de covarianzas de las v.v.aa. de medias nulas  $s$  y  $x$  tiene la forma

$$\begin{bmatrix} v_{ss} & v_{sx} \\ v_{xs} & v_{xx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & c \\ c & v_2 \end{bmatrix}$$

a) Determinése el estimador lineal de mínimo error cuadrático medio,  $\hat{s}_{lms}(x)$ , y el valor cuadrático medio del error  $\hat{e}_{lms}(x) = s - \hat{s}_{lms}(x)$ .

b) No se tiene acceso a la v.a.  $x$ , pero sí a  $y = x + n$ , siendo  $n$  un ruido aleatorio incorrelacionado con  $s$  y  $x$ , de media 0 y varianza  $v_2$ .

Determinése  $\hat{s}_{lms}(y)$  y el valor cuadrático medio del error  $\hat{e}_{lms}(y) = s - \hat{s}_{lms}(y)$ .

c) No se tiene acceso directo a  $x$ , pero sí a su versión amplificada  $z = 2x$ .

Determinése  $\hat{s}_{lms}(z)$  y el valor cuadrático medio del error  $\hat{e}_{lms}(z) = s - \hat{s}_{lms}(z)$ .

d) Explíquese la diferencia entre los resultados de los apartados b) y c).

**6.Q3** El vector aleatorio  $\mathbf{z} = [s \ x_1 \ x_2]^T$  tiene vector de medias

$$\mathbf{m}_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y matriz de correlaciones

$$\mathbf{R}_{\mathbf{zz}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinése el estimador lineal de error cuadrático medio mínimo de  $s$  a la vista de  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$ ,  $\hat{s}_{lms}(\mathbf{x})$ .

**6.Q4** La variable aleatoria  $z = [s \ x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  tiene media nula y matriz de covarianzas

$$\mathbf{V}_{zz} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se desea construir estimadores lineales de  $s$  a partir de las demás componentes, con error cuadrático medio mínimo.

- Por motivos prácticos, sólo se puede hacer uso de una de las variables observadas. ¿Cuál ha de seleccionarse y por qué?
- ¿Cuál es la expresión del estimador  $\hat{s}_{lms}(x_i)$  para la situación descrita en a)?
- Calcúlese el error cuadrático medio que proporciona el estimador que se acaba de calcular.
- La situación permite utilizar dos de las tres variables observadas. ¿Cuáles han de seleccionarse, y por qué?
- ¿Cuál es la expresión del estimador  $\hat{s}_{lms}(x_i, x_j)$  para esta segunda situación?
- Calcúlese el error cuadrático medio que se obtiene al aplicar este segundo estimador. Coméntese el resultado.

**6.Q5** Las vvaa  $s, \{x_i\}_{i=1}^3$ , tienen medias nulas. La varianza de  $s$  es  $v_{ss} = 2$ , las covarianzas  $v_{sx_i}$  son todas unitarias, y la matriz de covarianzas de las  $\{x_i\}$  vale

$$V_{xx} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Determinése el estimador lineal de error cuadrático medio mínimo de  $s$  a la vista de las  $\{x_i\}$ ,  $\hat{s}_{lms}(x_1, x_2, x_3)$ , y calcúlese el valor de su error cuadrático medio.
- Si no se tiene acceso a  $x_2$  y  $x_3$  por separado, sino a la combinación lineal  $x'_2 = x_2 - x_3$ , ¿como será el estimador lineal de error cuadrático medio mínimo de  $s$  dados  $x_1$  y  $x'_2$ ,  $\hat{s}_{lms}(x_1, x'_2)$ ? Calcúlese el valor de dicho error cuadrático medio.

#### Nota

Recuérdese que la inversa de una matriz  $A$  es

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C_A^T$$

donde  $C_A$  es la matriz cofactor de  $A$ , con elementos

$$C_{A_{ij}} = (-1)^{i+j} \det M_{A_{ij}}$$

siendo  $M_{A_{ij}}$  la matriz resultante de eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$  de  $A$ .

**6.Q6** Se dispone de la siguiente tabla de valores observados de la variable  $s$  en función de la variable determinista  $x$ :

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$x^{(k)}$	-2	-1	0	1	2
$s^{(k)}$	1.8	0.4	0.2	0.6	2.1

- Un analista admite para  $s$  un modelo de regresión lineal. Determínese el estimador resultante,  $\hat{s}(x) = \hat{w}_0 + \hat{w}_1 x$ , y tabúlense los errores para los valores observados de  $x$ ,  $\hat{e}(x^{(k)}) = s^{(k)} - \hat{s}(x^{(k)})$ .
- Visualizando las observaciones en el plano  $x, s$ , un segundo analista propone para  $s$  el modelo de tipo parabólico  $s_2(x) = w'_0 + w'_1 x^2 + n'$ . Determínese el correspondiente estimador  $\hat{s}_2(x) = \hat{w}'_0 + \hat{w}'_1 x^2$ . Tabúlense los errores  $\hat{e}_2(x^{(k)}) = s^{(k)} - \hat{s}_2(x^{(k)})$  y compárense con los obtenidos en el apartado anterior.

**6.Q7** Las variables  $x_1, x_2$ , tienen media y varianzas iguales,  $m_x$  y  $v_{xx}$ . Se desea utilizarlas para estimar linealmente con error cuadrático medio mínimo (lms) la variable  $s$ , que tiene media nula. La covarianza de cualquiera de las  $x_i$  con  $s$  es  $v_{xs}$ .

Se dispone de dos sistemas para implementar estimadores lms. El primero puede registrar una sola variable, pero libre de ruido, y calcula  $\hat{s}_{lms}(x_i)$ . El segundo es capaz de registrar las dos, pero introduciendo sobre ellas ruidos aditivos  $n_1, n_2$ , de medias nulas, varianzas iguales  $v_{nn}$ , e incorrelacionados entre sí y con todas las demás variables; calculando  $\tilde{s}_{lms}(y_1, y_2) = \tilde{s}_{lms}(x_1 + n_1, x_2 + n_2)$ .

- Establézcanse las expresiones de  $\hat{s}_{lms}(x_i)$  y  $\tilde{s}_{lms}(y_1, y_2)$ .
- Indíquese qué condición determina cuál de ambas opciones es mejor.

**6.Q8** Las variables  $s, x_1, x_2, x_3$ , tienen medias nulas y covarianzas dadas por

$$v_{ss} = 4$$

$$\underline{v}_{xs}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$v_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Se construye  $\hat{s}_{lms}(x_1) = w_0 + w_1 x_1$ , y resulta posible añadirle un término lineal más sin alterar  $w_0$  y  $w_1$ , dando lugar al estimador lineal subóptimo  $\hat{s}(x_1, x_i) = w_0 + w_1 x_1 + w_i x_i$ ,  $i = 2$  ó  $3$ . Indíquese si ha de preferirse para ello la variable  $x_2$  o la  $x_3$ , y determínese la expresión del correspondiente  $\hat{s}(x_1, x_i)$  y el error cuadrático medio de la estimación.
- Se ha de elegir una de las variables  $x_2, x_3$  para diseñar  $\hat{s}_{lms}(x_1, x_i)$ ,  $i = 2$  ó  $3$ . Selecciónese la variable e indíquese la expresión del estimador resultante. Calcúlese el error cuadrático medio correspondiente.



**6.E1** Sean  $s, x_1$  y  $x_2$  tres variables aleatorias de medias nulas tales que:

- la matriz de covarianzas de  $x_1$  y  $x_2$  es:

$$\mathbf{V}_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

- el vector de covarianzas cruzadas de  $s$  con  $x$  tiene como expresión:

$$\mathbf{v}_{sx} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- a) Calcúlense los coeficientes  $w_1$  y  $w_2$  del estimador

$$\hat{s}_{lms} = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

- b) Determinése el valor cuadrático medio del error de estimación.  
 c) Discútase el papel de la variable  $x_2$ , que, según se ve, está incorrelacionada con la variable  $s$  a estimar.

**6.E2** Se desea estimar la variable aleatoria  $s$  mediante una combinación lineal de las  $x_1, x_2, x_3$ , de modo que se minimice el error cuadrático medio. Todas las variables tienen media nula y se sabe que:

$$\begin{aligned} v_{x_i x_i} &= 1, & \forall i \\ v_{x_1 x_2} &= \rho \\ v_{x_1 x_3} &= 0 \\ v_{x_2 x_3} &= 0 \\ v_{s x_1} &= 1 \\ v_{s x_2} &= 1/2 \\ v_{s x_3} &= 1 \end{aligned}$$

( $v_{ss}$  es suficientemente grande para permitir el margen de variación que realmente tenga  $\rho$ ).

- a) Calcúlense los coeficientes del estimador lineal buscado.  
 b) Determinése el error cuadrático medio de la estimación  
 c) ¿Cuánto aumenta el error cuadrático medio si se rediseña el estimador sin hacer uso de  $x_1$ ? Probar que la variación es, efectivamente, un aumento para cualquier valor posible de  $\rho$ .  
 d) Si  $0 < |\rho| < 1/2$ , ¿cuáles son los valores de  $\rho$  para los que el aumento de c) es máximo y mínimo?.

**6.E3** Se presentan en la tabla los valores observados de un índice  $s$  de rendimiento de un proceso químico en función de la medida  $x$  de una de las materias primas utilizadas, realizándose 7 observaciones por medida.

$x$	20	22	24	26
$s$	120	112	139	140
	106	134	121	152
	109	120	122	162
	103	119	121	133
	122	120	123	148
	105	112	135	148
	107	121	126	136

- a) Determinése la recta de regresión de  $s$  sobre  $x$ .
- b) Calcúlense los residuos.

**6.E4** Las vvaas  $s$  y  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$  tienen medias nulas y covarianzas dadas por

$$\begin{aligned} v_{ss} &= 1 \\ \mathbf{v}_{sx} &= [1/2 \quad 1/2] \\ \mathbf{V}_{xx} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- i) Determinése el estimador lineal de error cuadrático medio mínimo  $\hat{s}_{lms}(x_1, x_2)$ , y calcúlese el correspondiente error cuadrático medio.
- ii) En la captura de las observaciones  $x_1, x_2$ , se producen interferencias, de modo que las variables disponibles resultan ser
 
$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + a x_2 \\ x'_2 &= b x_1 + x_2 \end{aligned}$$
 con  $|a|, |b| \ll 1$ . El diseñador percibe el problema y obtiene de forma óptima  $\hat{s}_{lms}(x'_1, x'_2)$ . Determinése la expresión de este segundo estimador y calcúlese el correspondiente error cuadrático medio.
- iii) ¿Por qué se produce la relación existente entre los errores cuadráticos medios de ambos estimadores?
- iv) ¿Qué ocurriría si  $a = b = 1$ ?

**6.E5** Se desea estimar la v.a.  $s$  a partir de observaciones de las vv.aa.  $x_1$  y  $x_2$ ; es decir, obtener

$$\hat{s}_{lms}(x_1, x_2) = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2$$

Las medias de dichas variables son

$$E\{s_1\} = 1 \quad E\{x_1\} = 1 \quad E\{x_2\} = 0$$

y sus correlaciones

$$E\{s^2\} = 4 \quad E\{x_1^2\} = 3 \quad E\{x_2^2\} = 2$$

$$E\{sx_1\} = 2 \quad E\{sx_2\} = 0 \quad E\{x_1 x_2\} = 1$$

- a) Calcúlense los coeficientes  $\{w_i\}, i = 0, 1, 2$ , de  $\hat{s}_{lms}(x_1, x_2)$ .
- b) Como se ha visto en a),  $v_{sx_2} = 0$  ¿Por qué resulta  $w_2 \neq 0$ ?
- c) Determinése el valor cuadrático medio del error de estimación cometido al usar  $\hat{s}_{lms}(x_1, x_2)$ .
- d) ¿Cómo y cuánto varía el error cuadrático medio si se utiliza  $\hat{s}'_{lms}(x_1) = w'_0 + w'_1 x_1$  en vez de  $\hat{s}_{lms}(x_1, x_2)$ ?

**6.E6** Un diseñador observa una combinación lineal de una señal  $s$  de media cero y varianza  $v_{ss}$  con un ruido  $n$  de media cero y varianza  $v_{nn}$ , incorrelacionado con la señal. El diseñador cree que la situación corresponde a:

$$x = s + n$$

pero en realidad la observación es

$$x_r = h s + n$$

siendo  $h$  una constante.

- i) Indíquese la expresión del estimador lineal mmse que propondrá el diseñador,  $\hat{s}(x_r)$ , y calcúlese el valor cuadrático medio del error asociado,  $e(x_r) = s - \hat{s}(x_r)$ .
- ii) Determinése la expresión del estimador que debería emplearse si la  $h$  fuera conocida,  $\hat{s}_h(x_r)$ , y calcúlese el valor cuadrático medio del correspondiente error,  $e_h(x_r) = s - \hat{s}_h(x_r)$ .
- iii) Si  $h > 1$ , el error  $e(x_r)$  calculado en el apartado i) podría tener un valor cuadrático medio inferior al del error esperado por el diseñador,  $e(x)$ . ¿Bajo qué condiciones ocurrirá esto?

**6.E7** El vector aleatorio  $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$  tiene vector de medias

$$E\{\mathbf{z}\} = \mathbf{m}_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y matriz de correlaciones

$$E\{\mathbf{z}\mathbf{z}^T\} = \mathbf{R}_{zz} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- i) Determinése el estimador lineal de error cuadrático medio mínimo de  $z_1$  dado  $\mathbf{z}_r = [z_2 \ z_3]^T$ ,  $\hat{z}_{1lms}(z_2, z_3)$ , y calcúlese el correspondiente error cuadrático medio.
- ii) La v.a.  $z_2$  se ve interferida por la  $z_4$ , de modo que se observa

$$z'_2 = z_2 + z_4$$

La v.a.  $z_4$  tiene media nula y varianza 1, y está incorrelacionada con  $z_2$  y  $z_3$ , pero su covarianza con  $z_1$  es  $v_{z_1 z_4} = 1$ . Determinése el estimador lineal de error cuadrático medio mínimo de  $z_1$  dado  $\mathbf{z}'_r = [z'_2 \ z_3]^T$ ,  $\hat{z}_{1lms}(z'_2, z_3)$ , y calcúlese el correspondiente error cuadrático medio.

- iii) Si se observase  $z_4$  separadamente de  $z_2$  y  $z_3$  ¿cuál sería el estimador lineal de error cuadrático medio mínimo de  $z_1$  dado  $\mathbf{z}_e = [z_2 \ z_3 \ z_4]^T$ ,  $\hat{z}_{1lms}(z_2, z_3, z_4)$ , y cuánto valdría ese error cuadrático medio? Compárense los resultados con los del apartado anterior.

**6.E8** Las variables aleatorias  $s$  y  $x$  obedecen a la ddp conjunta

$$p(s, x) = \begin{cases} 3[1 - (s + |x|)], & s > 0, s + |x| < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Establézcase el estimador de error cuadrático medio mínimo de  $s$  dado  $x$ ,  $\hat{s}_{ms}(x)$ .
- b) Determinése el estimador máximo a posteriori de  $s$  dado  $x$ ,  $\hat{s}_{map}(x)$ .
- c) Exprésese el estimador de error absoluto medio mínimo de  $s$  dado  $x$ ,  $\hat{s}_{abs}(x)$ .
- d) Indíquese el estimador lineal de error cuadrático medio mínimo de  $s$  dado  $x$ ,  $\hat{s}_{lms}(x)$ .

**6.E9** Considérense las vv.aa.  $s, x_1, x_2$ . La media de  $s$  es  $m_s$ ;  $x_1, x_2$  tienen medias nulas. La matriz de covarianzas de dichas variables tiene la forma

$$\begin{bmatrix} V_{ss} & V_{sx_1} & V_{sx_2} \\ V_{x_1s} & V_{x_1x_1} & V_{x_1x_2} \\ V_{x_2s} & V_{x_2x_1} & V_{x_2x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

$$(|a|, |b|, |c| < 1).$$

Un analista conoce los valores  $a, b$ , pero cree que  $c = 0$ , y, de acuerdo con ello, propone un estimador  $\hat{s}'_{lms}(x_1, x_2)$  minimizando el error cuadrático medio.

- i) Establézcase la expresión de  $\hat{s}'_{lms}(x_1, x_2)$  y compárese con la del estimador calculado correctamente,  $\hat{s}_{lms}(x_1, x_2)$ .
- ii) Determinénse los errores cuadráticos medios en la aplicación de ambos estimadores,  $E\{\hat{e}^2(x_1, x_2)\} = E\{(s - \hat{s}'_{lms}(x_1, x_2))^2\}$  y  $E\{\hat{e}^2(x_1, x_2)\} = E\{(s - \hat{s}_{lms}(x_1, x_2))^2\}$ . Compárense dichos errores.

**6.E10** Se dispone de los siguientes valores registrados de las magnitudes  $s$  y  $x$ :

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$x^{(k)}$	0	1	2	3
$s^{(k)}$	0.03	1.12	2.25	3.06

- i) Un analista cree que  $x$  es una variable determinista y decide ligar  $s$  con  $x$  a través de una regresión lineal convencional.

Establézcase la recta de regresión  $\hat{s}_{reg} = w_0 + w_1x$ , y estílese el error cuadrático medio asociado a ella como la varianza muestral de la innovación.

- ii) En realidad,  $s$  es una v.a. generada según

$$s = x + n$$

siendo  $x, n$ , vv.aa. exponenciales unilaterales independientes entre sí con ddps

$$p_X(x) = \exp(-x)u(x)$$

$$p_N(n) = 5 \exp(-5n)u(n)$$

Determinénse  $\hat{s}_{ms}(x)$  y calcúlese  $E\{(s - \hat{s}_{ms}(x))^2\}$ .

- ii) Calcúlese  $E\{(s - \hat{s}_{reg}(x))^2\}$ , e indíquense las causas de las diferencias de este valor y los errores cuadráticos anteriores.
- iii) Un segundo analista no conoce la media de  $n$ , pero sí el modelo real ( $s = x + n$ ) y que  $n$  es exponencial unilateral. El analista decide aplicar el estimador generalizado

$$\hat{s}_{gms}(x) = x + \hat{m}_{ml}$$

siendo  $\hat{m}_{ml}$  la estimación ML de la media de  $n$  a partir de las observaciones.

Determinénse  $\hat{s}_{gms}(x)$  y calcúlese  $E\{(s - \hat{s}_{gms}(x))^2\}$ . Compárase el valor de este MSE con el asociado al uso de  $\hat{s}_{reg}(x)$ .

**6.A1** Las vv.aa  $s$ ,  $x$  tienen una distribución conjunta

$$G\left(\mathbf{0}, \begin{bmatrix} v & \rho v \\ \rho v & v \end{bmatrix}\right).$$

Un analista desea diseñar un estimador lineal de  $s$  a la vista de  $x$  que proporcione mínimo error cuadrático medio; pero no conoce la distribución conjunta. Recurre a sustituir en la formulación teórica correspondiente los estadísticos reales  $(E\{s\}, E\{x\}, v_{xx}, v_{sx}, v_{ss})$  por sus estimaciones muestrales  $(\bar{s}, \bar{x}, \bar{v}_{xx}, \bar{v}_{sx}, \bar{v}_{ss})$  obtenidas a partir de un conjunto de datos etiquetados. En particular, el analista obtiene  $\bar{x} = C$ .

- a) Establézcase la expresión del estimador lineal teórico que proporciona el error cuadrático medio mínimo,  $\hat{s}_{lms}(x)$ , y determínese el valor de dicho error cuadrático medio mínimo,  $E\{e_{lms}^2(x)\}$
- b) Determínese la expresión del estimador lineal diseñado por el analista,  $\hat{s}_a(x)$ , y calcúlese en cuánto excede el correspondiente error cuadrático medio,  $E\{e_a^2(x)\}$ , del anterior  $E\{e_{lms}^2(x)\}$ .
- c) Tras realizar el diseño de  $\hat{s}_a(x)$ , el analista percibe, por consideraciones físicas, que  $s$  y  $x$  tienen medias nulas, y diseña un nuevo estimador,  $\hat{s}'_a(x)$ , calculando las varianzas muestrales teniéndolo en cuenta. ¿En qué difiere  $\hat{s}'_a(x)$  de  $\hat{s}_a(x)$ ?
- d) Calcúlese la ventaja que proporciona  $\hat{s}'_a(x)$  respecto a  $\hat{s}_a(x)$  en cuanto a reducción de error cuadrático medio.
- e) ¿Podría el analista percibir la ventaja que se ha calculado en el apartado d) si sustituyese en las expresiones de los errores cuadráticos medios los estadísticos reales por sus valores estimados muestralmente?

## Tema 7: “Métodos analíticos, semianalíticos y máquina”

**7.Q1** En un problema de decisión binaria,  $H_1$  es una hipótesis compuesta:

$$p(x|\theta, H_1) = \theta \exp(-\theta x)u(x)$$

siendo

$$p(\theta|H_1) = \beta\delta(\theta - 1) + (1 - \beta)\delta(\theta - 2), \quad 0 < \beta \leq 1$$

mientras que

$$p(x|H_0) = 2 \exp(-2x)u(x)$$

a) Verifíquese que el LRT puede reducirse a la forma

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\geq}} U$$

estableciendo el valor de  $U$  en función del umbral  $\eta$  del LRT y de  $\beta$ . ¿Cómo debe ser  $U$  para que el problema tenga sentido?

b) Elíjase el valor de  $U$  preciso para que  $P_{FA}$  sea  $\alpha$ .

c) Para el valor de  $U$  fijado en b), calcúlese  $P_D$ .

**7.Q2** Un problema de decisión binaria de hipótesis compuestas y equiprobables se caracteriza por

$$p(x|\theta_i, H_i) = G(x|\theta_i, v)$$

$$p(\theta_i|H_i) = G(\theta_i|0, v_i)$$

$i = 0, 1$ ;  $v_1 > v_0$ . Diseñese el decisor MAP (ML).

(Sugerencia: téngase en cuenta que una va siempre se puede expresar como su media más una va de idéntica densidad de probabilidad pero con media 0).

**7.Q3** Las verosimilitudes de un problema compuesto de decisión binaria son:

$$p(x|a, H_1) = a \exp(-ax)u(x), \quad a > 0$$

$$p(x|H_0) = \exp(-x)u(x)$$

siendo  $a$  un parámetro determinista.

Como se sabe, existe un UMPT si es posible definir el decisor salvo por el valor del umbral (que se puede establecer según las prestaciones deseadas).

a) ¿Existe un UMPT?

b) Si  $0 < a < 1$ , ¿existe un UMPT?

c) En el caso de que exista un UMPT, complétese su expresión para que  $P_{FA} = \alpha$ .

**7.Q4** Se han de clasificar observaciones  $x$  correspondientes a una de las hipótesis

$$H_1 : p(x|H_1) = G(x|m, v)$$

$$H_0 : p(x|H_0) = G(x|-m, v)$$

siguiendo el criterio MAP.

- i) Establézcase la expresión del clasificador.
- ii) En la práctica,  $m$ ,  $v$  y las probabilidades a priori son desconocidas, y se opta por aplicar un GLRT estimando  $m$  y  $v$  mediante máxima verosimilitud a partir de muestras tomadas independientemente,  $K_0$  bajo la hipótesis  $H_0$ ,  $\{x^{(0,k_0)}\}_{k_0=1}^{K_0}$ , y  $K_1$  bajo  $H_1$ ,  $\{x^{(1,k_1)}\}_{k_1=1}^{K_1}$ ; mientras que  $Pr(H_0)$  y  $Pr(H_1)$  se estiman mediante frecuencias relativas (que, al fin y al cabo, son estimaciones ML).

Calcúlense los correspondientes estimadores,  $\hat{m}_{ml}$ ,  $\hat{v}_{ml}$ ,  $\hat{P}r_{ml}(H_0)$  y  $\hat{P}r_{ml}(H_1)$ ; y exprese-se en función de las muestras el clasificador GLRT.

**7.E1** En un problema de decisión binaria planteado bajo el criterio ML, las verosimilitudes de las observaciones son:

$$p(x|H_0) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x|H_1) = \begin{cases} 1/a, & 0 < x < a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo  $a \geq 1$  un parámetro determinista.

- a) Diseñese el decisor óptimo supuesto que es conocido el valor de  $a$ .
- b) Supóngase ahora que el valor de  $a$  es desconocido. Se opta por aplicar una estrategia minimax, fijando para la toma de decisiones un umbral  $x_m$  elegido para minimizar el máximo coste medio (correspondiente al criterio ML); es decir,

$$x_m = \arg \left\{ \min_{x_u} \left\{ \max_a \bar{C}_{ML}(x_u, a) \right\} \right\}$$

siendo  $x_u$  un umbral de decisión genérico

$$\begin{matrix} D_1 \\ x \geq x_u \\ D_0 \end{matrix}$$

Determinese  $x_m$ .

- c) Calcúlese el incremento del coste medio (ML) que se produce al aplicar la estrategia minimax respecto al que se tendría si  $a$  fuese conocida.

**7.E2** Como se sabe, en el caso de que las observaciones de un problema de decisión se comporten dependiendo de los valores de parámetros deterministas desconocidos se aplican los test de cociente de verosimilitudes generalizados (GLRT), estimando primero los parámetros y aplicando después el LRT que corresponda a los parámetros estimados.

Sean las verosimilitudes de la variable observada

$$p(x|H_0) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x|H_1) = \frac{c}{2} \exp(-c|x-m|)$$

e iguales las probabilidades a priori.

Se realizan cinco observaciones de la variable  $x$  bajo cada hipótesis, que toma los valores

- bajo  $H_0$  :  $-4, -2, 1, 2$  y  $3$

- bajo  $H_1$  :  $-3, -1, 0, 2$  y  $4$

- a) Diseñese el GLRT que corresponde a estimar los parámetros desconocidos aplicando el criterio ML y cuyo criterio de diseño es minimizar la probabilidad de error.
- b) Si los valores reales de los parámetros son  $a = -4$ ,  $b = 4$ ,  $m = 0$  y  $c = 2/5$ , calcúlense los valores de  $P_{FA}$  y  $P_M$  que se obtendrán en la práctica al aplicar el diseño del apartado anterior.

**7.E3** En un problema de decisión binaria unidimensional se sabe que la v.a. observada  $x$  bajo la hipótesis  $H_0$  responde a una ddp  $p(x|H_0)$  de media 0, simétrica y decreciente en torno a la media, con varianza  $v$ ; mientras que bajo la hipótesis  $H_1$  pasa a tomar media  $m_1$ , conservando su forma (es decir,  $p(x|H_1) = p(x - m_1|H_0)$ ). Las hipótesis son equiprobables.

- a) Diseñese el decisor ML.
- b) En la práctica,  $m_1$  es desconocida. Un diseñador opta por estimarla mediante la media muestral  $\bar{x}_{(1)}$  de  $K$  observaciones de  $x$  bajo la hipótesis  $H_1$ ,  $\{x_{(1)}^{(k)}\}_{k=1}^K$ , tomadas independientemente; estableciendo a partir de ella un estimador  $U$  del umbral teórico, y tomando la decisión mediante

$$x \underset{D_0}{\overset{D_1}{\gtrless}} U, \quad \text{si } U > 0$$

$$x \underset{D_1}{\overset{D_0}{\gtrless}} U, \quad \text{si } U < 0$$

Justifíquese esta forma de decidir, y determínese la expresión de  $U$ .

- c) Obviamente,  $U$  es una v.a. Calcúlense su media y su varianza en función de las de las muestras,  $m_1$  y  $v$ .
- d) Se produce falsa alarma:
  - si  $U > 0$ , cuando la v.a.  $x$  bajo la hipótesis  $H_0$  supera el valor de la v.a.  $U$ ;
  - si  $U < 0$ , cuando la v.a.  $x$  bajo la hipótesis  $H_0$  es inferior al valor de  $U$ .

Explicítese la expresión que permite calcular la media de  $P_{FA}$  (es decir, el valor de  $P_{FA}$  cuando se repite indefinidamente el proceso de diseño).

- e) Cuando  $K \gg 1$  y admitiendo que  $p(x|H_0)$  obedece al Teorema Central del Límite,  $U$  puede considerarse gaussiana. Suponiéndolo y también que  $m_1 = 1$  y

$$p(x|H_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$



(que no satisface la condición de decrecimiento en torno a la media; pero el diseñador no lo sabe), calcúlese la  $P_{FA}$  del diseño empírico (el que maneja  $U$ ).

- f) ¿A qué tiende la media de la probabilidad de error del diseño empírico del apartado anterior cuando  $K \rightarrow \infty$ , admitiendo que, por simetría,  $P_M \rightarrow P_{FA}$ ? Compárese con la probabilidad de error del diseño ML supuesto  $m_1$  conocida,  $P_e(T)$ .

Nota: Empléese la función de error complementario de Van Trees:

$$\operatorname{erfc}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} \exp(-t^2/2) dt$$

**7.E4** El problema de decisión binaria bajo criterio MAP definido por

$$p(x|H_0) = \begin{cases} 1/2, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$p(x|H_1) = \begin{cases} 1/2, & |x - m_1| < 1 \\ 0, & |x - m_1| > 1, \quad 0 < m_1 < 2 \end{cases}$$

tiene como solución, obviamente:

$$\begin{aligned} x < m_1/2 &\Rightarrow D_0 \\ x > m_1/2 &\Rightarrow D_1 \end{aligned}$$

El valor de  $m_1$  no se conoce, por lo que se decide estimar este parámetro mediante una media muestral de  $K$  muestras independientes, de  $x$  bajo la hipótesis  $H_1$ ; y a continuación utilizar la mitad de esa media muestral para establecer el umbral  $U$ .

- Suponiendo que  $K$  es suficientemente elevado como para considerar que la ddp de  $U$  es gaussiana, determínese su media y su varianza.
- Calcúlense las medias de los valores de  $P_{FA}$  y  $P_M$  que se obtienen con este procedimiento de diseño.
- Discútase qué ocurre cuando  $K \rightarrow \infty$ .

**7.E5** Un problema compuesto de decisión binaria queda descrito por:

$$\begin{aligned} H_0 : x &= n \\ H_1 : x &= m + n \end{aligned}$$

siendo  $m$  un parámetro determinista desconocido y  $n$  un ruido de media 0 y varianza 1 cuya distribución puede ser Laplace o Gauss.

Se dispone de los siguientes valores (ordenados) de  $x$  bajo la hipótesis  $H_1$  obtenidos mediante tomas independientes,  $\{x_1^{(k)}\}$ :

$$1.20, 1.04, 0.81, 0.72, 0.50, 0.36, -0.11, -0.38, -0.54$$

La política de costes viene dada por  $C_{01} = C_{10} = 3$ ,  $C_{10} = C_{11} = 1$ , y las hipótesis son equiprobables.

- a) Un diseñador supone en principio que  $n$  es Gauss, y diseña un GLRT estimando  $m$  por máxima verosimilitud,  $\hat{m}_{mlg}$ . Calcúlese dicho valor estimado y establézcase el correspondiente decisor bayesiano.
- b) Posteriormente, el diseñador percibe que las desviaciones de los valores observados respecto a  $\hat{m}_{mlg}$  ( $\{|x_1^{(k)} - \hat{m}_{mlg}|\}$ ) son excesivamente altas para una distribución gaussiana de varianza unitaria, y procede a elegir entre las opciones de  $n$  Gauss y  $n$  Laplace aplicando un GLRT estimando  $m$  por máxima verosimilitud bajo cada opción: el ya calculado  $\hat{m}_{mlg}$  para el gaussiano y  $\hat{m}_{mll}$  para el laplaciano; estableciendo el umbral según el criterio ML.
  - b1) Determínese qué modelo (Gauss o Laplace) resulta elegido al aplicar el GLRT.
  - b2) Empleando el modelo elegido en b1), obténgase el correspondiente decisor para el problema compuesto original.
- c) En realidad  $m = 0,6$  y  $n$  es Laplace. Calcúlese el coste medio que ahorra la acción del diseñador descrita en b) respecto al uso del diseño inicial indicado en a).

**7.E6** Un diseñador ha de implantar un clasificador binario para muestras unidimensionales  $x$ . El diseñador conoce la verosimilitud

$$p(x|C_1) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

y también que las clases son equiprobables. El diseñador decide aplicar el criterio de mínima probabilidad de error, y, como dispone de un conjunto de muestras (tomadas independientemente unas de otras) correspondientes a la clase  $C_0$

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= 0.06, x^{(2)} = 0.11, x^{(3)} = 0.28, x^{(4)} = 0.31 \\ x^{(5)} &= 0.42, x^{(6)} = 0.60, x^{(7)} = 0.74, x^{(8)} = 0.90, \end{aligned}$$

elige estimar  $p(x|C_0)$  de forma paramétrica, aceptando que se trata de una distribución uniforme entre 0 y  $a$ ; estimando  $a$  por máxima verosimilitud a partir de los datos disponibles; es decir, usando

$$\hat{p}(x|C_0) = \begin{cases} \frac{1}{\hat{a}_{ML}}, & 0 \leq x \leq \hat{a}_{ML} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

- a) Determínese  $\hat{a}_{ML}$ .
- b) Establézcase el clasificador que ha de usar el diseñador en la forma

$$x \underset{C_0}{\overset{C_1}{\geq}} U$$

- c) Estímense las probabilidades de falsa alarma, pérdida y error calculadas a partir del modelo utilizado para diseñar el clasificador;  $P_{FA1}$ ,  $P_{M1}$  y  $P_{E1}$ , respectivamente.

En realidad, es

$$p(x|C_0) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

- d) Determinense las verdaderas  $P_{FA2}$ ,  $P_{M2}$  y  $P_{E2}$  del diseño anterior.
- e) Compárense las prestaciones del clasificador implementado por el diseñador con las óptimas ( $P_{FA}$ ,  $P_M$  y  $P_E$ ).

**7.E7** En un problema de decisión binaria,  $p(x|H_0)$  es  $U[0, 1]$ , y  $H_1$  es una hipótesis compuesta dependiente de uno o varios parámetros deterministas desconocidos. Se dispone de las siguientes observaciones  $\{x_1^{(n)}\}$  de  $x$  bajo  $H_1$  tomadas de forma independiente:

0.16, 0.27, 0.31, 0.76, 1.14, 1.92

Las condiciones para la decisión son las de ML.

- i) Un analista opta por diseñar un GLRT estimando los parámetros de la verosimilitud de  $H_1$  por ML, y supone que dicha verosimilitud es uniforme,  $U[\alpha, \beta]$ . Indíquese el test que obtiene el analista.
- ii) En realidad la verosimilitud de  $H_1$  es Pareto con la forma

$$p(x|d, H_1) = d/x^2, \quad d < x < \infty$$

Indíquese el test que se obtendría mediante el mismo proceso, estimando  $d$  por ML.

- iii) Realmente,  $d = 0.09$ . Calcúlense las prestaciones ( $P_{FA}$ ,  $P_M$ ,  $P_e$ ) que los tests anteriores proporcionarían en la práctica.

**7.E8** Un problema compuesto de decisión binaria responde a las verosimilitudes:

$$p(x|\theta, H_1) = \frac{a}{2} \exp(-a|x - \theta m|)$$

$$p(x|\theta, H_0) = \frac{a}{2} \exp(-a|x|)$$

con  $m > 0$  ( $a > 0$ ), siendo la ddp del parámetro aleatorio  $\theta$

$$p(\theta) = P\delta(\theta - 1) + (1 - P)\delta(\theta)$$

( $0 < P < 1$ ). El criterio a aplicar es el MAP, sabiendo que  $Pr(H_0)/Pr(H_1) = c > 1$ .

- i) Establézcase el correspondiente decisor.
- ii) Calcúlense  $P_{FA}$  y  $P_M$ .

**7.E9** En un problema binario de decisión MAP, las verosimilitudes son

$$p(x|H_0) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$$

$$p(x|H_1) = \frac{1}{2} \exp(-|x - m|)$$

$m > 0$ .

$Pr(H_1) = \theta$  se comporta aleatoriamente según

$$p(\theta) = \begin{cases} 2\theta, & 0 < \theta < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- i) Determínese el decisor que minimiza el coste medio y calcúlese el valor del coste medio mínimo,  $\bar{C}_{opt}$ .
- ii) Un diseñador cree que  $\theta$  es determinista, y procede de acuerdo con la estrategia minimax. Determínese el decisor que propone el diseñador y calcúlese el coste medio  $\bar{C}'$  que supone aplicarlo en la situación descrita en i).

**7.E10** Un problema bidimensional de decisión binaria con hipótesis equiprobables presenta como verosimilitud de la hipótesis nula la gaussiana

$$p(x_1, x_2 | H_0) = \frac{1}{\pi} \exp \left[ -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \right]$$

y como verosimilitud de la hipótesis alternativa la mezcla

$$p(x_1, x_2 | H_1) = \frac{1}{2\pi} \exp \left[ -\frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2] \right] + \frac{1}{2\pi} \exp \left[ -\frac{1}{2}[(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2] \right]$$

- i) Determínese el decisor de mínima probabilidad de error.
- ii) En realidad, los términos de la mezcla anterior corresponden a hipótesis distintas, con verosimilitudes

$$p(x_1, x_2 | H'_1) = \frac{2}{\pi} \exp \left[ -\frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2] \right]$$

$$p(x_1, x_2 | H'_2) = \frac{2}{\pi} \exp \left[ -\frac{1}{2}[(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2] \right]$$

y probabilidades a priori la mitad que las de  $H_0$ .

Determínese el decisor de mínima probabilidad de error, y compárese con el obtenido en el apartado anterior.

Nota:  $\cosh^{-1} e \simeq \pm 1.657$

**7.E11** Un problema compuesto de estimación gaussiana obedece a la ddp condicional

$$p(s, x_1, x_2 | m_1, m_2) = G \left( \begin{bmatrix} s \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

siendo  $m_1, m_2$ , variables conjuntamente gaussianas según la ddp

$$p(m_1, m_2) = G \left( \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

- i) Determínese  $\hat{s}_{ms}(x_1, x_2)$ .
- ii) Un diseñador no modifica los valores de  $v_{x_1, x_2 | m_1, m_2} = 1/2$  para calcular el estimador de error cuadrático medio mínimo. Determínese la expresión del estimador que obtiene,  $\hat{s}'_{ms}(x_1, x_2)$
- iii) Evalúense los errores cuadráticos medios que se producen aplicando  $\hat{s}_{ms}(x_1, x_2)$  y  $\hat{s}'_{ms}(x_1, x_2)$

**7.E12** Se dispone de  $N$  medidas tomadas independientemente  $\{\mathbf{x}^{(n)}\}$  de una v.a.  $\mathbf{x}$   $D$ -dimensional gaussiana de media  $\mathbf{0}$  y dos posibles covarianzas  $\text{cov}(x_d x_{d'} | H_i) = v_{idd'} \delta_{dd'}$ ,  $i = 0, 1$ ,  $1 \leq d, d' \leq D$ .

- i) Establézcase el LRT bajo condiciones ML que decide cuál de las dos hipótesis es cierta.
- ii) Compruébese que los estadísticos  $\{y_{Nd}\}_{d=1}^D$  definidos en la forma  $y_{Nd} = \sum_n x_d^{(n)2}$ ,  $1 \leq d \leq D$ , son suficientes para cualesquiera valores de las covarianzas que se están considerando.
- iii) Suponiendo  $D = 2$ ,  $v_{111} = v_{112} = 2$ ,  $v_{011} = v_{012} = 1$ , determínense las regiones de decisión en el plano  $y_{N1}$ ,  $y_{N2}$ .

**7.E13** Un problema doblemente compuesto de decisión binaria unidimensional está caracterizado por

$$p(x|\theta, H_0) = \theta \exp(-\theta x) u(x)$$

$$p(x|a, H_1) = \begin{cases} 1/(x-a+1)^2, & \text{si } x > a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo  $\theta$  una v.a. con d.d.p.

$$p(\theta) = \exp(-\theta) u(\theta)$$

y  $a$  un parámetro determinista. Las hipótesis son equiprobables.

- i) ¿Existe un UMPT respecto al parámetro  $a$ ? ¿existe un UMPT si  $a > 0$ ?
- ii) Supóngase ahora que  $a > 1$ . Establézcase el decisor minimax respecto al parámetro  $a$  para una política de costes MAP.
- ii) Calcúlense las probabilidades de falsa alarma, pérdida y error para el decisor minimax,  $P_{FA_{mM}}$ ,  $P_{M_{mM}}$  y  $P_{e_{mM}}$ .
- iv) Se dispone de las observaciones de  $x$  bajo la hipótesis  $H_1$ :

$$x^{(1)} = 2.31; \quad x^{(2)} = 3.11; \quad x^{(3)} = 2.96; \quad x^{(4)} = 2.20; \quad x^{(5)} = 2.57$$

tomadas independientemente.

Establézcase el GLRT bajo criterio MAP correspondiente a la estimación ML del parámetro  $a$ .

## Tema 8: “Estimación de densidades de probabilidad”

**8.D1** Demuéstrese por inducción que, si  $f(\cdot)$  es cóncava (queda por debajo de sus cuerdas)

$$\sum_{l=1}^L \rho_l f(x_l) \geq f\left(\sum_{l=1}^L \rho_l x_l\right)$$

siendo  $\{\rho_l\}$  los coeficientes de combinación convexa:  $0 \leq \rho_l \leq 1$ ,  $\sum_{l=1}^L \rho_l = 1$ . (Para ello, primero tendrá que verificarse para  $L = 2$ , y después probarse que, si se cumple para un cierto número natural, también debe cumplirse para el siguiente).

A partir de ello, demuéstrese que la mezcla

$$p(x) = \sum_{l=1}^L \rho_l p_l(x)$$

tiene una varianza  $v$  mayor que la combinación convexa  $\sum_{l=1}^L \rho_l v_l$  de las varianzas de sus componentes,  $v_l = \int (x - m_l)^2 \rho_l(x) dx$ .

$$(m_l = \int x \rho_l(x) dx)$$

**8.D2** Establézcase la expresión general de un clasificador K-NN standard  $M$ -ario con política de coste  $\{C_{cm}\}$  ( $C_{cm}$ : coste de elegir  $c$  cuando es cierto  $m$ ),  $1 \leq m, c \leq M$ , probabilidades a priori  $\Pr(H_m)$  y números de ejemplos  $\{K_m\}$ .

Particularícese dicho clasificador para la situación MAP, admitiendo que  $\Pr(H_m)$  puede reemplazarse por  $K_m/K$ . ¿Qué ocurre si  $M$  es un valor elevado?

**8.Q1** Un problema unidimensional binario de hipótesis equiprobables presenta las siguientes verosimilitudes:

$$p(x|H_0) = \begin{cases} 1/4, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p(x|H_1) = \begin{cases} 1/2, & 3 < x < 5 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Establézcase el decisor de mínima probabilidad de error y calcúlense las características  $P_{FA}$ ,  $P_M$  y  $P_e$ .
- b) Un diseñador no conoce dichas verosimilitudes, pero le resulta posible tomar tres valores de  $x$  bajo cada una de las hipótesis, que resultan ser:
  - bajo  $H_0$ :  $x_0^{(1)} = 1.56$ ,  $x_0^{(2)} = 2.64$ ,  $x_0^{(3)} = 3.30$
  - bajo  $H_1$ :  $x_1^{(1)} = 3.16$ ,  $x_1^{(2)} = 4.40$ ,  $x_1^{(3)} = 4.73$

El diseñador aplica un decisor tipo 1-NN para clasificar las muestras posteriores. Indíquense los márgenes de valores de  $x$  para los que el esquema 1-NN llevará a tomar las decisiones  $D_0$  y  $D_1$ .

- c) A partir de lo anterior, calcúlense las características  $P'_{FA}$ ,  $P'_M$  y  $P'_e$  para el decisor 1-NN, y compárense los resultados con los del decisor óptimo calculado en a).

- d) Explíquese lo que ocurriría si el diseñador pudiese tomar un número muy elevado de muestras etiquetadas para utilizarlas con el esquema 1-NN, dando aproximaciones para  $P''_{FA}$ ,  $P''_M$  y  $P''_e$ .

**8.Q2** Para resolver un problema de clasificación binaria tridimensional con hipótesis equiprobables se dispone de 15 muestras etiquetadas de cada clase. La política de costes a aplicar es la que corresponde a minimizar la probabilidad de error de clasificación.

Se desea clasificar la muestra

$$\mathbf{x}^* = [0.8 \ 0.3 \ 0.5]^T$$

cuyos tres vecinos más próximos resultan ser

$$\mathbf{x}^{(1)} = [0.8 \ 0.45 \ 0.7]^T, \text{ clase -1}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = [0.5 \ 0.3 \ 0.5]^T, \text{ clase 1}$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = [0.6 \ 0.5 \ 0.7]^T, \text{ clase 1}$$

- Clasifíquese  $\mathbf{x}^*$  aplicando el clasificador 3NN para la política de costes dada.
- Estímense  $p(\mathbf{x}^*|1)$  y  $p(\mathbf{x}^*|-1)$  vía 1NN utilizando como regiones para la aproximación las esferas de mínimo volumen centradas en  $\mathbf{x}^*$ .
- Utilícense las estimaciones del apartado anterior para clasificar  $\mathbf{x}^*$ .

**8.Q3** Considérese la mezcla

$$p_\lambda(s, x) = [\lambda a^2 \exp[-a(s+x)] + (1-\lambda)b^2 \exp[-b(s+x)]] u(s)u(x)$$

donde  $a, b > 0$ , y, como se sabe, el parámetro de mezcla  $\lambda$  está restringido a  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

- Determinése  $\hat{s}_{ms,\lambda}(x)$ .
- ¿Qué ocurre si  $\lambda \rightarrow 0$ , y si  $\lambda \rightarrow 1$ ?

**8.Q4** Considerése la mezcla

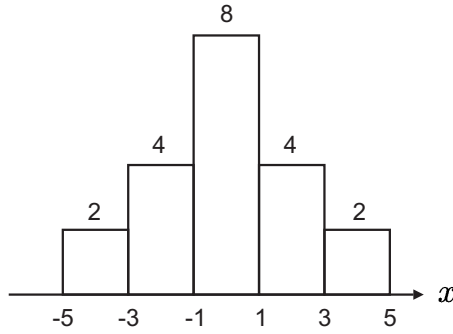
$$p(s, x) = \lambda G\left(\begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I}\right) + (1-\lambda)G\left(\begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{I}\right)$$

$(0 < \lambda < 1)$ .

- Determinése  $\hat{s}_{ms}(x)$ .
- ¿Qué ocurre si  $\lambda \rightarrow 0$ ? ¿Y si  $\lambda \rightarrow 1$ ?

**8.Q5** En un problema unidimensional de decisión binaria se sabe que  $p(x|H_0) = G(x|0, 2/\pi)$ , pero se desconoce la forma de la verosimilitud de  $H_1$ .

Un diseñador opta por emplear un histograma a partir de las muestras bajo  $H_1$  que tiene disponibles, y, por, razones de estabilidad estadística, elige el que se muestra en la figura.



Determinése el decisor ML que se deriva del estimador no paramétrico de  $p(x|H_1)$  correspondiente a dicho histograma.

**8.Q6** Se dispone de las siguientes muestras de una v.a. bidimensional con d.d.p. desconocida:

$$\mathbf{x}^{(1)} = [0.31, 0.77]^T; \quad \mathbf{x}^{(2)} = [-0.55, 0.17]^T; \quad \mathbf{x}^{(3)} = [-0.74, 0.53]^T$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = [-0.90, 0.03]^T; \quad \mathbf{x}^{(5)} = [0.18, -0.61]^T; \quad \mathbf{x}^{(6)} = [0.33, 0.88]^T$$

$$\mathbf{x}^{(7)} = [0.75, -0.34]^T; \quad \mathbf{x}^{(8)} = [0.82, 0.27]^T; \quad \mathbf{x}^{(9)} = [0.66, 0.80]^T$$

Un analista decide estimar dicha d.d.p. mediante el método de Parzen

$$\hat{p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{Kh^2} \sum_k w \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}}{h} \right)$$

y elige para la ventana la forma cuadrada:

$$w \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}}{h} \right) = \begin{cases} 1, & \text{si } \max_i |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^{(k)}| < \frac{h}{2} \quad (i = 1, 2) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

fijando el parámetro libre en el valor  $h = 1/2$ .

- i) Calcúlese  $\hat{p}(0.5, 0.5)$ .
- ii) Obviamente, el resultado del apartado anterior no es fiable. Indíquese por qué razón, y sugiérase una forma de remediarlo.

**8.Q7** Bajo la hipótesis  $H_0$ , la v.a.  $x$  se comporta de acuerdo con la verosimilitud

$$p(x|H_0) = G(x|0, v_0)$$

y bajo la  $H_1$ , sigue una verosimilitud desconocida, que se estima aplicando el método de Parzen con ventanas gaussianas a partir de las muestras  $\{x^{(k)}\}_{k=1}^K$  tomadas independientemente bajo  $H_1$ . Un método complementario de ajuste permite estimar la varianza de dichas ventanas por el valor  $v_1$  ( $> v_0$ ).

Las hipótesis son equiprobables.

- i) Establézcase el decisor MAP generalizado.
- ii) ¿Está predeterminado el número de puntos frontera del test?
- iii) ¿Qué decisión corresponde a  $x = 0$ ?



## Tema 11: “Sobre los costes”

**11.Q1** Demostrar que

$$\frac{\partial C(s, \hat{s})}{\partial \hat{s}} = g(\hat{s}) \operatorname{sgn}(s - \hat{s}), \quad g(\hat{s}) < 0$$

es condición necesaria y suficiente para que el estimador  $\hat{s}_c$  asociado a ella coincida con el de error absoluto  $\hat{s}_{abs} = \operatorname{med}(s|\mathbf{x})$  (el correspondiente a  $C(s, \hat{s}) = |s - \hat{s}|$ ); utilizando en la demostración (por contradicción) de la necesidad una distribución uniforme genérica.

**11.Q2** Considérense las tres ddps conjuntas de  $s, x$ :

$$p_A(s, x) = \begin{cases} 6s, & 0 < x < 1, \ 0 < s < x \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

$$p_B(s, x) = \begin{cases} 3|x|/2, & -1 < x < 1, \ 0 < s < |x| \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

$$p_C(s, x) = \begin{cases} \frac{1}{x(1-x)}, & 0 < x < 1, \ x^2 < s < x \\ 0, & \text{eoc} \end{cases}$$

y las tres funciones de coste:

$$C_1(\hat{s}, s) = (\hat{s} - s)^2$$

$$C_2(\hat{s}, s) = |\hat{s} - s|$$

$$C_3(\hat{s}, s) = 3\hat{s}^4 - 4\hat{s}^3 s$$

- i) ¿Cuáles de los estimadores  $\hat{s}_{C_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) coincidirán para cada uno de los casos A, B, C?
- ii) Determinéense las expresiones de los estimadores.

**11.E1** Las vv.aa.  $s$  y  $x$  tienen una ddp conjunta

$$p(s, x) = \begin{cases} a_f, & 0 < s < f(x) \quad y \quad 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo  $a_f$  una constante.

Se desea estimar  $s$  a la vista de  $x$  mediante estimadores lineales de la forma

$$\hat{s}_i = w_i x, \quad i = 1, 2$$

empleando funciones de coste  $C_i(s, \hat{s}_i)$  que cumplen

$$\frac{\partial C_1(s, \hat{s}_1)}{\partial \hat{s}_1} = -(s - \hat{s}_1)$$

$$\frac{\partial C_2(s, \hat{s}_2)}{\partial \hat{s}_2} = -\hat{s}_2(s - \hat{s}_2)$$

- a) Sea  $f(x) = f_1(x) = x$
- Determinése  $a_{f_1}$ .
  - Determinése los valores de los coeficientes  $\{w_i\}_{i=1,2}$ , que minimizan los costes medios correspondientes a las funciones de coste indicadas.
- b) Sea  $f(x) = f_2(x) = x^2$
- Determinése  $a_{f_2}$ .
  - Determinése los valores de los coeficientes  $\{w_i\}_{i=1,2}$ , que minimizan los costes medios correspondientes a las funciones de coste indicadas.
  - Discútase en qué se diferencia esta situación de la que se produce en el apartado a).

**11.E2** La d.d.p. conjunta de las vv.aa.  $s$  y  $x$  sigue la forma:

$$p(s, x) = \alpha, \quad -1 < x < 1, \quad 0 < s < |x|$$

- Determinése la d.d.p. de la v.a.  $x$ ,  $p_X(x)$ , especificando el valor de  $\alpha$ .
- Establézcanse las expresiones de los estimadores de  $s$  en función de  $x$  que minimizan los costes cuadrático medio ( $\overline{C}_{ms} = E\{(s - \hat{s})^2\}$ ) y absoluto medio ( $\overline{C}_{ab} = E\{|s - \hat{s}|\}$ ),  $\hat{s}_{ms}$  y  $\hat{s}_{ab}$ , respectivamente.
- Supuesto que se restringe la forma de los estimadores a cuadrático en  $x$ , establézcanse las expresiones de los estimadores  $\hat{s}_{qms} = w_1 x^2$  y  $\hat{s}_{qab} = w_2 x^2$  que minimizan los costes antes mencionados (cuadrático y absoluto medios, respectivamente).

**11.E3** Se desea estimar la va  $s$  a la vista de los valores que tiene la va  $x$ . Se cree que la ddp conjunta tiene la forma

$$p_1(s, x) = \begin{cases} 1/[x(1-x)], & 0 < x < 1, \quad x^2 < s < x \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El diseñador 1 emplea el correspondiente estimador de error cuadrático medio mínimo,  $\hat{s}_{1ms}(x)$ . El diseñador 2 alberga dudas sobre la posibilidad de que  $s$  pueda tomar valores mayores que los permitidos por  $\hat{p}_1(s, x)$  y, por precaución, elige el estimador de error absoluto medio mínimo,  $\hat{s}_{1ma}(x)$ .

En realidad, la ddp conjunta de  $s$  y  $x$  es

$$p(s, x) = \begin{cases} 1/(1-x^2), & 0 < x < 1, \quad x^2 < s < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Determinése los estimadores  $\hat{s}_{1ms}(x)$  y  $\hat{s}_{1ma}(x)$ , y compárense sus valores. ¿Sirve de algo la precaución del diseñador 2?
- Establézcase la expresión de  $\hat{s}_{ms}(x)$ , y compruébese que sus valores están por encima de  $\hat{s} = x$ , y, por tanto, de los de  $\hat{s}_{1ms}(x)$  y  $\hat{s}_{1ma}(x)$ .

**11.A3** El efecto de los valores fuera de margen puede ilustrarse mediante el siguiente ejemplo simplificado.

Considérese la observación

$$x = s + r$$

donde la señal  $s$  es  $G\{0, v\}$ , mientras que el ruido  $r$ , independiente de la señal, toma la forma de una interferencia impulsiva

$$p(r) = P\delta(r) + (1 - P)\delta(r - R) \quad (R > 0)$$

siendo  $P \gg 1 - P$ .

- a) Determinése  $\hat{s}_{ms}$ .
- b) Calcúlese el estimador óptimo  $\hat{s}_T$  para la función de coste de Talvar

$$C_T(s - \hat{s}) = \begin{cases} (s - \hat{s})^2, & |s - \hat{s}| < e_0 \\ e_0^2, & |s - \hat{s}| > e_0 \end{cases}$$

con  $2e_0 < R$ ; definiendo los intervalos de valores de  $x$  en que ha de aplicarse cada valor de este estimador.

- c) Compárense los dos estimadores obtenidos.

## Tema 12: “Calidad de estimadores y decisores”

**12.D1** Demuéstrese que los estimadores de error cuadrático medio mínimo son insesgados.

**12.D2** Demuéstrese que, para cualquier estimador  $\hat{s}(\mathbf{x})$ :

$$E\{(\hat{s}(\mathbf{x}) - s)^2\} = E\{(\hat{s}(\mathbf{x}) - \hat{s}_{ms}(\mathbf{x}))^2\} + E\{(\hat{s}_{ms}(\mathbf{x}) - s)^2\}$$

**12.Q1** Las variables aleatorias  $s$  y  $x$  siguen una distribución conjunta

$$G\left\{0, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right\}(s, x) \quad (|\rho| < 1)$$

Determinese si existe el estimador absolutamente eficiente de  $s$  a la vista de  $x$ .

**12.Q2** Se toman de manera independiente  $K$  muestras  $\{x^{(k)}\}$  de la va  $x$  cuya ddp tiene la forma

$$p(x|s) = \frac{1}{2s} \exp\left(-\frac{|x|}{s}\right)$$

siendo  $s > 0$  un parámetro determinista desconocido.

- i) Calcúlese el estimador de máxima verosimilitud  $\hat{s}_{ML}(\{x^{(k)}\})$
- ii) Determinense el sesgo y la varianza del estimador anterior.
- iii) Discútase si el estimador que se está considerando es absolutamente eficiente.

**12.E1** Considérese la observación

$$x = s + r$$

de la señal  $s$  inmersa en ruido  $r$ ; la señal sigue la distribución exponencial unilateral  $E_{\{1,a\}}$

$$p(s) = a \exp(-as)u(s)$$

y el ruido, independiente de  $s$ , la distribución Erlang (Gamma)  $E_{\{2,a\}}$

$$p(r) = a^2 r \exp(-ar)u(r)$$

- a) Determinese  $\hat{s}_{ms}$ .
- b) Calcúlese la media  $E\{\hat{s}_{ms} - s\}$  y la varianza  $\text{Var}\{\hat{s}_{ms} - s\}$  del error, y discútase la influencia de  $a$ .

**12.E2** El parámetro determinista  $s$  es observado a través de

$$x = \sqrt{s}r$$

donde  $r$  es un ruido multiplicativo  $G(0, v)$ . Se realizan  $K$  observaciones independientes de  $x$ ,  $\{x^{(k)}\}$ .

- a) Determinese el estimador de máxima verosimilitud  $\hat{s}_{ml}$ .

- b) Calcúlese el sesgo y la varianza de  $\hat{s}_{ml}$ .

**12.E3** Las vv.aa.  $s$  y  $x$  obedecen a la ddp conjunta

$$p(s, x) = c, \begin{cases} 0 < s < 1 \\ s < x < 2s \end{cases}$$

siendo  $c$  una constante.

- Tras representar el soporte de la ddp, calcúlese el valor de  $c$ .
- Establézcanse las expresiones de las ddp marginales  $p(s)$  y  $p(x)$ .
- Determinése analíticamente la forma del estimador de error cuadrático medio mínimo de  $s$  a la vista de  $x, \hat{s}_{ms}(x)$ . Trácese dicha forma sobre la representación del soporte de  $p(s, x)$ , y discútase si es posible determinarla directamente.
- Calcúlese el error cuadrático medio  $E\{e_{ms}^2(x)\}$  que proporciona la aplicación del estimador anterior.
- Determinése la forma del estimador lineal de error cuadrático medio de  $s$  a la vista de  $x, \hat{s}_{lms}(x)$ . Trácese dicha forma sobre la representación del soporte de  $p(s, x)$ , y coméntese su aspecto.
- Calcúlese el error cuadrático medio  $E\{e_{lms}^2(x)\}$  que proporciona la aplicación del estimador anterior, y compárese con  $E\{e_{ms}^2(x)\}$ .
- ¿Qué ocurre si se percibe (p.ej., visualizando muestras) que hay un comportamiento (estadístico) distinto para  $0 < x < 1$  y  $1 < x < 2$ , y se diseña un estimador lineal óptimo diferente para cada uno de estos intervalos ( $\hat{s}_{A,lms}(x)$  y  $\hat{s}_{B,lms}(x)$ , respectivamente)? Verifíquese analíticamente la solución que se proponga.

**12.E4** Resuélvase el problema de filtrado unidimensional

$$x = s + n$$

es decir, calcúlese  $\hat{s}_{ms}(x)$ , si  $s$  y  $n$  son independientes y

- $p(s) = G(s|m, v_s)$   
 $p(n) = G(n|0, v_n)$ 
  - ¿Qué ocurre si  $m = 0, v_s = v_n = v$ ?
  - Determinése la media y la varianza de  $\hat{e}_{msa}(x) = s - \hat{s}_{ms}(x)$  en el caso particular anterior.
- $p(s) = \prod \left( \frac{s-a/2}{a} \right) = \begin{cases} 1/a, & 0 < s < a \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$   
 $p(n) = \prod \left( \frac{n-b/2}{b} \right) = \begin{cases} 1/b, & 0 < n < b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$   
con  $a \geq b$ 
  - ¿Qué ocurre si  $a = b$ ?
  - Determinése la media y la varianza de  $\hat{e}_{msb}(x)$  en el caso particular anterior.

**12.E5** Las vvaa  $s$  y  $x$  se distribuyen conjuntamente según:

$$p_\alpha(s, x) = \alpha G \left( \begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} \middle| \mathbf{0}, \mathbf{V}_1 \right) + (1 - \alpha) \prod(s) G(x|0, v_{1x})$$

siendo

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} v_{1s} & v_{1sx} \\ v_{1sx} & v_{1x} \end{bmatrix}$$

y

$$\Pi(s) = \begin{cases} 1, & |s| < 1/2 \\ 0, & |s| > 1/2 \end{cases}$$

- ¿Qué margen de valores puede tomar el parámetro  $\alpha$ ?
- Determinense los estimadores de error cuadrático medio mínimo para los casos particulares de  $p_\alpha(s, x)$  correspondientes a  $\alpha = 0$  y a  $\alpha = 1$ ,  $\hat{s}_{ms0}(x)$  y  $\hat{s}_{ms1}(x)$ , respectivamente.
- Determinese  $\hat{s}_{ms\alpha}(x)$   
(Sugerencia: para calcular  $I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} sG\left(\begin{bmatrix} s \\ x \end{bmatrix} \middle| \mathbf{0}, \mathbf{V}_1\right) ds$ , téngase en cuenta que  $I(x)/p(x) = \hat{s}_{ms1}(x)$ ).
- Calcúlense la media y la varianza del error de estimación  $\hat{e}_\alpha(x) = s - \hat{s}_{ms\alpha}(x)$ .
- Determinese el estimador MAP,  $\hat{s}_{map\alpha}(x)$ .
- ¿Es  $\hat{s}_{ms\alpha}(x)$  absolutamente eficiente?  
(Sugerencia: opérese con los elementos de  $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$  en el cálculo de las derivadas presentes en la cota de Cramer-Rao, y sustitúyase al final).

**12.E6** Se observa un parámetro determinista m desconocido a través de dos sensores que lo registran como

$$x_1 = m + n_1$$

$$x_2 = m + n_2$$

siendo  $n_1$  y  $n_2$  ruidos gaussianos de medias nulas y varianzas y covarianzas  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_{12}$  conocidas.

- Establézcase la ddp conjunta  $p(x_1, x_2)$ .
- Determinese el estimador ML de  $m, \hat{m}$ , a la vista de  $K$  observaciones  $\left\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right\}_{k=1}^K$  tomadas independientemente.
- Calcúlense  $E\{\hat{m}|m\}$  y  $\text{Var}\{\hat{m}|m\}$ .
- No se tiene acceso a  $x_1^{(k)}$  y  $x_2^{(k)}$ , sino a las observaciones

$$z_\alpha^{(k)} = \alpha x_1^{(k)} + (1 - \alpha)x_2^{(k)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad k = 1, \dots, K$$

(que son combinaciones convexas de las anteriores).

Determinese la ddp de  $z_\alpha$ .

- Calcúlese el estimador ML de  $m$  a partir de  $\left\{z_\alpha^{(k)}\right\}_{k=1}^K$ ,  $\hat{m}_\alpha$  ¿Qué valor de  $\alpha$  ha de elegirse para obtener el estimador ML de varianza mínima,  $\hat{m}_{\alpha^*}$ , de entre los anteriores?
- ¿Es el estimador obtenido en e) absolutamente eficiente?

**12.E7** Se desea caracterizar estadísticamente el estimador de máxima verosimilitud  $\hat{a}_{ML}$  del parámetro  $a$  de una va  $x$  uniformemente distribuida en el intervalo  $[0, a]$  obtenido a partir de  $K$  observaciones de  $x$ ,  $\{x^{(k)}\}_{k=1}^K$ , tomadas independientemente.

- a) Exprésese  $\hat{a}_{ML}$  en función de los valores  $\{x^{(k)}\}$ .
- b) En el escenario del apartado a), el valor del estimador cambia cada vez que se elige un conjunto de muestras. Por lo tanto, el estimador es una va  $\hat{A}_{ML}$  dependiente de la elección de las  $K$  muestras, y se puede caracterizar como tal va.
- b1) Demuéstrese que la función de distribución de  $\hat{A}_{ML}$  es:

$$P_{\hat{A}_{ML}}(\hat{a}_{ML}) = Pr\left\{\hat{A}_{ML} \leq \hat{a}_{ML}\right\} = \left(\frac{\hat{a}_{ML}}{a}\right)^K$$

- b2) Determinése la correspondiente ddp de  $\hat{A}_{ML}$ ,  $p(\hat{a}_{ML})$ .
- c) Calcúlense la media  $E\{\hat{A}_{ML}|a\}$  y la varianza  $Var\{\hat{A}_{ML}|a\}$  del estimador. Coméntense los resultados.
- d) Para estimar los parámetros de vvaa uniformes es frecuente aplicar el método de los momentos, consistente en estimar su media, varianza, etc., mediante estimadores muestrales y obtener a partir de ello los estimadores de los dichos parámetros. En el caso que se considera, tal procedimiento equivale a emplear:

$$\hat{a}_M = \frac{2}{K} \sum_k x^{(k)}$$

Calcúlense  $E\{\hat{A}_M|a\}$  y  $Var\{\hat{A}_M|a\}$ , y compárense esos valores con los correspondientes al estimador  $\hat{a}_{ML}$ .

**12.E8** Se dispone de dos mecanismos para observar una variable determinista  $s$ , de las que se obtienen observaciones de la forma

$$x_1 = s + n_1$$

$$x_2 = as + n_2$$

siendo  $a > 0$  una constante conocida y  $n_1, n_2$ , ruidos gaussianos independientes entre sí, de medias nulas y varianzas conocidas  $v_1, v_2$ , respectivamente.

Se realizan  $K$  tomas independientes de dichas observaciones, obteniendo el conjunto  $\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\}_{k=1}^K$ .

- i) Determinése el estimador de máxima verosimilitud de  $s$ ,  $\hat{s}_{mla}$ , a partir de las observaciones disponibles.
- ii) Calcúlense  $E\{\hat{s}_{mla}|s\}$  y  $Var\{\hat{s}_{mla}|s\}$ .
- iii) Discútase lo que ocurre con lo establecido en i) y ii) si  $a \rightarrow 0$  y si  $a$  se hace suficientemente grande.
- iv) Compruébese que, sea cual sea el valor de  $a$  ( $0 < a < \infty$ ),  $\hat{s}_{mla}$  siempre es mejor (presenta menor error cuadrático dado  $s$ ) que los estimadores ML de  $s$  observando sólo  $\{x_1^{(k)}\}_{k=1}^K$  o sólo  $\{x_2^{(k)}\}_{k=1}^K$ .

**12.E9** La va  $s$  es suma de tres vvaa independientes:

$$s = x_1 + x_2 + x_3$$

siendo las ddps de los sumandos

$$p_{X_j}(x_j) = a \exp(-ax_j)u(x_j), \quad a > 0 \quad j = 1, 2, 3$$

- i) Determinénse  $\hat{s}_{\text{ms}}(x_1, x_2)$  y  $\hat{s}_{\text{map}}(x_1, x_2)$ .
- ii) Calcúlense las medias y las varianzas de los errores de estimación  $e_{\text{ms}}(x_1, x_2) = s - \hat{s}_{\text{ms}}(x_1, x_2)$  y  $e_{\text{map}}(x_1, x_2) = s - \hat{s}_{\text{map}}(x_1, x_2)$ . Coméntense los resultados.
- iii) Determinénse  $\hat{s}_{\text{ms}}(x_1)$  y  $\hat{s}_{\text{map}}(x_1)$ .
- iv) Calcúlense las medias y las varianzas de los errores de estimación  $e_{\text{ms}}(x_1) = s - \hat{s}_{\text{ms}}(x_1)$  y  $e_{\text{map}}(x_1) = s - \hat{s}_{\text{map}}(x_1)$ . ¿Es razonable que los errores cuadráticos medios sean mayores que los del apartado ii) para el mismo tipo de estimador?

**12.E10** Las vv.aa.  $s, x, y$ , tienen la ddp conjunta

$$p(s, x, y) = 6, \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq s \leq 1 - x - y \end{cases}$$

(nótese que están distribuidas conjuntamente de manera uniforme en el volumen comprendido entre los planos de coordenadas y el plano  $s + x + y = 1$ ; son estadísticamente iguales, y los márgenes para  $x, y, s$  pueden permutarse).

- i) Determinénse los estimadores de error cuadrático medio mínimo de  $s$  a la vista de  $x$  e  $y$ ,  $\hat{s}_1(x, y)$ , y de  $s$  a la vista de  $x$ ,  $\hat{s}_2(x)$ , utilizando sus definiciones.
- ii) Como los estimadores anteriores son esperanzas condicionales, están ligados mediante una operación de promediado. Indíquese cuál, y verifíquese que, a través de ella, se obtiene para  $\hat{s}_2(x)$  el mismo resultado que en el apartado anterior.
- iii) Calcúlese el valor cuadrático medio de los errores de estimación  $e_1 = \hat{s}_1(x, y) - s$  y  $e_2 = \hat{s}_2(x) - s$ .

**12.E11** La va  $s$  es la combinación lineal

$$s = x_1 + 3x_2$$

siendo  $x_1, x_2$ , vvaa independientes entre sí con densidades de probabilidad

$$p(x_1) = \frac{1}{m_1} \exp(-x_1/m_1)u(x_1)$$

$$p(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v} \exp\left(-\frac{(x_2 - m_2)^2}{2v}\right)$$

donde  $m_1 > 0$ ,  $m_2$  y  $v > 0$  son valores conocidos, como también lo es la forma de la combinación lineal.

Existe la posibilidad de tomar valores de una de las componentes de  $s$ ,  $x_1$  o  $x_2$ , para construir estimadores  $\hat{s}(x_k)$ ,  $k = 1, 2$ .

- i) Establézcanse las expresiones de los estimadores de errores cuadrático y absoluto medios mínimos,  $\hat{s}_{\text{ms}}(x_1)$ ,  $\hat{s}_{\text{ms}}(x_2)$ ,  $\hat{s}_{\text{abs}}(x_1)$ ,  $\hat{s}_{\text{abs}}(x_2)$ .



- ii) Se desea seleccionar el estimador de error cuadrático medio mínimo de entre los cuatro anteriores. ¿Cómo se ha de proceder?
- iii) ¿Cómo se ha de seleccionar el estimador de error absoluto medio mínimo?

**12.E12** La v.a.  $z$  con distribución gamma de parámetro de forma  $N/2$  y parámetro de escala  $2v$  tiene como ddp

$$p_N(z) = \frac{1}{(2v)^{N/2} \Gamma(N/2)} z^{N/2-1} \exp(-z/2v) u(z)$$

Esta distribución es también llamada  $\chi^2$  general de  $N$  grados de libertad.

Supóngase que  $N$  es conocido y que se dispone de  $K$  muestras de  $z$ ,  $\{z^{(k)}\}$ , tomadas independientemente.

- i) Determínese  $\hat{v}_{ml}(z^{(k)})$ .
- ii) Calcúlense la media y la varianza de  $\hat{v}_{ml}$ .
- iii) ¿Es  $\hat{v}_{ml}$  absolutamente eficiente?
- iv) Considerando que  $z$  puede formarse mediante la suma de los cuadrados de  $N$  vvaas gaussianas  $\{x^{(k)}\}$  de medias nulas y varianzas iguales  $v$  (idénticamente distribuidas) e independientes entre sí, ¿eran previsibles los resultados de los apartados anteriores?

**12.E13** La ddp conjunta de las vvaas  $s$  y  $x$  es

$$p(s, x) = \begin{cases} \frac{1}{8m^2}, & \{-2m < s, x < 0\} \cup \{0 < s, x < 2m\} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Determínense  $\hat{s}_{ms}(x)$  y calcúlese  $E\{(s - \hat{s}_{ms}(x))^2\}$ .
- b) Un analista visualiza muestras de  $\{s, x\}$ ; y supone que su distribución conjunta es una mezcla de dos componentes gaussianas circulares de varianzas iguales  $v$  y medias simétricas. La información lateral disponible le dice al analista que las medias son  $m\mathbf{1}$  y  $-m\mathbf{1}$ ; y estima  $v$  a partir de las muestras, obteniendo el valor  $\hat{v}$ . Determínese el estimador de error cuadrático medio mínimo  $\hat{s}'_{msg}(x)$  que obtiene el analista a partir de lo anterior, y calcúlese  $E\{(s - \hat{s}'_{msg}(x))^2\}$ .

Nota:  $\frac{d}{dz} \ln \cosh(z) = \tanh(z)$

**12.E14** Las vvaas  $s$ ,  $x$  presentan la ddp conjunta:

$$p(s, x) = \begin{cases} 1/2 & 0 < s, x < 1 \text{ y } 1 < s, x < 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- i) Calcúlense  $\hat{s}_{ms}(x)$  y  $E\{(s - \hat{s}_{ms}(x))^2\}$ .
- ii) Un diseñador desconoce  $p(s, x)$ , pero sabe que su media es  $[1 \ 1]^T$  y dispone de muestras tomadas independientemente. Opta por estimar muestralmente las componentes de la matriz de covarianzas y proponer un estimador lineal,  $\hat{s}'_{lms}(x)$ , a partir de los valores estimados. Dichos valores son  $\hat{v}_{ss}$ ,  $\hat{v}_{xx}$ , y  $\hat{v}_{sx} = \alpha \hat{v}_{xx}$ . Indíquense la expresión de  $\hat{s}'_{lms}(x)$  y el valor de  $E\{(s - \hat{s}'_{lms}(x))^2\}$ .
- iii) El número de muestras de que dispone el diseñador es suficientemente alto como para que los valores estimados se aproximen a sus límites sin diferencias apreciables. Bajo tal circunstancia, determínese la expresión del estimador del apartado ii),  $\hat{s}'_{lms\infty}(x)$ , y  $E\{(s - \hat{s}'_{lms\infty}(x))^2\}$ .

**12.E15** La v.a.  $s$  es la superposición

$$s = 2x_1 + x_2 + c$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son vv.aa. independientes con ddps

$$p_1(x_1) = \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{x_1}{a}\right) = \begin{cases} 1/a, & |x_1| < a/2 \\ 0, & |x_1| > a/2 \end{cases}$$

$$p_2(x_2) = b \exp(-bx_2)u(x_2)$$

y  $b, c > 0$  son constantes conocidas. La v.a.  $x_1$  es observable, pero no  $x_2$ .

- i) Un analista cree que  $x_2$  equivale a un ruido impulsivo, y por ello decide estimar  $s$  mediante  $\hat{s}_{ab}(x_1) = \arg \min_{\hat{s}} E\{|s - \hat{s}| | x_1\}$ . Tras verificar que  $\hat{s}_{ab}(x_1) = \text{med}\{s|x_1\}$ , determínese la expresión analítica de dicho estimador.
- ii) Un segundo analista no confía en que el valor conocido de  $b$  sea correcto, y por ello decide utilizar el estimador de máxima verosimilitud  $\hat{s}_{ml}(x_1)$ . Determínese su expresión analítica.
- iii) Compárense los errores cuadráticos medios de los estimadores propuestos por ambos analistas.

**12.E16** La va  $D$ -dimensional  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_D]^T$  sigue la ddp gaussiana

$$p(\mathbf{x}|v) = G(\mathbf{x}|\mathbf{0}, v\mathbf{I}) = \frac{1}{(2\pi v)^{D/2}} \exp\left(-\frac{1}{2v} \sum_{d=1}^D x_d^2\right)$$

Se dispone de  $K$  observaciones de  $\mathbf{x}$  tomadas independientemente,  $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ .

- i) Determínese  $\hat{v}_{ml}(\{\mathbf{x}^{(k)}\})$ .
- ii) Calcúlense la media y la varianza del estimador anterior.
- iii) ¿Es  $\hat{v}_{ml}$  absolutamente eficiente?
- iv) Si sólo se pueden observar las  $D'$  primeras variables, ¿cómo se modifican las respuestas de los apartados anteriores?

**12.E19** La ddp

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2a^3}(x_1 + x_2) \exp\left(-\frac{x_1 + x_2}{a}\right) u(x_1)u(x_2)$$

gobierna el comportamiento de las vvaa  $x_1, x_2$ .

Se dispone de  $K$  muestras de dichas variables,  $\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\}$ , muestras tomadas independientemente unas de otras.

- i) Determínese la expresión de  $\hat{a}_{ml}(\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\})$ .
- ii) Calcúlese  $E\{\hat{a}_{ml}|a\}$  y  $Var\{\hat{a}_{ml}|a\}$ .
- iii) ¿Existe el estimador de  $a$  absolutamente eficiente?

**12.E20** Un diseñador sabe que la va  $x$  que observa obedece a

$$\begin{aligned} p_A(s, x) &= 1/a, & 0 < s < 2ax, & \quad 0 < x < 1 \\ p_B(s, x) &= 1, & 0 < s < 2x, & \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

según probabilidades conocidas  $P, 1 - P$ , respectivamente, siendo  $a > 1$  un parámetro determinista también conocido.

- i) El diseñador comienza por determinar los estimadores mmse de  $s$  a la vista de  $x$  para cada una de las situaciones posibles,  $\hat{s}_{msA}(x)$  y  $\hat{s}_{msB}(x)$ .  
Determinéense las expresiones de dichos estimadores y calcúlense sus errores cuadráticos medios,  $E_A\{(s - s_A(x))^2\}$ ,  $E_B\{(s - s_B(x))^2\}$ .
- ii) Es inmediato apreciar que  $s$ ,  $x$ , están gobernadas por la mezcla

$$p(s, x) = Pp_A(s, x) + (1 - P)p_B(s, x)$$

Calcúlese el error cuadrático medio dado  $x$  de un estimador cualquiera  $\hat{s}(x)$ ,  $E\{(s - \hat{s}(x))^2|x\}$ .

- iii) El diseñador opta por elegir entre  $\hat{s}_{msA}(x)$  y  $\hat{s}_{msB}(x)$  según el valor mínimo de los errores cuadráticos condicionales correspondientes, calculados de acuerdo con ii).  
Explicítese la regla de selección que obtendrá el diseñador.
- iv) Tras calcular el estimador óptimo  $\hat{s}_{msg}(x)$  para la mezcla presentada en ii) en su forma general (es decir, sin particularizar  $p_A$  y  $p_B$ ), particularícese el resultado para la situación que se está considerando, y determínese  $\hat{s}_{ms}(x)$  para el problema.  
¿Por qué no es óptima la opción seguida por el diseñador?

**12.E22** Las vv.aa.  $s$  y  $x$  son conjuntamente gaussianas, con vector de medias y matriz de covarianzas

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_s \\ m_x \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_{ss} & v_{sx} \\ v_{sx} & v_{xx} \end{bmatrix}$$

respectivamente.

Un diseñador desea estimar  $s$  a partir de  $x$ , pero sólo tiene acceso a la verosimilitud  $p(x|s)$ ; por ello, utiliza el estimador de máxima verosimilitud

$$\hat{s}_{ml}(x) = \arg \max_s p(x|s)$$

- i) Obténgase el estimador de error cuadrático medio mínimo,  $\hat{s}_{ms}(x)$ .
- ii) Obténgase  $\hat{s}_{ml}(x)$ , y compárese su expresión con la de  $\hat{s}_{ms}(x)$ .
- iii) Calcúlese el exceso de error cuadrático medio que implica el uso de  $\hat{s}_{ml}(x)$  en lugar de  $\hat{s}_{ms}(x)$ .
- iv) ¿Cómo hay que modificar las expresiones anteriores si en lugar de tener acceso a  $x$  se observa una versión ruidosa  $z = x + n$ , siendo  $n$  independiente de  $x$  y  $s$  y con ddp  $p(n) = G(n|0, v_n)$ ?

**12.A1** Que el estimador ML de un parámetro determinista resulte ser insesgado y absolutamente eficiente no significa que su error cuadrático medio sea mínimo, ya que puede existir un estimador sesgado que lo tenga menor: la eficiencia absoluta sólo implica varianza mínima para el sesgo que se está considerando.

- i) Considérese un estimador insesgado  $\hat{s}(\mathbf{x})$  con varianza  $\text{var}(s)$ . Calcúlese el error cuadrático medio del estimador sesgado  $\tilde{s}_a(\mathbf{x}) = a \hat{s}(\mathbf{x})$ , siendo  $a$  una constante.
- ii) Determínese cuál es el valor de  $a$  que minimiza ese error cuadrático medio para un  $s$  dado.  
Obviamente, este valor no tiene utilidad práctica, salvo que resulte independiente de  $s$ .
- iii) Considérese la estimación de la media  $s$  de una ddp exponencial unilateral

$$p(x|s) = \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{x}{s}\right) u(x), \quad s > 0$$

Establézcase  $\hat{s}_{ml}(\{x^{(k)}\})$ , siendo  $\{x^{(k)}\}$   $K$  muestras de  $x$  tomadas de forma independiente.

- iv) Compruébese que  $\hat{s}_{ml}(\{x^{(k)}\})$  es insesgado y absolutamente eficiente.
- v) Determinése el valor de  $a$  para el que  $\tilde{s}_a(\{x^{(k)}\}) = a \hat{s}_{ml}(\{x^{(k)}\})$  tiene error cuadrático medio mínimo.