Tema 5. Teoría Elemental del Muestreo e Inferencia Paramétrica

Estadística

Ángel Serrano Sánchez de León

Índice

- Introducción: Población y Muestra
- Tipos de muestreo
- Distribuciones muestrales
  - De la media
  - Diferencia de medias
  - De una proporción
  - Diferencia de proporciones
- Inferencia paramétrica: intervalos de confianza
  - De la media
  - Diferencia de medias
  - De una proporción
  - Diferencia de proporciones

Introducción

- La **Teoría Elemental del Muestreo** estudia la relación entre una población y las muestras tomadas de ella.
- **Población**: Conjunto de elementos de referencia sobre los que se realizan observaciones para extraer conclusiones.
  - La población puede ser finita o infinita.
  - En cualquier caso, suele ser muy costoso (o imposible) analizar todos los miembros de una población.
- **Muestra**: selección de elementos de la población.
  - Debe ser **representativa** de la población.
  - Para ello el muestreo debe ser **aleatorio**: todos los elementos de la población han de tener la misma probabilidad de ser seleccionados.
  - Veremos que algunos muestreos no son aleatorios.

3

Introducción

- El muestreo puede ser de dos tipos:
  - **Con reposición o reemplazo**: sacamos un elemento de la urna y lo volvemos a meter para la siguiente extracción.
    - Seleccionamos nombres al azar en un listín telefónico, admitiendo repeticiones.
    - Lanzamos 50 veces una moneda y contamos las caras.
  - **Sin reposición o reemplazo**: los elementos extraídos de la urna no pueden volver a seleccionarse.
    - Sacamos 10 bolas sucesivamente de una urna que contiene 100 bolas, sin reponerlas.

Introducción

- La **Teoría Elemental del Muestreo** nos permite:
  - Estimar magnitudes desconocidas de una población (**parámetros de la población**) a partir del conocimiento de magnitudes medidas en las muestras (**estadísticos de la muestra**).
  - Determinar si las diferencias observadas entre dos muestras son debidas a causas fortuitas o son realmente significativas. Para ello se realizan **contrastes de hipótesis** y **tests de significación** (**Teoría de las Decisiones**).
- El estudio de las inferencias hechas sobre una población a partir de sus muestras se llama **Inferencia Estadística**.
- **Tipos de Muestreo:**
  - No probabilístico.
  - Probabilístico.

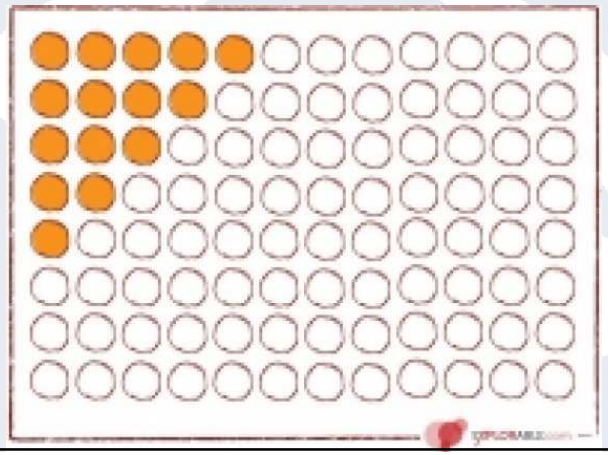
5

Tipos de muestreo

- **No probabilístico:**
  - No se usa el azar ni la probabilidad, sino el criterio del investigador, es decir, él decide si la muestra es o no representativa.
  - Subtipos:
    - Por conveniencia o accidental.
    - Por bola de nieve.
    - Por cuotas.
    - Discrecional.

Tipos de muestreo no probabilístico

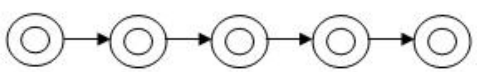
- **Muestreo por conveniencia o accidental:**
  - Los usuarios son fácilmente accesibles.
  - Técnica fácil y barata.
  - Ejemplo: cuando un profesor universitario hace una encuesta a sus alumnos.



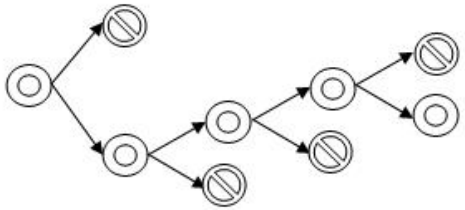
http://bit.ly/1yPnr1e

Tipos de muestreo no probabilístico

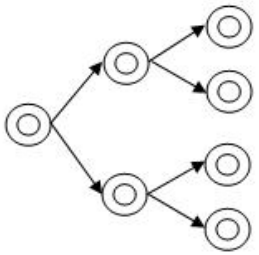
- **Muestreo por bola de nieve:**
  - Cuando los sujetos son difíciles de encontrar, a cada uno se le pide que dé el nombre de otro(s) sujeto(s) candidato(s) a participar en el estudio.
  - Fácil, barata, sin planificación previa, pero difícil de controlar.



Lineal



Discriminatorio exponencial



No discriminatorio exponencial

http://bit.ly/1JUdqCA

Tipos de muestreo no probabilístico

- **Muestreo por cuotas:**
  - Se separan los sujetos por estratos (grupos homogéneos sin solapamiento).
  - Después se eligen tantos sujetos de cada estrato según una cuota o proporción, donde la elección no es al azar sino según el criterio del investigador.
  - Por ejemplo, para un estudio de mercado necesitamos conocer la opinión sobre un producto. Como sabemos que el 60% de los clientes potenciales son mujeres, entrevistamos a 60 mujeres y 40 hombres (esas son las cuotas). La elección de cada sujeto se hace sin seguir ningún criterio probabilístico adicional, buscando hombres o mujeres hasta completar el cupo.

Tipos de muestreo no probabilístico

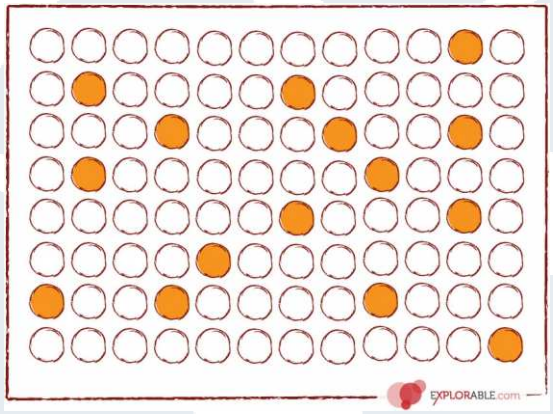
- **Muestreo discrecional:**
  - Los sujetos elegidos para la muestra se escogen según lo que el investigador del estudio crea más conveniente.
  - Ejemplo: si queremos analizar qué condiciones debemos cumplir para triunfar como empresario, podemos seleccionar a y entrevistar a personas que han tenido éxito con sus empresas.

Tipos de muestreo

- **Muestreo probabilístico:**
  - En este caso los sujetos se eligen al azar de manera aleatoria, es decir, basándonos en la probabilidad.
  - Es el que vamos a ver con más detalle.
  - Subtipos:
    - Aleatorio simple.
    - Aleatorio sistemático.
    - Estratificado.
    - Por conglomerados.
    - Polietápico.

Tipos de muestreo probabilístico

- **Muestreo aleatorio simple:**
  - Se numera a cada uno de los sujetos y se van eligiendo al azar con igual probabilidad.
  - Ejemplo: una lotería donde cada individuo tiene un número que le ha tocado al azar.



https://explorable.com/es/muestreo-aleatorio

Tipos de muestreo probabilístico

- **Muestreo aleatorio sistemático:**
  - De manera aleatoria se elige un sujeto inicial *i*.
  - A partir de él, se eligen los demás a saltos de tamaño *k* (*i*, *i*+*k*, *i*+2*k*, *i*+3*k*, etc.).
  - Ejemplo: En las Escuelas Oficiales de Idiomas, para elegir la preferencia en el proceso de matriculación, se elige al azar una letra del abecedario. A partir de ahí, y de uno en uno ($k = 1$), tienen preferencia el resto de letras del abecedario.
  - Ejemplo: de 100 individuos necesitamos una muestra de 12. Elegimos al azar el número 5. El intervalo es $k = \text{int}(100/12) = 8$, luego elegimos a los siguientes sujetos: 5, 13, 21, 29, 37, 45, 53, 61, 69, 77, 85, 93.

Tipos de muestreo probabilístico

- **Muestreo aleatorio estratificado:**
  - Se separan los sujetos por estratos (grupos homogéneos sin solapamiento).
  - Después se eligen los sujetos de cada estrato según su proporción aleatoriamente respecto de la población. Por lo tanto el muestreo se realiza en todos los estratos.
  - Es la versión probabilística del muestreo por cuotas.
  - Ejemplo: en una encuesta telefónica se eligen personas de cada provincia según la proporción que representa la población de dicha provincia respecto de todo el país.
  - También se elegirán tantos hombres como mujeres, así como todos los rangos de edad, según la pirámide de población del lugar.

Tipos de muestreo probabilístico

- **Muestreo por conglomerados:**
  - Cuando los sujetos están agrupados en conglomerados, se eligen al azar los conglomerados o grupos.
  - Después se eligen aleatoriamente los sujetos de entre los conglomerados seleccionados. Por lo tanto, pueden quedar conglomerados sin muestrear.
  - Subtipos:
    - **Conglomerados en 1 etapa:** se eligen todos los sujetos de los conglomerados seleccionados.
    - **Conglomerados en 2 etapas:** una vez elegidos los conglomerados, se seleccionan aleatoriamente algunos sujetos de los mismos.

15

Tipos de muestreo probabilístico

- **Muestreo mixto o polietápico:**
  - Es cuando el muestreo es tan complicado que se realiza por etapas o fases.
  - En cada etapa se elige el tipo de muestreo más adecuado a cada caso.

Distribuciones muestrales

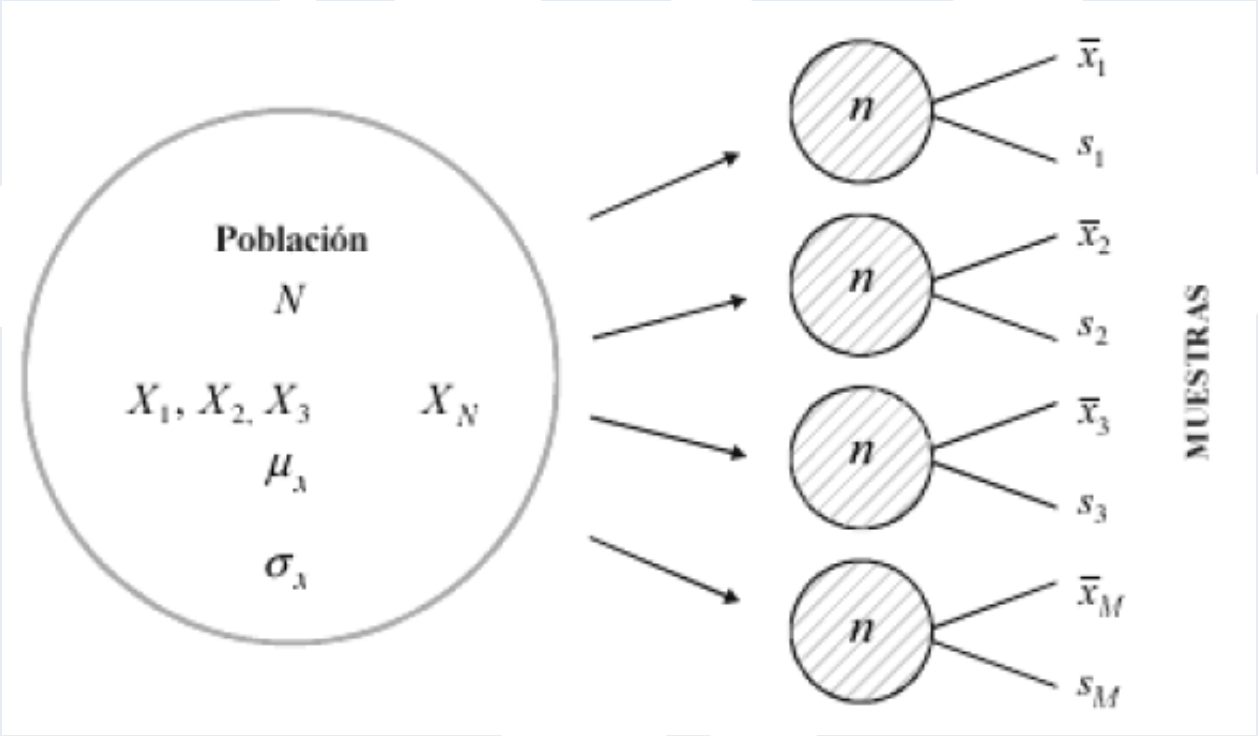
Distribuciones muestrales

- Dada una **población de tamaño *N***, se pueden generar ***M*** **muestras** de ***n*** **elementos** (con o sin reposición).

$$M = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \text{ (sin reposición)} \qquad M = N^n \text{ (con reposición)}$$

- Para cada muestra podemos calcular un **estadístico** (como la media, la desviación típica o una proporción), que variará de muestra a muestra.
  - El estadístico será una **variable aleatoria** que tendrá su propia **distribución muestral** o de muestreo.

Distribuciones muestrales



Distribuciones muestrales

- **Para una muestra:**
  - Media aritmética.
  - Proporción.
- **Para dos muestras:**
  - Diferencia de medias.
  - Diferencia de proporciones.
- Es habitual utilizar letras griegas para referirnos a los **parámetros de una población** y letras latinas para los **estadísticos de la muestra**.

Distribución muestral de la media

- Sea una población normal de media μ y varianza σ^2, de la que extraemos una muestra de tamaño n, formada por las observaciones X_i, $i = 1, \ldots, n$. La media muestral es $\overline{X}$:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

- Todas las X_i siguen la misma distribución normal. Por eso, la **media muestral** sigue también una distribución normal con parámetros:

$$\mathrm{E}(\overline{X}) \equiv \mu_{\overline{X}} = \frac{\mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \ldots + \mathrm{E}(X_n)}{n} = \frac{\overbrace{\mu + \ldots + \mu}^{n}}{n} = \mu$$

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) \equiv \sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2_{\overline{X}_1} + \sigma^2_{\overline{X}_2} + \ldots + \sigma^2_{\overline{X}_n}}{n^2} = \frac{\overbrace{\sigma^2 + \ldots + \sigma^2}^{n}}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

21

Distribución muestral de la media

- Recordando que la desviación típica mide el **grado de variabilidad** de los datos en torno a la media, podemos considerarla como el **error** en la estimación de la media de la población.

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Podemos reducir el error aumentando el tamaño de la muestra *n*, pero el error se reduce lentamente (es inversamente proporcional a la raíz de *n*).
  - Para reducir el error a la mitad, debemos aumentar la muestra en un factor 4.

22

Teorema del Límite Central

- Para valores grandes del tamaño de muestra ($n \geq 30$ y $N > 2n$), la distribución muestral de medias es aproximadamente Normal con media $\mu_{\bar{X}}$ y desviación típica $\sigma_{\bar{X}}$, independientemente de la población.
  - Dicho de otra forma: si n tiende a infinito (muestras muy grandes), la variable tipificada siguiente tiende a la normal estándar N(0,1).

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

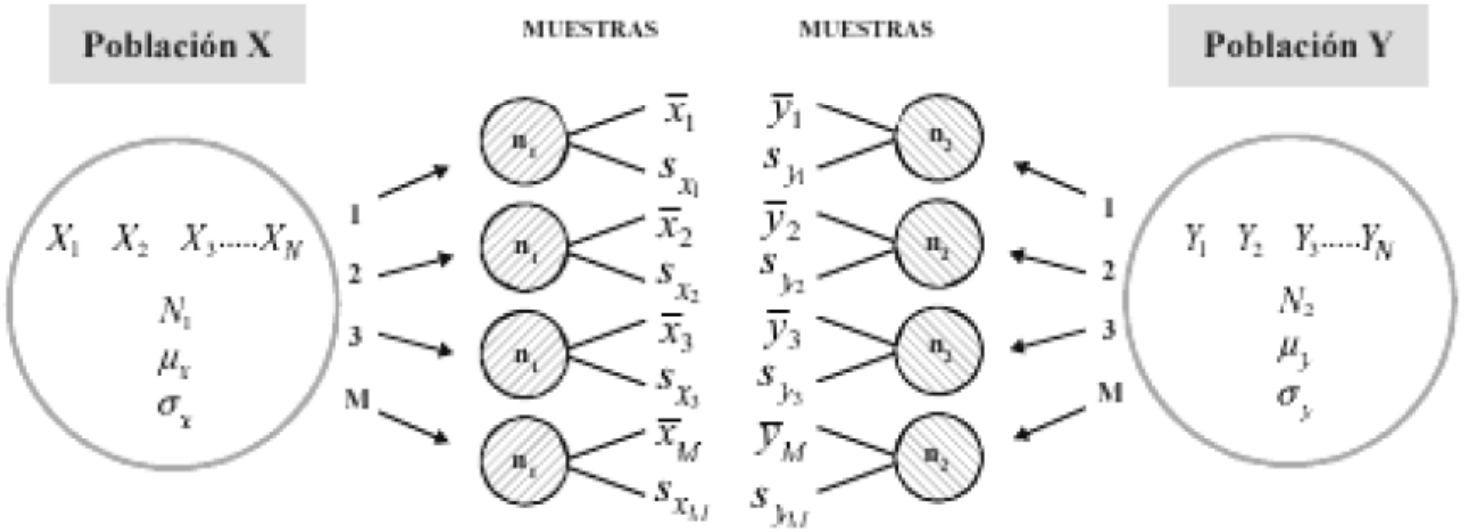
  - Si la población está normalmente distribuida, entonces la distribución de medias también lo está, incluso para $n < 30$.

Distribución muestral de diferencia de medias

- Sean dos poblaciones, la primera con media μ_1 y varianza σ_1^2, y la segunda con media μ_2 y varianza σ_2^2.
- Tomamos dos muestras aleatorias **independientes** de cada población, de tamaño n_1 y n_2, respectivamente.
- Sea $\overline{X}_1$ la media muestral de la primera población, y $\overline{X}_2$ la de la segunda.
- Vamos a estudiar un nuevo estadístico: la **diferencia de las medias**:

$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$$

Distribución muestral de diferencia de medias



Distribución muestral de diferencia de medias

- La **distribución muestral de la diferencia de las medias** tiene por valor esperado la diferencia de las medias poblacionales.

$$\mathrm{E}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \equiv \mu_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \mu_{\overline{X}_1} - \mu_{\overline{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$$

- Por otro lado, la **varianza de la diferencia de las medias** cumple:

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) \equiv \sigma^2_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sigma^2_{\overline{X}_1} + \sigma^2_{\overline{X}_2} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Distribución muestral de diferencia de medias

- Cuando el tamaño de ambas muestras, n_1 y n_2, tiende al infinito, la variable tipificada siguiente sigue aproximadamente una distribución normal estándar N(0,1):

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- Esto ya se cumple típicamente si $n_1 + n_2 > 30$ y $n_1 \approx n_2$.
- Si las poblaciones son normales, la distribución muestras de las diferencias es normal sin importar los tamaños de las muestras.

Caso de varianza poblacional no conocida

- Si no conocemos la varianza poblacional σ^2, se utilizada la varianza muestral como aproximación.
- Se define **varianza muestral** S^2 de n variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$, como:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

- Esta es la **varianza insesgada**, llamada así porque su valor esperado coincide con el de la varianza poblacional.

$$\mathrm{E}(S^2) \equiv \mu_{S^2} = \sigma^2$$

Distribución muestral de una proporción

- Analicemos ahora una distribución binomial.
- Sea el caso de una población infinita (o muy grande) de la que extraemos una muestra de tamaño n (=n ensayos).
- Sea $\hat{P} = X/n$ el cociente que representa la tasa o proporción de éxitos X obtenidos en la muestra con n ensayos, lo cual será un buen estimador de la tasa de éxitos p de la población.

Distribución muestral de una proporción

- Como la muestra es grande ($n \geq 30$), se puede aplicar el Teorema del Límite Central.
- Por tanto esta variable $\hat{P}$ sigue aproximadamente una **distribución normal** con **media**:

$$\mathrm{E}(\hat{P}) \equiv \mu_{\hat{P}} = \mathrm{E}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{\mathrm{E}(X)}{n} = \frac{np}{n} = p$$

- Por otro lado, su **varianza** cumple:

$$\mathrm{Var}(\hat{P}) \equiv \sigma^2_{\hat{P}} = \sigma^2_{X/n} = \frac{\sigma^2_X}{n^2} = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$$

30

Ejemplo

- Un jugador de baloncesto lanza 100 tiros libres y acierta el 80%. Calcular la distribución muestral de la proporción.
- En este caso el tamaño de la muestra es $n = 100$.

$$\mu_{\hat{P}} = \frac{X}{n} = \frac{80}{100} = 0{,}80 = p$$

- Y una desviación típica:

$$\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{0{,}8 \times 0{,}2}{100}} = 0{,}04 = 4\%$$

- Como $n = 100 \geq 30$, la aproximación normal es válida.
- Acierta entre 76 y 84 % de los tiros libres un 68,3 % de las veces.

Distribución muestral de la diferencia de proporciones

- También podemos calcular la **distribución muestral de la diferencia de las proporciones** de dos poblaciones distribuidas binomialmente con parámetros (n_1, p_1) y (n_2, p_2).
- Si las muestras son grandes, $n_1 + n_2 > 30$, la distribución muestral de la diferencia de proporciones se puede aproximar por la normal con parámetros:

$$\mathrm{E}(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \equiv \mu_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \mu_{\hat{P}_1} - \mu_{\hat{P}_2} = p_1 - p_2$$

$$\mathrm{Var}(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \equiv \sigma^2_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \sigma^2_{\hat{P}_1} + \sigma^2_{\hat{P}_2} = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}$$

32

Inferencia paramétrica

Inferencia paramétrica

- La **inferencia paramétrica** es la estimación de los parámetros de una población (como media y varianza poblacionales) a partir de los estadísticos de la muestra (como media y varianza muestrales).
- **Estimación puntual:** Se calcula el valor del parámetro como un único valor numérico.
  - Ejemplo: La longitud media de un lote de cables creados en una fábrica es de 10,326 m.
  - Ejemplo: La intención de voto del partido A es 45%.
  - Existe un método de estimación puntual denominado **Método de Máxima Verosimilitud** (no lo vamos a estudiar).

Estimaciones por intervalo de confianza

- **Estimación por intervalo de confianza:** Se da un intervalo en el cual tenemos una cierta probabilidad o nivel de confianza de que se encuentra el valor del parámetro poblacional que estamos estimando.
  - Ejemplo: La longitud media de un lote de cables creados en una fábrica es de 10,326 ± 0,016 m.
  - Ejemplo: La intención de voto del partido A es 45 ± 10 %.

- Sea β el parámetro poblacional (desconocido) y L_1 y L_2 los límites del intervalo. Se define el **nivel de confianza** $1 - \alpha$ como la probabilidad de que β se encuentre en el intervalo $[L_1, L_2]$:

$$P(L_1 \leq \beta \leq L_2) = 1 - \alpha$$

35

Estimaciones por intervalo de confianza

- El intervalo $[L_1, L_2]$ se llama **intervalo de confianza** del $(1 - \alpha)\cdot 100\%$.
  - Ejemplo: Si α vale 0,05, el intervalo de confianza es del 95%, es decir, la probabilidad de que el parámetro β esté dentro del intervalo de confianza dado es del 95%.
- Supongamos que la distribución muestral de un estadístico B es **aproximadamente normal** (lo cual ocurre si la población de partida es normal, o bien, si el tamaño de la muestra es grande $n > 30$).
- En este caso el estadístico B sigue una distribución normal $N(\mu_B, \sigma_B)$.

Estimaciones por intervalo de confianza

- Por las propiedades de la distribución normal:

$$P(\mu_B - \sigma_B \leq B \leq \mu_B + \sigma_B) = 0{,}68267$$

- Esta ecuación corresponde a la variable tipificada $z = \pm 1$.
- Reordenando los términos:

$$P(B - \sigma_B \leq \mu_B \leq B + \sigma_B) = 0{,}68267$$

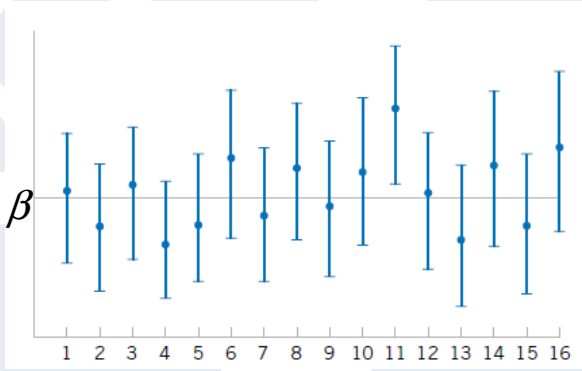
- Si el estadístico B no tiene sesgo, entonces $\mu_B = \beta$.

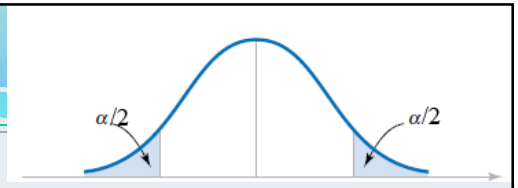
$$P(B - \sigma_B \leq \beta \leq B + \sigma_B) = 0{,}68267$$

37

Estimaciones por intervalo de confianza

- Es decir, existe una probabilidad del 68,3% de que el valor del parámetro poblacional que buscamos, β, esté contenido en el intervalo $[B - \sigma_B, B + \sigma_B]$.
- B es conocido a partir de la muestra, y σ_B o bien es conocido, o bien se estima con la desviación típica muestral S (la insesgada, con $n - 1$ en el denominador).





Coeficientes de confianza

- Se llama **coeficiente de confianza $z_{\alpha/2}$** al factor que multiplica a σ_B y que determina la longitud del intervalo de confianza $[B - z_{\alpha/2}\ \sigma_B,\ B + z_{\alpha/2}\ \sigma_B]$.
- Longitud del intervalo = $2\ z_{\alpha/2}\ \sigma_B \equiv 2\ \varepsilon$

α	Nivel de confianza $(1 - \alpha)\cdot 100\%$	$z_{\alpha/2}$
0,50	50%	$z_{0,25} = 0,6745$
0,3173	68,27%	$z_{0,1587} = 1,00$
0,05	95%	$z_{0,025} = 1,96$
0,0455	95,45%	$z_{0,02275} = 2,00$
0,01	99%	$z_{0,005} = 2,58$
0,0027	99,73%	$z_{0,00135} = 3,00$

Intervalo de confianza para la media

- **Suposición:** población normal N(μ, σ) con σ^2 conocida. Además, población infinita o finita con reposición. Sea una muestra.
- En este caso:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu \approx \bar{X}, \quad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Entonces:

$$P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

- El intervalo de confianza de nivel (1 – α) para la media en el caso de una población infinita o con reposición de varianza conocida es:

$$\mu = \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

40

Intervalo de confianza para la media

- **Suposición:** cualquier tipo de población con σ^2 desconocida y muestra grande ($n \geq 30$).
- Como no conocemos σ, la estimamos con la desviación típica muestral S ("$n - 1$" en el denominador).
- Al ser muestra grande, por el Teorema del Límite Central la distribución muestral de la media es normal.
- Entonces el intervalo de confianza para la media es:

$$\mu = \overline{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

41

Intervalo de confianza para la diferencia de medias

- **Suposición:** poblaciones normales N(μ_1, σ_1) y N(μ_2, σ_2) con σ_1^2 y σ_2^2 conocidas. Además, poblaciones infinitas o finitas con reposición. Sean 2 muestras.
- Ya sabemos que:

$$\mu_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \approx \bar{X}_1 - \bar{X}_2, \quad \sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- Entonces el intervalo de confianza de nivel (1 – α) para la diferencia de medias es:

$$\mu_1 - \mu_2 = \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

42

Intervalo de confianza para la diferencia de medias

- **Suposición:** cualquier tipo de población con σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas, y muestras grandes ($n_1 + n_2 \geq 30$) y similares ($n_1 \approx n_2$). Además, poblaciones infinitas o finitas con reposición.
- No conocemos σ_1 ni σ_2, así que las estimamos a partir de las desviaciones típicas muestrales S_1 y S_2.
- Entonces:

$$\mu = \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

43

Intervalo de confianza para una proporción

- **Suposición:** población binomial de parámetro p desconocido y una muestra grande ($n \geq 30$). Además, población infinita o finita con reposición.
- Al ser muestra grande, podemos aplicar la aproximación normal a la distribución binomial.
- En este caso:

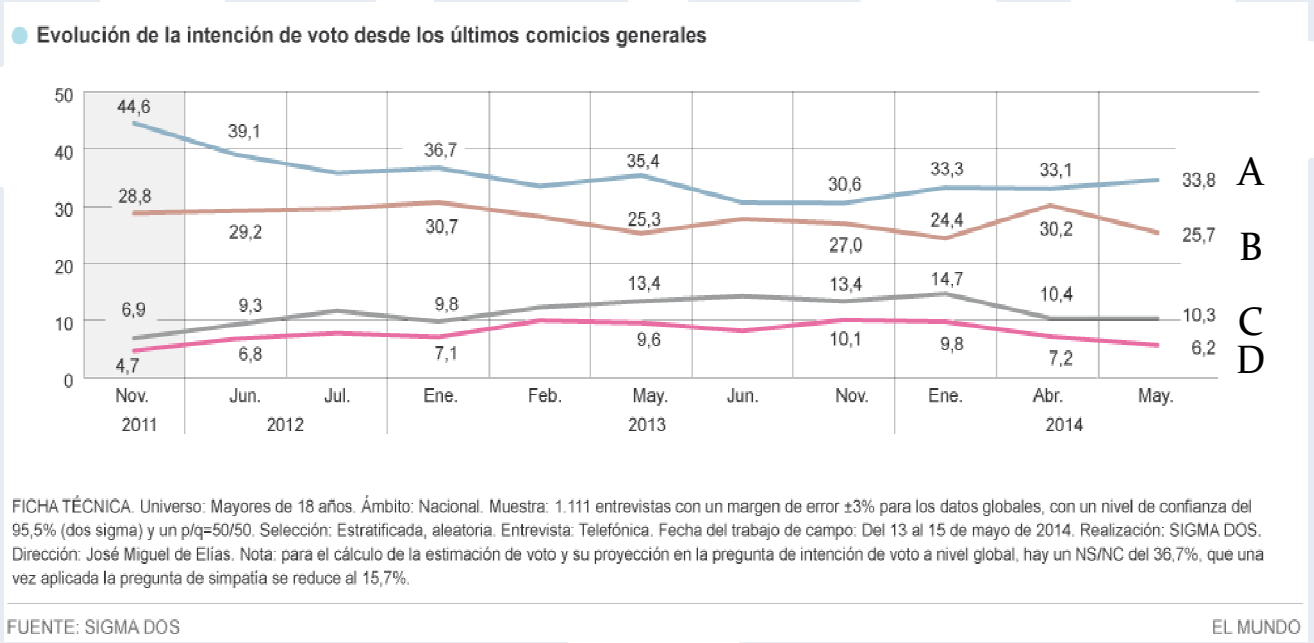
$$\mu_{\hat{P}} = p \approx \hat{P}, \quad \sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

- Luego el intervalo de confianza de nivel $(1 - \alpha)$ para la proporción de éxito de la población es:

$$p = \hat{P} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

Intervalo de confianza para una proporción: Ejemplo

- Sondeo electoral (El Mundo, 19/05/2014)



http://mun.do/PionqZ

Intervalo de confianza para una proporción: Ejemplo

- El caso crítico es el de un partido que obtiene una intención de voto $\hat{P} = 50\% = 0{,}5$. El intervalo de confianza para ese caso extremo es:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{P} = 50\% = 0{,}500 \\ n = 1111 \\ 95{,}5\% \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}0\end{array}\right\} \Rightarrow\ p = 0{,}500 \pm 2{,}0\sqrt{\frac{0{,}5\times 0{,}5}{1111}} = 0{,}500 \pm 0{,}030 = (50{,}0 \pm 3{,}0)\%$$

- El valor de $\hat{P}$ = 0,5 es aquel para el cual la longitud del intervalo de confianza es máxima (mayor error).

$$f(p) = 2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = c\sqrt{p - p^2}$$

$$\frac{df(p)}{dp} = c\frac{1-2p}{2\sqrt{p-p^2}} = 0 \ \Rightarrow 1-2p = 0 \ \Rightarrow\ p = 1/2 = 0{,}5$$

Intervalo de confianza para una proporción: Ejemplo

- Veamos los intervalos de confianza para cada uno de estos partidos:

- Partido A: $p_A = 0{,}338 \pm 2{,}0\sqrt{\frac{0{,}338 \times 0{,}662}{1111}} = 0{,}338 \pm 0{,}028 = (33{,}8 \pm 2{,}8)\%$

- Partido B: $p_B = 0{,}257 \pm 2{,}0\sqrt{\frac{0{,}257 \times 0{,}743}{1111}} = 0{,}257 \pm 0{,}026 = (25{,}7 \pm 2{,}6)\%$

- Partido C: $p_C = 0{,}103 \pm 2{,}0\sqrt{\frac{0{,}103 \times 0{,}897}{1111}} = 0{,}103 \pm 0{,}018 = (10{,}3 \pm 1{,}8)\%$

- Partido D: $p_D = 0{,}062 \pm 2{,}0\sqrt{\frac{0{,}062 \times 0{,}938}{1111}} = 0{,}062 \pm 0{,}014 = (6{,}2 \pm 1{,}4)\%$

El sondeo predice que ninguno de los partidos obtendrá mayoría absoluta con el 95,5% de confianza, ya que ningún intervalo incluye el 50% de los votos.

47

Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones

- **Suposición:** poblaciones binomiales de parámetros p_1 y p_2 desconocidos y 2 muestras grandes ($n_1 + n_2 \geq 30$). Además, población infinita o finita con reposición.
- Al ser muestra grande, podemos aplicar la aproximación normal a la distribución binomial.
- En este caso:

$$\mu_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = p_1 - p_2 \approx \hat{P}_1 - \hat{P}_2, \quad \sigma_{\hat{P}_1-\hat{P}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \approx \sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$$

- Entonces:

$$p_1 - p_2 \approx \left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2\right) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}$$

48

Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones

- **Ejemplo:** Calculemos el intervalo de confianza de la diferencia entre los dos primeros partidos, según el sondeo anterior.

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = n_2 = 1111 \\ \hat{P}_1 = 33{,}8\% = 0{,}338 \\ \hat{P}_2 = 25{,}7\% = 0{,}257 \\ 95{,}5\% \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}0 \end{array}\right\} \Rightarrow p_1 - p_2 = (0{,}338 - 0{,}257) \pm 2{,}0\sqrt{\frac{0{,}338\times 0{,}662}{1111} + \frac{0{,}257\times 0{,}743}{1111}} =$$
$$= 0{,}081 \pm 0{,}039 = (8{,}1 \pm 3{,}9)\%$$

Según este sondeo, el Partido A sacará entre 4,2 y 12,0 puntos más que el Partido B, con una confianza del 95,5 %. Luego el sondeo predice que el Partido A ganará las elecciones.

Casos especiales

Estadístico	Si el intervalo de confianza incluye el valor	A ese nivel de significación el resultado es compatible con	En caso contrario
Media	0	Media positiva, cero o negativa	Media estrictamente positiva o negativa
Diferencia de medias	0	Medias iguales	Una media estrictamente mayor que la otra
Proporción	0,5	Mayoría absoluta no garantizada	Consigue la mayoría absoluta (>0,5) o no la consigue (<0,5)
Diferencia de proporciones	0	Empate técnico entre ambos candidatos	Un candidato gana al otro