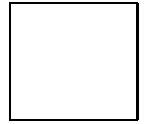


Apellidos.....  
 Nombre..... DNI ..... Grupo .....



Nota E1

**TEST (2,5 PUNTOS)**

■ Acierto +0,25 Error -0,1 Blanco 0.

- V F
- 1. Los límites laterales de  $e^{1/x^2}$  cuando  $x \rightarrow 0$  son ambos  $+\infty$ .
  - 2. Si  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua con  $f(a) > 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < 0$ , entonces existe un único  $c > a$  tal que  $f(c) = 0$ .
  - 3. Si una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  alcanza un extremo relativo en  $x_0 \in \mathbb{R}$ , entonces  $f$  es derivable en  $x_0$  y se verifica  $f'(x_0) = 0$ .
  - 4. El área delimitada por la función  $f(x) = |x|^3$  y el eje  $x$  en la región  $-1 \leq x \leq 2$  es  $17/4$ .
  - 5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^2 + \ln(n + 2))}{n^2 - 1} = 0$ .
  - 6. Una serie  $\sum a_n$  en la que la sucesión de sumas parciales  $\{s_n\}$  es acotada es convergente.
  - 7. Si  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , entonces  $\sum (-1)^n a_n$  es convergente.
  - 8. El desarrollo de Taylor de  $f(x) = x + \sin x$  en  $x = 0$  tiene la forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$  para ciertos coeficientes reales  $a_{2n+1}$ .
  - 9. La función  $f(x, y) = (x - 2y)^2$  tiene un único mínimo absoluto en la región definida por las desigualdades  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$ .
  - 10. La ecuación diferencial  $y'' + x^2 y = 0$ , con la condición inicial  $y(0) = 0$ , tiene solución única.

**PREGUNTAS DE RESPUESTA CORTA (1 PUNTO)**

A. (0,25 puntos)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) =$

B. (0,25 puntos) El radio de convergencia de la serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n!} x^n$  es igual a

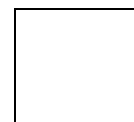
C. Sea  $f(x, y) = e^{x^2+xy}$ . Calcule las siguientes derivadas parciales (0,1 puntos cada una):

$\frac{\partial f}{\partial x} =$    $\frac{\partial f}{\partial y} =$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$    $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$    $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$

Apellidos.....

Nombre..... DNI ..... Grupo .....



Nota E2

- Puntuación de este problema sobre el total del examen: **3 puntos**.

Considere la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(ax)}{x} & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} \cos(bx) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

**2.1** (1 punto). Calcule los valores de  $a, b \in \mathbb{R}$  que hacen a  $f$  continua en  $\mathbb{R}$ .

**2.2** (1 punto). Calcule los valores de  $a, b \in \mathbb{R}$  que hacen a  $f$  derivable en  $\mathbb{R}$ .

**2.3** (1 punto). Considere el caso  $a = b = 0$ . Calcule la integral  $\int_0^2 f(x)dx$ .

**Solución.**

**2.1** En el intervalo  $(-\infty, 0)$ , la función  $f$  es continua  $\forall a \in \mathbb{R}$ , por ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador.

En el intervalo  $(0, \infty)$ , la función  $f$  es continua  $\forall b \in \mathbb{R}$ , por ser producto de funciones continuas.

De esta forma, la función es continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ .

Sin embargo, para que la función sea continua en  $\mathbb{R}$ , tenemos que estudiar la continuidad de la función en  $x = 0$ .

$f$  es continua en  $x = 0$  siempre y cuando  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

Evaluando la función  $f(0) = e^{-0} \cos(b0) = 1$ ,  $\forall b \in \mathbb{R}$ .

De esta forma, para que la función sea continua en  $x = 0$ , los límites laterales cuando  $x \rightarrow 0$  han de coincidir y ser iguales a  $f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(ax)}{x} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} \cos(bx) = 1, \forall b \in \mathbb{R}.$$

Así pues, para que en  $x = 0$  la función sea continua ha de ser  $a = 1$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

De esta forma, los valores de  $a, b$  que hacen  $f$  continua en  $\mathbb{R}$  son  $a = 1$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

**2.2** En el intervalo  $(-\infty, 0)$ , la función  $f$  es derivable  $\forall a \in \mathbb{R}$ , por ser cociente de funciones derivables y no anularse el denominador.

En el intervalo  $(0, \infty)$ , la función  $f$  es derivable  $\forall b \in \mathbb{R}$ , por ser producto de funciones derivables.

De esta forma, la función es derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ .

Sin embargo, para que la función sea derivable en  $\mathbb{R}$ , tenemos que estudiar la derivabilidad de la función en  $x = 0$ .

Si  $f$  es derivable en un punto, necesariamente  $f$  debe ser continua en ese punto. Del apartado anterior, sabemos que la función es continua en  $x = 0$  para  $a = 1$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Con este resultado procedemos a estudiar la derivabilidad de  $f$  en  $x = 0$  sólo para el caso  $a = 1$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

$f$  es derivable en  $x = 0$  siempre y cuando exista  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}-1}{h} = 0.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-h} \cos(bh)-1}{h} = -1, \forall b \in \mathbb{R}.$$

Puesto que estos dos límites laterales no coinciden, no existe ningún valor de  $a$  y  $b$  que haga a  $f$  derivable en  $x = 0$ .

De esta forma, no existe ningún valor de  $a$  y  $b$  que haga a  $f$  derivable en  $\mathbb{R}$ .

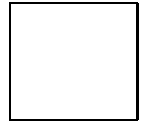
**2.3** En el caso  $a = b = 0$ , la función  $f$  toma la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0. \end{cases}$$

De este modo

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^2 = 1 - e^{-2}.$$

Apellidos.....  
 Nombre..... DNI ..... Grupo .....



Nota E3

■ Puntuación de este problema sobre el total del examen: **3,5 puntos**.

**3.1** (1 punto). Calcule los extremos relativos (o locales) de  $f(x, y) = x^2 + \cos x + y^2$ .

*Nota: la ecuación  $2x = \sen x$  tiene a  $x = 0$  como única solución real.*

**3.2** (1,5 puntos). Calcule el volumen del sólido comprendido entre las superficies  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$  y  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  en la región definida por la desigualdad  $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$ .

**3.3** (1 punto). Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - \cos x \sen x}{y(1 - x^2)}, \quad y(0) = 2.$$

**Solución.**

**3.1** Los posibles extremos relativos (o locales) de la función están necesariamente entre sus puntos críticos, definidos por las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - \sen x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0. \end{aligned}$$

Habida cuenta de la ecuación  $2x = \sen x$  tiene a  $x = 0$  como única solución real, la única solución del sistema anterior es  $x = y = 0$ .

Para determinar si el punto crítico ubicado en  $(0, 0)$  es un extremo, evaluemos la matriz hessiana en el origen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 - \cos x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En el punto crítico la matriz hessiana es diagonal y los elementos de la diagonal principal son positivos, por lo que  $(0, 0)$  es un mínimo local. No hay otros mínimos locales, ni existen máximos locales.

**3.2** El volumen viene dado por la integral triple:

$$I = \iiint_T dx \, dy \, dz$$

siendo  $T$  la región del espacio cuyos puntos  $(x, y, z)$  cumplen  $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq x \leq 4$  y  $-\sqrt{4 - (x - 2)^2} \leq y \leq \sqrt{4 - (x - 2)^2}$

Con lo que la integral queda:

$$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4 - (x - 2)^2}}^{\sqrt{4 - (x - 2)^2}} \int_{-\sqrt{x^2 + y^2}}^{\sqrt{x^2 + y^2}} dz \, dy \, dx$$

Integrando con respecto a  $z$  tenemos:

$$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{4-(x-2)^2}} 2\sqrt{x^2 + y^2} dy dx$$

Para resolver esta integral podemos hacer un cambio a coordenadas polares, con lo que la región del plano cuyos puntos  $(x, y)$  cumplen  $0 \leq x \leq 4$  y  $-\sqrt{4-(x-2)^2} \leq y \leq \sqrt{4-(x-2)^2}$  quedaría como la región del plano cuyos puntos  $(r, \theta)$  cumplen  $0 \leq r \leq 4 \cos \theta$  y  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , debido a que  $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$ , sustituyendo  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  da  $r^2 - 4r \cos \theta \leq 0 \Rightarrow 0 \leq r \leq 4 \cos \theta$  y  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Sustituimos e integramos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} 2\sqrt{r^2} r dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos \theta} 2r^2 dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{128 \cos^3 \theta}{3} d\theta = \\ &= \frac{128}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta = \frac{128}{3} \left( \sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{128}{3} \left( 1 - \frac{1}{3} - \left( -1 + \frac{1}{3} \right) \right) = \frac{128}{3} \frac{4}{3} = \frac{512}{9}. \end{aligned}$$

### 3.3 Al escribir la ecuación diferencial en la forma

$$(\cos x \sen x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$$

reconocemos que es una ecuación diferencial exacta porque:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

siendo  $P = \cos x \sen x - xy^2$  y  $Q = y(1 - x^2)$ .

Llamando  $u$  a la función potencial tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = y(1 - x^2)$$

Integrando con respecto a  $y$  obtenemos  $u$

$$u(x, y) = \frac{y^2}{2}(1 - x^2) + h(x)$$

Derivando ahora esta expresión con respecto a  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = P = \cos x \sen x - xy^2$$

Luego  $h'(x) = \cos x \sen x$ . Al integrar se obtiene

$$h(x) = \int \cos x \sen x dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x - C_1 \tag{1}$$

Por lo tanto

$$u(x, y) = \frac{y^2}{2}(1 - x^2) - \frac{1}{2} \cos^2 x - C_1$$

y una solución implícita de la ecuación diferencial sera:

$$\frac{y^2}{2}(1 - x^2) - \frac{1}{2} \cos^2 x = C_1$$

o, llamando  $C = 2C_1$

$$y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = C$$

Imponiendo ahora la condición inicial  $y(0) = 2$  obtenemos  $C$

$$4(1 - 0) - \cos^2 0 = C \Rightarrow C = 3$$

Una solución implícita del problema de valor inicial será entonces

$$y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = 3. \quad (2)$$

**Observación.** La integral

$$h(x) = \int \cos x \operatorname{sen} x \, dx$$

que aparece en (1) puede también escribirse como

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C_2. \quad (3)$$

Obsérvese que la identidad  $\operatorname{sen}^2 + \cos^2 x = 1$  implica que  $-\frac{1}{2} \cos^2 x$  y  $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$  difieren en una constante.

Procediendo de esta manera, la solución de la ecuación diferencial tomaría la forma

$$y^2(1 - x^2) + \operatorname{sen}^2 x = \tilde{C}$$

y con la condición inicial  $y(0) = 2$  se obtiene  $\tilde{C} = 4$ , por lo que otra forma de expresar la solución del problema de valor inicial es

$$y^2(1 - x^2) + \operatorname{sen}^2 x = 4. \quad (4)$$

Esta última expresión puede obtenerse también sustituyendo  $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$  en (2). Es importante observar que (2) y (4) *no* son dos soluciones diferentes del problema de valor inicial, que tiene solución única, sino dos formas diferentes de escribir la misma solución.