



Boletín de Ejercicios

Tema 5: Modulaciones digitales paso banda



Problema 1

Calcule el ancho de banda para transmitir voz digitalizada a 8KHz con 8 bits por muestra utilizando las siguientes modulaciones:

- a) NRZ polar binaria.
- b) QPSK con filtro transmisor en coseno alzado con $\alpha = 0$.
- c) 16QAM con filtro transmisor en coseno alzado con $\alpha = 0$.

Problema 2

Vamos a comparar las modulaciones BPSK y QPSK conformadas ambas con pulsos NRZ. Partiendo de la expresión de la probabilidad de error entre dos símbolos dados:

$P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right)$, calcule la probabilidad de error de bit en función de la potencia media recibida.

Problema 3

Se pretende construir un modem que permita transmitir tanto voz digitalizada y comprimida hasta 4.8 Kbps como datos sobre un canal telefónico con un ancho de banda que abarca de 10.300Hz-13.400Hz.

- a) Para la transmisión de la voz se dedica la parte baja del canal utilizando una modulación 64-QAM con conformación de coseno alzado con $r = 0.15$. Se requiere transmisión bidireccional simultánea con separación de 160Hz entre el canal de ida y el de vuelta. Obtener el ancho de banda que ocupará la voz y dibujar el espectro indicando las frecuencias de portadora para ambos canales.
- b) Los datos se disponen en la banda situada a continuación de la utilizada por la voz, dejando una banda de guarda de 100 Hz y se transmiten con una modulación de fase de 4 estados con conformación de coseno alzado con $r = 0.5$. ¿Cuál es la velocidad máxima de transmisión de los datos suponiendo transmisión full-duplex con una banda de guarda de 100Hz entre ambos sentidos de la comunicación?

Problema 4

Sea un sistema de comunicaciones formado por un transmisor y un receptor. La frecuencia de trabajo del sistema es de 900 MHz y el ancho de banda del sistema es de $B = 30$ MHz.

El ruido presente en el receptor tiene una densidad espectral de potencia $N_0/2 = 10^{-12}$ W/Hz. El sistema requiere para su correcto funcionamiento una probabilidad de error máxima de $BER_{\max} = 10^{-3}$. Considerando que en ese momento el sistema requiere utilizar la modulación QPSK:

- Calcule cuál es la potencia que necesita recibir el terminal receptor.
- Calcule la tasa de bit del sistema si se utiliza un conformador de raíz de coseno alzado con un factor de roll-off igual a 1.

En un momento dado, el terminal recibe una potencia $P_{rx} = -36$ dBW. Suponiendo que el sistema puede elegir entre las modulaciones BPSK, QPSK y 8PSK,

- Indique qué modulación tendríamos que utilizar para mantener el requisito de probabilidad de error.
- Calcule la nueva tasa de transmisión del sistema.

Aproxime a probabilidad de error de error de bit de las modulaciones mencionadas con la siguiente expresión:

$$P_b = 0.2 \exp\left(\frac{-1.5 SNR}{M-1}\right)$$

con M el orden de la modulación y la SNR en unidades naturales.

Problema 5

Considere la modulación paso banda cuya familia de señales viene definida por:

$$s_i(t) = m(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_i)$$

con ϕ_i una fase que puede tomar los siguientes valores: $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$ y $7\pi/4$, y donde $m(t)$ es el filtro conformador del pulso del transmisor, de energía unidad.

- Determine la base ortonormal adecuada para representar las señales como una constelación bidimensional.
- Determine los coeficientes de cada una de las señales al proyectarlas sobre la base, y dibuje la constelación (etiquetando claramente los ejes).

- c) Diseñe el receptor óptimo, indicando al final cuáles serían las fronteras de decisión óptimas del decisor para esta modulación.

Considere ahora que $m(t) = \sqrt{2E/T}$ definida únicamente en un periodo de símbolo, con T el periodo de símbolo.

- d) Calcule la energía de cada símbolo.
e) Deduzca la expresión de la probabilidad de error para esta modulación, en función de la SNR de bit.

Las siguientes fórmulas le pueden resultar de utilidad:

Coseno de la suma:

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$

Problema 6

Considere un sistema de comunicaciones inalámbrico digital, que puede soportar las modulaciones BPSK, QPSK y 8PSK. El ancho de banda del canal es $B = 5$ MHz, y el sistema utiliza un filtro de raíz de coseno alzado con factor de roll-off de 0,25. La máxima probabilidad de error que puede soportar el servicio ofrecido es de $BER_{\max} = 10^{-3}$. La potencia de ruido en el receptor es $N=10^{-7}$ W.

- a) Calcule la mínima potencia que requiere el receptor para que el sistema funcione correctamente. Calcule la tasa de bit del sistema.
b) Calcule la potencia que el receptor necesita recibir para utilizar las modulaciones QPSK y 8PSK. Calcule la tasa de bit del sistema en ambos casos. En función de las potencias y las velocidades calculadas, comente el resultado.

Probabilidad de error de bit de una modulación M-PSK:

$$P_e(M-PSK) = 0.2 \exp\left(\frac{-1.5 \text{snr}}{M-1}\right)$$

con la snr en unidades naturales.

Problema 7

Sea una constelación de orden 16 cuyos símbolos siguen la siguiente expresión:

$$s_n(t) = A \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi n}{16}\right) \text{ con } n = 0 \dots 15$$

- Si el periodo de símbolo tiene duración T (con T múltiplo de $1/f_c$), calcule el valor de A para que todos los símbolos tengan energía E .
- Dibuje en el tiempo la señal transmitida para $n = 0$, $n = 4$ y $n = 8$, indicando en las figuras los valores más significativos
- ¿Qué parámetro de la señal transmitida transporta la información?
- Calcular la base de dos elementos que puede utilizarse para representar este conjunto de funciones y exprese los símbolos de la constelación en función de la base.
- Dibuje la constelación de esta modulación indicando el significado de los ejes, la separación entre puntos, y la distancia de los mismos al centro.
- Dibuje la fronteras de decisión entre estos 16 símbolos.
- Calcule la probabilidad de error de bit en función de E_b/N_0 asumiendo que se utiliza la codificación Gray.

Problema 8

Un sistema de comunicaciones Wi-Fi puede soportar las modulaciones QPSK y 16QAM y 64QAM. Se desea analizar las prestaciones de un punto de acceso situado en el exterior de un edificio. El ancho de banda del canal es $B = 20$ MHz. La máxima probabilidad de error que puede soportar el servicio ofrecido es de $P_{b\max} = 10^{-3}$. La potencia de ruido en el receptor es de $N = 10^{-12}$ W.

- Calcule la potencia mínima que es necesario recibir para que el enlace sea viable.
- Por el tipo de modulación utilizada, el sistema desaprovecha un 20% de la tasa total. Calcule la tasa de bit neta (útil) del sistema en ese punto.
- Asuma que el terminal móvil se acerca a la estación base. ¿A partir de qué potencia recibida podría comenzar a utilizar la modulación 16QAM? Calcule la nueva tasa en ese punto.
- Si en ese punto quisiéramos utilizar la modulación 64QAM, y nos permiten cambiar la antena del punto de acceso por una de mayor ganancia, ¿cuál sería la ganancia de antena necesaria?

- e) En vez de cambiar la antena se añade un codificador de canal que mejora la probabilidad de error. Para una probabilidad de error dada, se tiene una ganancia de codificación de 5 dB (se necesitan 5 dB menos de SNR para obtener la misma probabilidad de error). Como penalización, el codificador añade 3 bits de redundancia por cada 4 bits de información útil. Si se utiliza la modulación 64QAM, ¿cuál es la nueva probabilidad de error? ¿Y la nueva tasa de bit?

Las siguientes fórmulas le pueden resultar de utilidad:

1. Probabilidad de error de bit de una modulación de orden M:

$$P_b = 0.2 \exp\left(\frac{-1.5 \text{snr}}{M-1}\right)$$

con la snr en unidades naturales.

Problema 9

Dos usuarios de ADSL desean contratar una línea de esta tecnología con una empresa proveedora. El cable de teléfono por el que les llega la señal ADSL parte de sus casas y llega a una centralita, donde la información se une junto con la del resto de usuarios y se transmite por internet a donde se requiera. El sistema puede adaptar su modulación en función de la calidad de señal recibida, pudiendo escoger de forma automática entre BPSK, 16PSK y 32PSK. La potencia recibida decrece con la distancia, debido a la atenuación introducida por el cable, siguiendo la ecuación: $P_{rx} \text{ (dBm)} = 10 - 6 \cdot d \text{ (Km)}$. El receptor de la centralita presenta un ruido de potencia $P_n = -30 \text{ dBm}$, y requiere de una probabilidad de error de bit máxima de $P_{b,\max} = 10^{-4}$ para su buen funcionamiento. El usuario 1 (U1) vive a 2,5 Km de la centralita y el usuario 2 (U2) vive a 5 Km de ella. Si el ancho de banda total es de 1 MHz y se utiliza un pulso en coseno alzado con factor de roll-off 0.25, calcule la máxima tasa de bit que el proveedor podrá ofrecer a ambos usuarios.

Considere que la probabilidad de error de bit una modulación PSK puede aproximarse como:

$$P_b = 0.2 \exp\left(\frac{-1.5 \text{snr}}{M-1}\right)$$

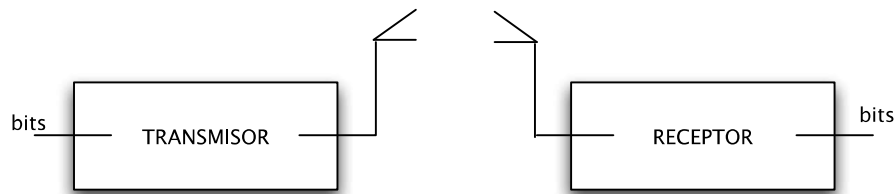
Problema 10

Sea un transmisor que utiliza una modulación compuesta por las siguientes señales:

$$s_n(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t + \phi_n) \quad n = 1, \dots, 4$$

con $\phi_n = \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$,

- Determinar la base ortonormal que permite representar este conjunto de señales mediante una constelación. Justifique su respuesta.
- Dibujar la constelación, indicando claramente los ejes y las coordenadas de cada punto (debe deducir matemáticamente su valor).
- Dibuje el esquema del transmisor y del receptor óptimo, apoyándose en los bocetos siguientes (debe rellenar los bloques TRANSMISOR y RECEPTOR respetando las entradas y salidas del boceto):



- Calcule (indicando todos los pasos) la probabilidad de error de bit en función de la SNR de símbolo ($\text{SNR} = \text{Potencia recibida} / \text{Potencia de ruido}$) con codificación Gray.

Asuma a continuación que se transmite la señal por un canal que introduce ruido aditivo Gaussiano en la señal recibida. El canal tiene unas pérdidas en potencia de $L = 20$ dB (la potencia recibida será $P_{rx} = P - 20$, con P la potencia transmitida). Asuma que la potencia transmitida es $P = 1$ W. Tenga en cuenta dos posibles situaciones: (1) la potencia de ruido vale $P_n = 10$ mW; y (2) la potencia de ruido vale $P_n = 1$ mW.

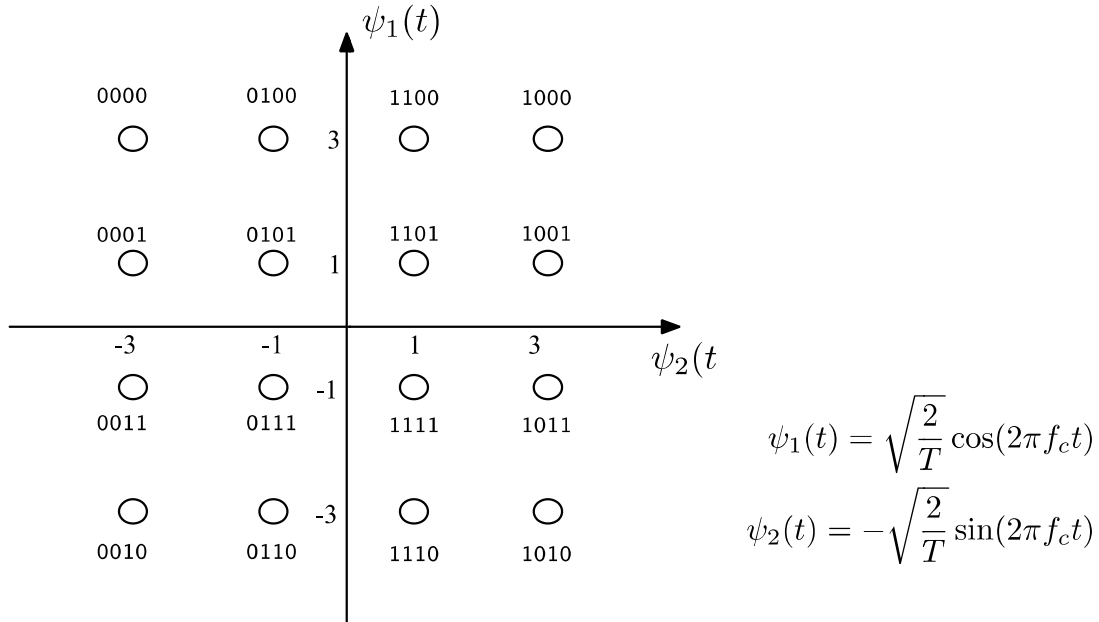
- Dibuje aproximadamente el diagrama de dispersión de la señal recibida para ambas situaciones, es decir, los puntos que representan los símbolos recibidos sobre el plano definido por los componentes de la base. Extraiga conclusiones sobre la probabilidad de error basándose en ambas figuras.
- Asumiendo ahora que está en la situación (2), calcule la probabilidad de error del sistema.
- Si en esta situación se desea obtener una probabilidad de error menor o igual a $P_{b\max} = 10^{-5}$, calcule cuánta potencia debe transmitirse.

Nota 1: $\cos(A+B) = \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B)$

Nota 2: puede usar la tabla de la función Q impresa al final del examen.

Problema 11

En la figura se representa la constelación de una modulación digital paso banda, en función de los dos elementos de la base, $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$.



Como se observa en la figura, los coeficientes de cada símbolo para cada elemento de la base ($a_{n,1}$ y $a_{n,2}$) pueden tomar cualquier combinación de los valores $\{-3, -1, 1, 3\}$.

- Indique el nombre y el orden de la modulación.
- Las señales de la modulación se pueden expresar como una portadora modulada en amplitud y fase, es decir:

$$s_n(t) = a_n \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t + \theta_n)$$

Ayudándose de la figura, deduzca la expresión de los valores de amplitud a_n y fase θ_n en función de $a_{n,1}$ y $a_{n,2}$.

- Expresa las señales de la modulación en función de $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ y de a_n y θ_n (puede ayudarse de la fórmula indicada al final del problema).
- Dibuje en el tiempo los símbolos $s_n(t)$ cuando los bits de entrada son: 1101011110100000, indicando claramente los valores en ambos ejes, y poniendo atención a la fase de cada símbolo.

Nota: las siguientes fórmulas pueden ser de utilidad:

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$

Problema 12

Deduzca la probabilidad de error de bit de una modulación QPSK dada por:

$$s_n(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t + \phi_n) \quad n = 1, \dots, 4$$

$$\phi_n \in \{\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4\}$$

si la densidad de ruido a la entrada del receptor vale $N_0/2$ y asumimos codificación Gray. Es necesario que ponga por escrito todos los pasos.

Problema 13

Considere una modulación 8PSK, cuyos símbolos denominamos $s_n(t)$. El primero de los símbolos de la constelación $s_1(t)$ tiene fase 0. La duración del símbolo es T y la energía promediada para todos los símbolos es E . Realice las siguientes tareas:

- Indique la expresión de un símbolo genérico de la constelación $s_n(t)$.
- Dibuje $s_3(t)$ en el tiempo.
- Calcule la base para la constelación (ejes de la constelación).
- Calcule la expresión genérica para los coeficientes de cada símbolo sobre esa base.
- Dibuje la constelación y las fronteras de decisión.

Problema 14

Sea un sistema que puede funcionar con tres modulaciones A, B y C, cuyas curvas de BER frente a SNR de símbolo se observan en la figura inferior. El orden de dichas modulaciones es 2, 4 y 16, respectivamente. Se usa un factor de roll-off $r = 0.25$. El ancho de banda del sistema es $B = 10$ MHz y la densidad espectral de ruido es $n_0/2 = 0.5 \cdot 10^{-20}$ W/Hz. La probabilidad de error máxima para que el sistema funcione es $\text{BER}_{\max} = 10^{-3}$.

- Calcule la potencia recibida mínima (en dBm) para que el sistema pueda funcionar.
- Suponga que la potencia recibida en un instante concreto es $P_{RX} = -85$ dBm. ¿Qué modulación (A, B, o C) utilizaría el sistema? Justifique su respuesta
- Con esa misma potencia recibida se desea utilizar la modulación que permite transmitir más rápido. Para ello se introduce un codificador de canal. ¿Cuál es la ganancia de codificación (en dB) que debería tener el codificador?
- Asumiendo que la tasa de codificación es $r = 2/g_{\text{cod}}$, con g_{cod} la ganancia de codificación en unidades naturales, ¿cuál es la tasa de bit resultante al utilizar la modulación y el codificador de canal del apartado anterior?

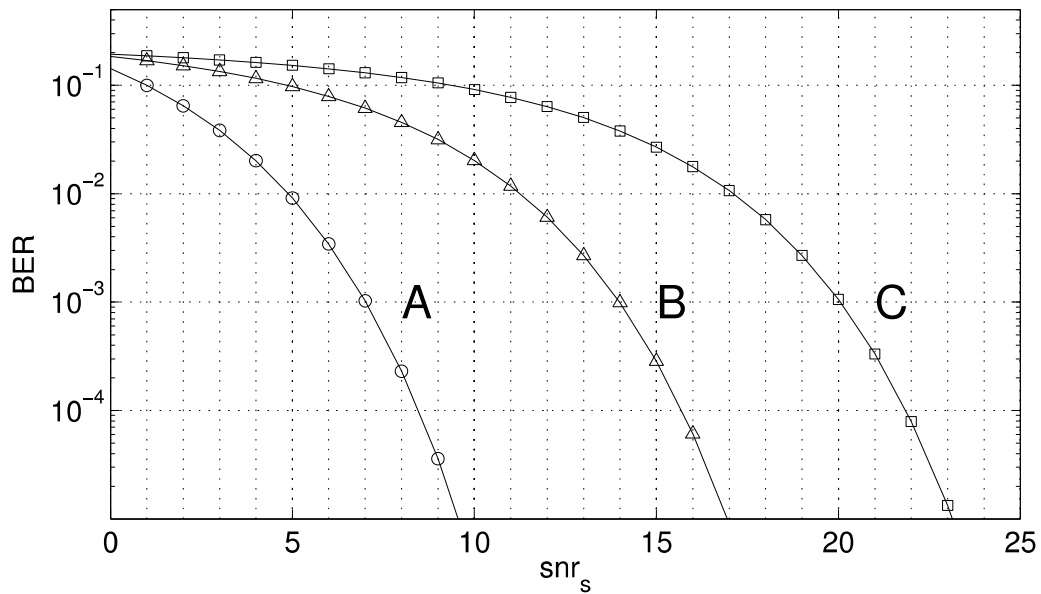
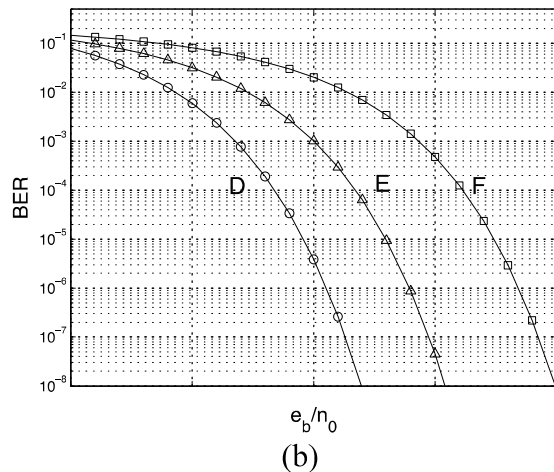
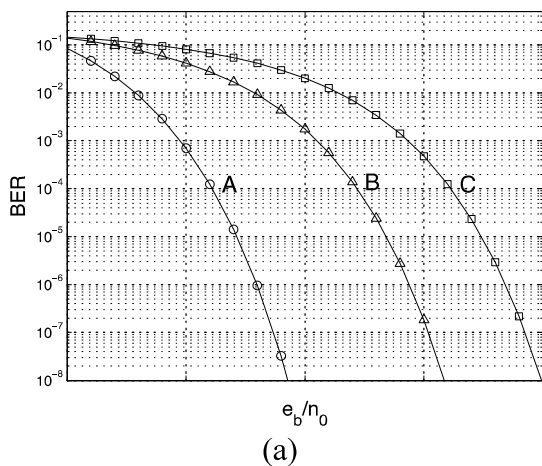


Figura del Problema 13

Problema 15

La Figura (a) representa tres curvas de Bit Error Rate (BER) para modulaciones de orden 16 (16QAM, 16PSK, 16FSK). La Figura (b) representa tres modulaciones PSK (8PSK, QPSK y 32PSK).

- Indique en el Cuadro qué curva corresponde con cada modulación.
- Explique en el siguiente recuadro en qué parte de la Figura (b) se situaría la curva de BER de la modulación BPSK.



Modulación	Curvas (Fig. (a))	Modulación	Curvas (Fig. (b))
16QAM		32PSK	
16PSK		8PSK	
16FSK		QPSK	

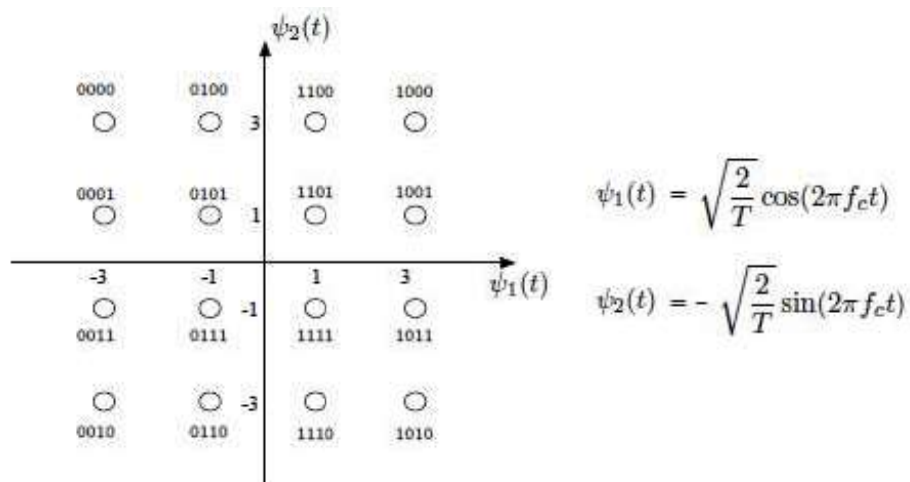
Problema 16

Indique sobre el cuadro inferior la eficiencia espectral y la tasa de bit de las modulaciones indicadas, donde r representa el factor de *roll-off* y B el ancho de banda

Modulación	Eficiencia espectral	Tasa de bit
QPSK, $r = 0$, $B = 1\text{MHz}$		
64QAM, $r = 0.5$, $B = 1\text{ MHz}$		
64QAM, $r = 0.5$, $B = 2\text{ MHz}$		

Problema 17

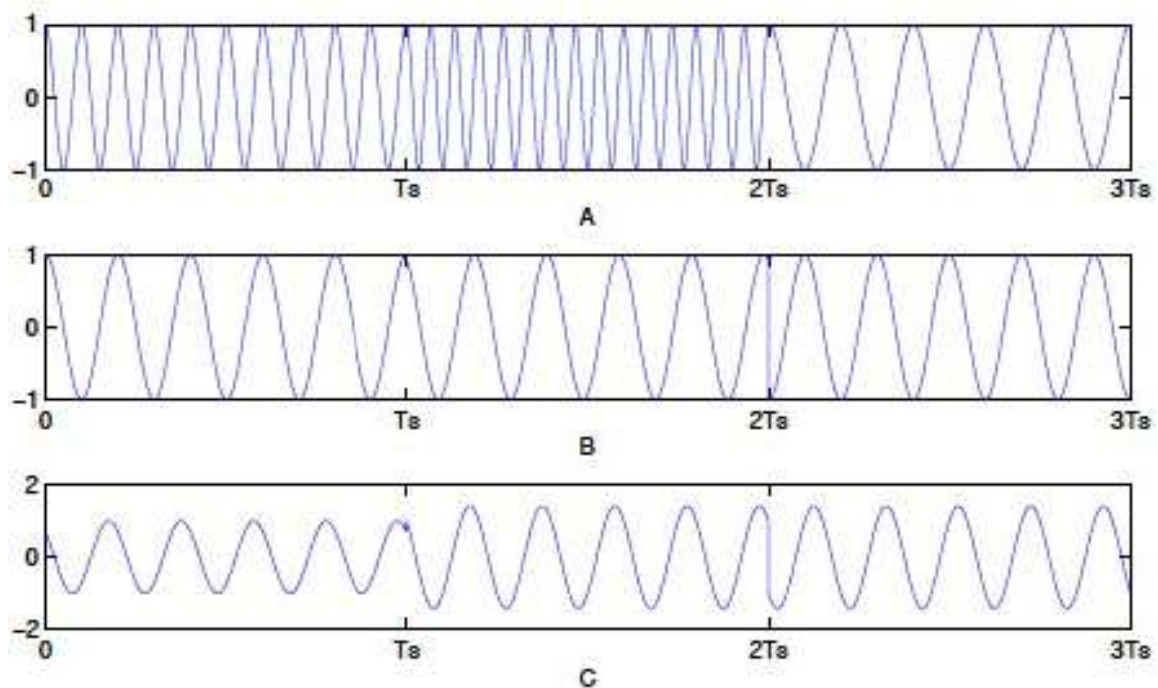
En la figura inferior se muestra la constelación de una modulación digital paso banda, así como las bases utilizadas para la representación (los ejes). En un instante dado se desea transmitir el siguiente mensaje 1001 con un símbolo $s_n(t)$ de esa constelación. Sabiendo que $f_c = 100\text{ Hz}$, el tiempo de símbolo es $T = 100\text{ ms}$, dibujar en el tiempo $s_n(t)$. La figura debe dejar claro: amplitud del símbolo, fase y número de ciclos que caben en T .



Problema 18

En la figura inferior se muestran tres señales transmitidas correspondientes a tres modulaciones digitales paso banda diferentes. De cada señal se dibujan tres tiempos de símbolo.

- Indique el tipo de modulación al que pertenece cada señal, sin especificar el orden.
- Asumiendo que estas modulaciones tienen orden 16, dibuje sus curvas de probabilidad de error frente a c_b/n_0 .

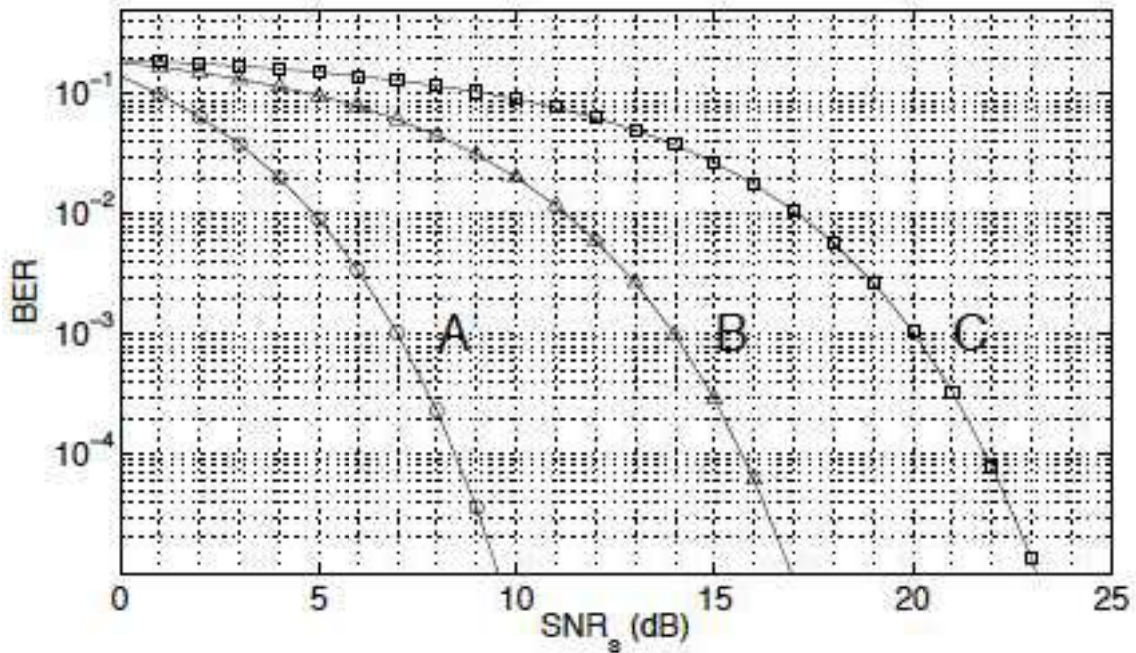
**Problema 19**

Rellene el cuadro con los valores de tasa de bit y eficiencia espectral obtenidos con cada modulación para los anchos de banda B y los factores de roll-off r indicados.

Modulación	Eficiencia espectral	Tasa de bit
BPSK, $r = 0$, $B = 1\text{MHz}$		
32PSK, $r = 0.25$, $B = 1\text{ MHz}$		
32PSK, $r = 0.25$, $B = 2\text{ MHz}$		

Problema 20

Sea un sistema que puede funcionar con tres modulaciones A, B y C, cuyas curvas de BER frente a SNR de símbolo se observan en la figura inferior. El orden de dichas modulaciones es 2, 4 y 16, respectivamente. Se usa un factor de roll-off $r = 0.25$. El ancho de banda del sistema es $B = 10$ MHz y la densidad espectral de ruido es $n_0/2 = 0.5 \cdot 10^{-20}$ W/Hz. La probabilidad de error máxima para que el sistema funcione es $\text{BER}_{\max} = 10^{-3}$.

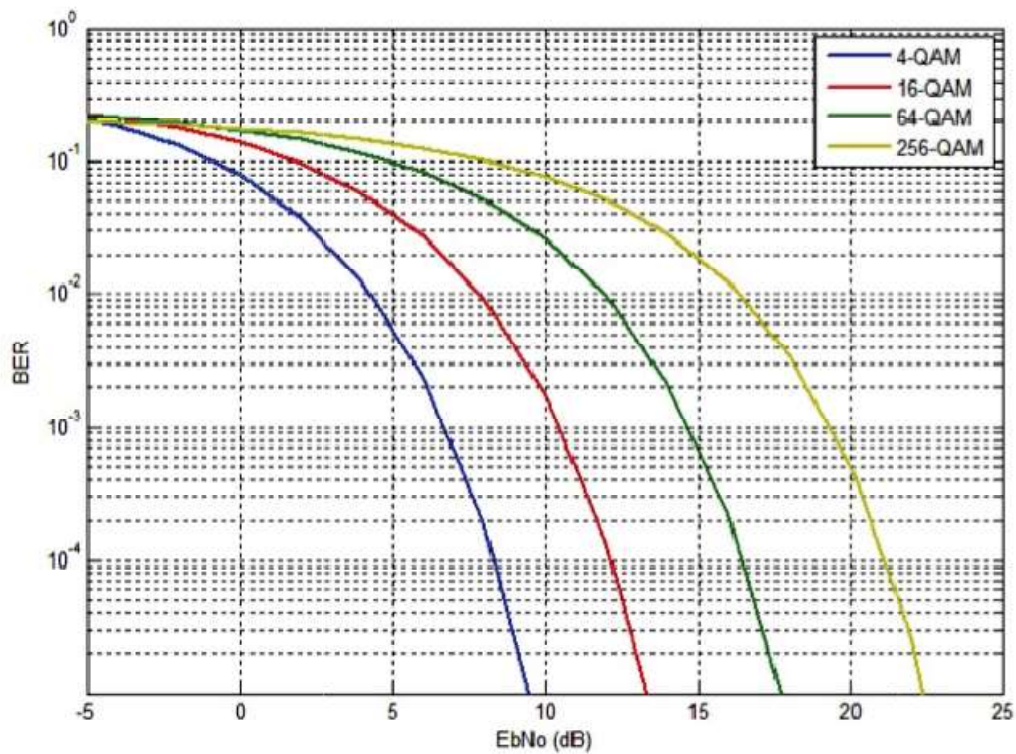


- Si la potencia recibida es $P_{RX} = -90$ dBm, indique si el sistema puede funcionar y en caso afirmativo, la modulación que utilizaría.
- Suponga que se desea utilizar la modulación B. La relación entre la potencia recibida y la transmitida es, en unidades logarítmicas: $P_{RX} \text{ (dBW)} = P_{TX} \text{ (dBW)} - 100$. Indique qué potencia en mW debe transmitir el transmisor.
- Asumiendo que se transmite la potencia calculada en el apartado anterior, si se utiliza un codificador de canal de ganancia $G = 7$ dB y tasa de codificación $c = 1/2$, indique de forma razonada qué modulación sería posible emplear.
- ¿Cuál es la tasa de bit resultante al utilizar la modulación y el codificador de canal del apartado anterior?

Problema 21

Un sistema de comunicaciones inalámbricas puede utilizar las modulaciones QAM cuya BER se representa en la Figura (tenga en cuenta que el eje x de la figura es la SNR de bit en dB). El ruido a la entrada del receptor tiene una potencia $N = 10^{-14}$ W. La potencia recibida es $P_{RX} = -97$ dBm. El objetivo del sistema es proporcionar una eficiencia espectral mayor o igual a $e = 3$ bps/Hz.

- Indique la modulación de menor orden que cumple con el objetivo del sistema.
- Indique la BER que se tendría con esa modulación
- Calcule la tasa de bit con esa modulación en función del ancho de banda B Hz.



Problema 22

Un sistema de comunicaciones inalámbricas puede utilizar las modulaciones de la Figura anterior, pero añadiendo un codificador de canal de tasa $c = 1/2$ cuya ganancia de codificación es $G = 3$ dB. Este sistema debe garantizar una BER máxima $BER_{\max} = 10^{-3}$. La densidad espectral de ruido es $n_0/2 = 0.5 \cdot 10^{-16}$ W/Hz y la potencia recibida es $P_{RX} = -89$ dBW.

- a) Indique la eficiencia espectral de cada modulación.
- b) Indique la modulación a emplear si el ancho de banda es $B = 1$ MHz
- c) Indique el ancho de banda B que sería necesario para que el sistema proporcionara una tasa neta mayor o igual a $R = 4$ Mbps para las modulaciones 4QAM y 16QAM (en este apartado no es necesario que tenga en cuenta el requisito de $BER_{\max}$).

Problema 23

Considere las siguientes modulaciones: 4ASK, 4QAM y DQPSK (QPSK diferencial). Todas ellas tienen una energía de símbolo media E y duración T . Para cada una de ellas,

- a) Indique los componentes de la base (ejes para representar la constelación).
- b) Dibuje la constelación, indicando todos los valores importantes.
- c) Dibuje el esquema del receptor.
- d) Compare las tres modulaciones en términos de: tasa de bit y BER.
- e) Indique la ventaja de DQPSK frente a 4QAM.

Problema 24

Considere dos modulaciones digitales paso banda: BPSK y BFSK, ambas binarias y de energía de símbolo $E_s = 1$. El ancho de banda utilizado es $B = 100$ Hz, y se usa un factor de roll-off $r = 1$. La frecuencia central en ambos casos es $f = 1$ KHz. La separación entre las frecuencias de la BFSK es la mínima posible.

- a) Calcule el tiempo de símbolo (T_s) para ambas constelaciones y la separación entre frecuencias de la BFSK (Δf).
- b) Dibuje ambas señales en el tiempo si se desea transmitir la secuencia de bits 01. Indique claramente todos los puntos importantes de las gráficas.

- c) Dibuje las constelaciones y calcule las funciones que van en los ejes (bases de la constelación). Indique claramente todos los puntos importantes de las gráficas.
- d) Compare ambas constelaciones en términos de tasa de bit, eficiencia espectral y BER. Justifique su respuesta.

Problema 25

Sean tres modulaciones cuyos órdenes son $M = 4$, $M = 8$ y $M = 16$. La BER para ambas constelaciones se puede aproximar como $BER = \exp\{-2\gamma / M\}$, con γ la snr en unidades naturales. La máxima BER que puede tolerar el sistema es $BER_{\max} = 10^{-3}$. El ancho de banda es $B = 10$ MHz y la densidad espectral de potencia de ruido es $n_0/2 = 0.5 \cdot 10^{-15}$ W/Hz. Asuma que el factor de roll-off es $r = 0$.

- a) Calcule qué modulación debe usar si la potencia recibida es $P_{RX} = -67$ dBW.
- b) Suponga que la relación entre potencias transmitida y recibida es $P_{RX} = P_{TX} - 60$. ¿Qué potencia en mW habría que transmitir si queremos utilizar la modulación de mayor orden.
- c) Calcule la eficiencia espectral con la modulación de mayor orden.
- d) Repita los apartados *b)* y *c)* si ahora se añade un codificador de canal cuya ganancia de codificación es $G_c = 3$ dB, y su tasa $c = 1/2$.
- e) Calcule la tasa de bit con la modulación de mayor orden con el codificador de canal.