CONTROL LATERAL-DIRECCIONAL:

* Viraje horizontal estacionario con resbalamiento. Ejes estabilidad → (1)
* Viraje horizontal simétrico. → Determinar p_s, q_s, r_s. Ejes estabilidad → (2)
* Resbalamiento horizontal rectilíneo → (3)

* Rotura de motor. Vuelo horizontal rectilíneo → (4)
* Rotura de motor. Subida rectilínea estacionaria. Las 3 vistas → (5)
* Rotura de alerón izquierdo. Vuelo rectilíneo horizontal. Viento horizontal CTE. → (6)
* Rotura de flap izquierdo. Vuelo rectilíneo horizontal. → (7)

* Cargas fuera del plano del ala. Momento Cabeceo $C_{mg} \neq 0$. F_a. F_r. Relación mecanismos → (8), (9)
* Acrobata en un ala → (10) $\boxed{13.1}$
* Vuelo a cachillo → (11)

* Velocidad mínima de control direccional (VMC) → (12) y (13)
* Giro únicamente de priñada en z. Tracción de dirección giro libre alrededor de charnela. Tirel → (14)
* Cálculo de coeficientes adimensionales $C_{Y_{\delta_c}}$, $C_{l_{\delta_c}}$, $C_{n_{\delta_c}}$ → (15)
* Cola en V → (16)

* Cambio de ejes (ecuaciones). → (17)

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

CÁTEDRA DE MECÁNICA DEL VUELO 22.09.03

E. Final Septiembre

H43

PROBLEMA 3º

Un avión efectúa un viraje horizontal estacionario con las alas a nivel y con ángulo de resbalamiento, β, conocido.

Suponiendo además que se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas necesarias para la resolución del problema (en particular, las características aerodinámicas se conocen en los ejes estabilidad, siendo $C_{Y0} = C_{l0} = C_{n0} = C_{Y\delta a} = C_{n\delta a} = 0$, los ejes estabilidad no son principales de inercia, etc.), que el empuje de los motores no contribuye a los momentos y está dirigido según el eje x_s, que todos los ángulos que intervienen en el problema (incluido el de resbalamiento) son pequeños, y que ρ y g son constantes conocidas, se pide:

1º) Determinar el radio del viraje R en función del ángulo de resbalamiento y de datos del problema.

2º) Determinar las deflexiones de los mandos, δ_e, δ_a, δ_r, en función del ángulo de resbalamiento y de datos del problema.

3º) Particularizar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores para el caso de resbalamiento nulo.

TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

①

1) $$-W\,\cancelto{0\ (\text{horizontal})}{\operatorname{sen}\theta} + \cancelto{T}{F_{Tx}} + \cancelto{-D}{F_{Ax}} = \frac{W}{g}\left(-rv + \cancelto{0}{qw}\right) \rightsquigarrow -W\operatorname{sen}\theta + T + \overset{-D}{F_{Ax}} =$$

$$W\cos\theta\,\cancelto{0}{\operatorname{sen}\phi} + \cancelto{0}{F_{Ty}} + \cancelto{Y}{F_{Ay}} = \frac{W}{g}(ru - pw) \rightsquigarrow Y = \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{R}$$

$$W\cos\theta\,\cancelto{1}{\cos\phi} + \cancelto{0}{F_{Tz}} + F_{Az} = \frac{W}{g}\left(-q\cancelto{0}{u} + \cancelto{0}{pv}\right) \rightsquigarrow \cancelto{1\ (\text{horizontal})}{W\cos\theta} + \cancelto{L}{F_{Az}} = 0 \;;\; L = W$$

$$R = \frac{W}{g}\cdot\frac{V^2}{Y_A}$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[\cancelto{0}{C_{Y_0}} + C_{Y_\beta}\beta + \cancelto{0}{C_{Y_{\delta a}}\delta_a} + C_{Y_{\delta r}}\delta_r\right] = \frac{W}{g}\frac{V^2}{R} \quad (\mathrm{I})$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[\cancelto{0}{C_{l_0}} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta a}}\delta_a + C_{l_{\delta r}}\delta_r\right] = 0 \quad (\mathrm{II})$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[\cancelto{0}{C_{n_0}} + C_{n_\beta}\beta + \cancelto{0}{C_{n_{\delta a}}\delta_a} + C_{n_{\delta r}}\delta_r\right] = 0 \quad (\mathrm{III})$$

$$\delta_a = \frac{\begin{vmatrix} -C_{l_\beta}\beta & C_{l_{\delta r}} \\ -C_{n_\beta}\beta & C_{n_{\delta r}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{l_{\delta a}} & C_{l_{\delta r}} \\ C_{n_{\delta a}} & C_{n_{\delta r}} \end{vmatrix}} = \frac{-C_{l_\beta}\beta C_{n_{\delta r}} + C_{n_\beta}\beta C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}C_{n_{\delta r}} - C_{n_{\delta a}}C_{l_{\delta r}}} \rightsquigarrow \delta_a = \frac{\beta\left(C_{n_\beta}C_{l_{\delta r}} - C_{l_\beta}C_{n_{\delta r}}\right)}{C_{l_{\delta a}}C_{n_{\delta r}}}$$

$$\delta_r = \frac{\begin{vmatrix} -C_{l_\beta}\beta & C_{l_{\delta a}} \\ -C_{n_\beta}\beta & C_{n_{\delta a}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{l_{\delta a}} & C_{l_{\delta r}} \\ C_{n_{\delta a}} & C_{n_{\delta r}} \end{vmatrix}} = \frac{C_{l_\beta}\beta C_{n_{\delta a}} - C_{l_{\delta a}}C_{n_\beta}\beta}{C_{l_{\delta a}}C_{n_{\delta r}} - C_{n_{\delta a}}C_{l_{\delta r}}} \rightsquigarrow \delta_r = \frac{-C_{l_{\delta a}}C_{n_\beta}}{C_{l_{\delta a}}C_{n_{\delta r}}}\cdot\beta$$

$$\boxed{R = \frac{WV^2}{g}\cdot\frac{2}{\rho V^2 S\left(C_{Y_\beta}\beta - C_{Y_{\delta r}}\cdot\frac{C_{l_{\delta a}}C_{n_\beta}}{C_{l_{\delta a}}C_{n_{\delta r}}}\cdot\beta\right)}}$$

2) $$C_L = C_{L_0} + \cancelto{0\ (\text{Ejes de estabilidad})}{C_{L_\alpha}\alpha} + C_{L_{\delta e}}\delta_e = \frac{2W}{\rho S V^2} \quad (\mathrm{I})$$

$$C_{m_A} = C_{m_0} + \cancelto{0\ (\text{Ejes de estabilidad})}{C_{m_\alpha}\alpha} + C_{m_{\delta e}}\delta_e = 0 \quad (\mathrm{II}) \rightsquigarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_e &= -\frac{C_{m_0}}{C_{m_{\delta e}}} \\ \delta_a &= \frac{\beta\left(C_{n_\beta}C_{l_{\delta r}} - C_{l_\beta}C_{n_{\delta r}}\right)}{C_{l_{\delta a}}C_{n_{\delta r}}} \\ \delta_r &= \frac{-C_{l_{\delta a}}\cdot C_{n_\beta}}{C_{l_{\delta a}}\cdot C_{n_{\delta r}}}\beta \end{aligned}}$$

3) $$\beta = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \delta_e &= -\frac{C_{m_0}}{C_{m_{\delta e}}} \\ \delta_a &= 0 \\ \delta_r &= 0 \end{aligned}}$$

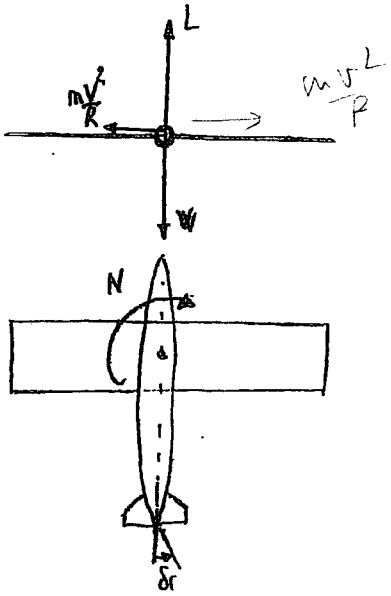
PROBLEMA | 3º Ex-Sept. 03 |

Un avión efectúa un viraje horizontal estacionario con las alas a nivel y con ángulo de resbalamiento, β, conocido.

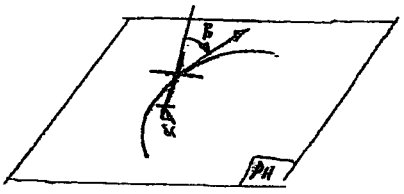
Se pide:

1º) Determinar el radio del viraje R en función del ángulo de resbalamiento y de datos del problema.

Alas a nivel → $\phi = 0$ $\qquad$ β conocido. $\qquad$ Viraje horizontal estacionario



$$\begin{cases} L = W \\ Y = m\dfrac{V^2}{R} \end{cases}$$



- Fuerza lateral (1) $\quad Y = q\cdot S\left(\cancel{C_{Y_0}}^{0} + C_{Y_\beta}\cdot\beta + \cancel{C_{Y_{\delta a}}}^{0}\cdot\delta_a + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta_r\right) = m\dfrac{V^2}{R}$

  $\left(Y = m\dfrac{V^2}{R}\right)$

- Balance (2) $\quad qSb\left(\cancel{C_{l_0}}^{0} + C_{l_\beta}\cdot\beta + C_{l_{\delta a}}\cdot\delta_a + C_{l_{\delta r}}\cdot\delta_r\right) = 0$

  $(L = 0)$

- Guiñada (3) $\quad qSb\left(\cancel{C_{n_0}}^{0} + C_{n_\beta}\cdot\beta + \cancel{C_{n_{\delta a}}}^{0}\cdot\delta_a + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta_r\right) = 0 \longrightarrow \boxed{\delta_r = \dfrac{-C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta r}}}\cdot\beta}$

  $(N = 0)$

Entrando en (1) con δ_r: $\quad q\cdot S\left(C_{Y_\beta}\cdot\beta + C_{Y_{\delta r}}\cdot\dfrac{C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta r}}}\cdot\beta\right) = m\cdot\dfrac{V^2}{R}$

$$\longrightarrow \boxed{R = \frac{m\cancel{V^2}}{\underbrace{q}_{\frac{1}{2}\rho\cancel{V^2}}S\left(C_{Y_\beta} - C_{Y_{\delta r}}\cdot\frac{C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta r}}}\right)\beta} = \frac{2\overset{-\frac{W}{g}}{(m)}}{\rho\cdot S\cdot\left(C_{Y_\beta} - C_{Y_{\delta r}}\frac{C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta r}}}\right)\cdot\beta}}$$

2º) Determinar las deflexiones de los mandos, $\delta_e, \delta_a, \delta_r$ en función del ángulo de resbalamiento y de datos del problema.

De (3) $\longrightarrow$ $\boxed{\delta_r = \frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta_r}} \cdot \beta}$

Entrando con δ_r en (2): $C_{l\beta} \cdot \beta + C_{l\delta_a} \cdot \delta_a + C_{l\delta_r} \cdot \frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta_r}} \cdot \beta = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\delta_a = \frac{-1}{C_{l\delta_a}} \left(C_{l\beta} + \frac{C_{l\delta_r}}{C_{n\delta_r}} \cdot C_{n\beta} \right) \cdot \beta}$$

Para calcular δ_e:

$$C_{m_{cg}} = 0 = C_{m_0} + \cancel{C_{m_\alpha} \cdot \alpha_{wb}}^{\,0} + C_{m\delta} \cdot \delta_e \longrightarrow \delta_e = -\frac{1}{C_{m\delta}} \left(C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha_{wb} \right) \Rightarrow \boxed{\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta}} \left[C_{m_0} + \frac{C_{m_\alpha}}{C_{L_\alpha}} \cdot \frac{2W}{\rho S V^2} \right]}$$

$$L = W = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L \quad ; \quad C_L = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$C_L = \cancel{C_{L_0}}^{\,0} + C_{L_\alpha} \cdot \cancel{\alpha_{wb}}^{\,0} + \cancel{C_{L_{\delta_e}} \cdot \delta_e}^{\,0} = \frac{2 \cdot W}{\rho S V^2} \longrightarrow \alpha_{wb} = \frac{2 \cdot W}{\rho S V^2 C_{L_\alpha}}$$

δ_e

$$\delta_e = -\frac{C_{m_0}}{C_{m\delta_e}} = cte.$$

en ejes estabilidad no debería $\alpha_{wb} = 0$?

3º) Particularizar los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores para el caso de resbalamiento nulo.

$\beta = 0$

$R = \longrightarrow \infty$

$\delta_r = 0$

$\delta_a = 0$

$\delta_e = cte = -\frac{C_{m_0}}{C_{m\delta_e}}$

Z

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 11.06.07

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 2º

Un avión convencional, provisto de un grupo motopropulsor motor alternativo-hélice, está efectuando un viraje horizontal simétrico estacionario con ángulo de balance ϕ y velocidad V, ambos constantes conocidas. El momento cinético de las partes giratorias del grupo motopropulsor está dirigido según el eje x_s y no es despreciable (la velocidad angular de la hélice y de las partes móviles respecto del avión, ω_m, y el momento de inercia de todas esas partes respecto del eje de giro, I_m, son constantes conocidas).

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema. Por ejemplo, el peso del avión es una constante, las características másicas y aerodinámicas están referidas a los ejes estabilidad del viraje (el avión es simétrico másica y aerodinámicamente, los ejes estabilidad no son principales de inercia, etc.); $C_{n_{\beta_s}} = 0$; etc.

b) El empuje producido por el grupo motopropulsor está dirigido según el eje x_s y pasa por el centro de masas del avión; el rendimiento propulsivo de la hélice, η_P, es una constante conocida; y es despreciable el efecto del par motor sobre el equilibrio de momentos del avión.

c) La fuerza aerodinámica lateral es despreciable.

d) Todos los ángulos que intervienen en el problema, excepto ϕ, son pequeños.

e) ρ y g son constantes conocidas.

Se pide:

1º) Determinar la potencia del motor alternativo, P_m, necesaria para este vuelo.

2º) Determinar las tres componentes de la velocidad angular del avión en ejes estabilidad, p_s, q_s, r_s.

3º) Plantear las tres ecuaciones de momentos alrededor del centro de gravedad del avión, en ejes estabilidad.

4º) Determinar las deflexiones de alerones, δ_a, timón de dirección, δ_r, y timón de profundidad, δ_e. Discutir la influencia sobre las mismas del momento cinético de las partes móviles.

TIEMPO CONCEDIDO: $1^h\ 15^m$

1)

$$P_m = \frac{P_u}{\eta_p} = \frac{T \cdot V}{\eta_p}$$

$$T = D = \frac{1}{2} \rho v^2 S' (C_{D0} + K C_L^2)$$

Ejes estabilidad y viraje $\Rightarrow \alpha_{wb} = 0$

$$\boxed{P_m = \frac{\rho v^3 S' (C_{D0} + K C_{L0}^2)}{2 \eta_p}}$$

2)

Viraje horizontal simétrico estacionario:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{k_n} \quad ; \quad \dot{\psi} = cte \ , \quad \dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$$

$$p_s = -\dot{\psi} \operatorname{sen} \theta$$

$$q_s = \dot{\psi} \cos\theta \operatorname{sen} \phi$$

$$r_s = \dot{\psi} \cos\theta \cos\phi$$

$$\left.\begin{aligned} L \operatorname{sen} \phi &= \frac{W}{g} \frac{v^2}{R_c} \\ L \cos\phi &= W \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \phi = \frac{v^2}{g R_c} \Rightarrow R_c = \frac{v^2}{g \operatorname{tg} \phi}$$

$$\dot{\psi} = \frac{v}{R_c} = \frac{g}{v} \operatorname{tg} \phi$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_s &= -\frac{g}{v} \operatorname{tg} \phi \operatorname{sen} \theta \\ q_s &= \frac{g}{v} \operatorname{tg} \phi \cos\theta \operatorname{sen} \phi \\ r_s &= \frac{g}{v} \operatorname{tg} \phi \cos\theta \cos\phi \end{aligned}}$$

$$\delta_a = \frac{2L}{\rho V^2 S b C_{l\delta a}} - \frac{C_{l0}}{C_{l\delta a}} - \frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\left[\frac{2N}{\rho V^2 S b C_{n\delta r}} - \frac{C_{n0}}{C_{n\delta r}}\right] + \left[\frac{C_{l\delta r} C_{np}}{C_{n\delta r}} + C_{lp}\right]\frac{p_s}{C_{l\delta a}} +$$

$$+ \left[\frac{C_{nr} C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}} + C_{lr}\right]\frac{r_s}{C_{l\delta a}}$$

$$C_{mcg} = C_{m0} + C_{m\alpha} \alpha_{wb} + C_{m\delta e}\,\delta e + \underline{C_{mq}\, q} = \frac{2M}{\rho V^2 S c}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\delta_e &= \frac{2M}{\rho V^2 S c\, C_{m\delta e}} - \frac{C_{m0}}{C_{m\delta e}} - \frac{C_{mq}}{C_{m\delta e}}\, q_s \\
\delta_r &= \frac{2N}{\rho V^2 S b\, C_{n\delta r}} - \frac{C_{n0}}{C_{n\delta r}} - \frac{C_{np}}{C_{n\delta r}}\, p_s - \frac{C_{nr}}{C_{n\delta r}}\, r_s \\
\delta_a &= \frac{2\left(C_{n\delta r} L - C_{l\delta r} N\right)}{\rho V^2 S b\, C_{n\delta r} C_{l\delta a}} - \frac{C_{l0}}{C_{l\delta a}} + \frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\frac{C_{n0}}{C_{n\delta r}} + \left(\frac{C_{l\delta r} C_{np}}{C_{l\delta a} C_{n\delta r}} + \frac{C_{lp}}{C_{l\delta a}}\right) p + \left(\frac{C_{l\delta r} C_{nr}}{C_{l\delta a} C_{n\delta r}} + \frac{C_{lr}}{C_{l\delta a}}\right) r
\end{aligned}}$$

11-06-07

3) Momento cinético del grupo motopropulsor:

$$\vec{L_m} = I_m \omega_m \vec{i_s}$$

$$\frac{d\vec{L_m}}{dt} = \vec{\omega_A} \wedge \vec{L_m} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_s & q_s & r_s \\ I_m \omega_m & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r_s I_m \omega_m \\ -q_s I_m \omega_m \end{Bmatrix}$$

$$\vec{G} = \frac{d\vec{L_{AV}}}{dt} + \frac{d\vec{L_m}}{dt}$$

$$L = \cancel{I_x \dot{p}_s} - \cancel{J_{xz} \dot{r}_s} + (I_z - I_y) q_s r_s - J_{xz} p_s q_s$$

$$M = \cancel{I_y \dot{q}_s} - (I_z - I_x) p_s r_s + J_{xz} (p_s^2 - r_s^2) + I_m \omega_m r_s$$

$$N = \cancel{I_z \dot{r}_s} - \cancel{J_{xz} \dot{p}_s} - (I_x - I_y) p_s q_s + J_{xz} q_s r_s + q_s I_m \omega_m$$

$$\boxed{\begin{aligned} L &= (J_z - J_y) q_s r_s - J_{xz} p_s q_s \\ M &= (I_x - I_z) p_s r_s + J_{xz} (p_s^2 - r_s^2) + I_m \omega_m r_s \\ N &= (I_y - I_x) p_s q_s + J_{xz} q_s r_s + I_m \omega_m q_s \end{aligned}}$$

4)

$$C_\ell = C_{\ell o} + \cancel{C_{\ell\beta} \beta} + C_{\ell\delta a} \delta_a + C_{\ell\delta r} \delta_r + \underline{C_{\ell p} p} + \underline{C_{\ell r} r} = \frac{2L}{\rho v^2 S b}$$

$$C_N = C_{no} + \cancel{C_{n\beta} \beta} + \cancel{C_{n\delta a} \delta_a} + C_{n\delta r} \delta_r + \underline{C_{np} p} + \underline{C_{nr} r} = \frac{2N}{\rho v^2 S b}$$

$$\delta_r = \frac{2N}{\rho v^2 S b C_{n\delta r}} - \frac{C_{no}}{C_{n\delta r}} - \frac{C_{np}}{C_{n\delta r}} p_s - \frac{C_{nr}}{C_{n\delta r}} r_s$$

$$\delta_a = \frac{2L}{\rho v^2 S b C_{\ell\delta a}} - \frac{C_{\ell o}}{C_{\ell\delta a}} - \frac{C_{\ell\delta r}}{C_{\ell\delta a}} \left(\frac{2N}{\rho v^2 S b C_{n\delta r}} - \frac{C_{no}}{C_{n\delta r}} - \frac{C_{np}}{C_{n\delta r}} p_s - \frac{C_{nr}}{C_{n\delta r}} r_s \right)$$

$$- \frac{C_{\ell p}}{C_{\ell\delta a}} p_s - \frac{C_{\ell r}}{C_{\ell\delta a}} r_s$$

(2)

1) $T - D = 0$ (I)

$$W \operatorname{sen}\phi = \frac{W}{g} V \dot{\chi} \cos\phi$$

$$-L + W\cos\phi = \frac{-W}{g} V \dot{\chi} \operatorname{sen}\phi$$

a) $L\cos\phi = W \rightsquigarrow C_L = \dfrac{2W}{\rho S V^2 \cos\phi} = \dfrac{2W n}{\rho S V^2} = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha$ (0)

b) $L \operatorname{sen}\phi = \dfrac{W}{g}\cdot\dfrac{V^2}{R}$

$$\dot{\chi} = \frac{V}{R}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_{L_0}^2)$$

$$P_m = \frac{TV}{\eta_p} = \frac{\rho V^3 S (C_{D_0} + K C_{L_0}^2)}{2\eta_p} = \frac{\rho V^3 S \left(C_{D_0} + \frac{4KW^2 n^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}{2\eta_p}$$

$$\cos\phi = \frac{1}{n} \rightsquigarrow \operatorname{sen}^2\phi = 1 - \cos^2\phi = 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$L^2 \operatorname{sen}^2\phi = \frac{W^2}{g^2}\cdot\frac{V^4}{R^2} \rightsquigarrow n^2 \operatorname{sen}^2\phi = \frac{1}{g^2}\cdot\frac{V^4}{R^2} \; ; \; n^2 = 1 + \frac{V^4}{g^2 R^2}$$

$$\boxed{P_m = \frac{\rho V^3 S (C_{D_0} + K C_{L_0}^2)}{2\eta_p} = \frac{\rho V^3 S \left[C_{D_0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\cdot\left(1 + \frac{V^4}{g^2 R^2}\right)\right]}{2\eta_p}}$$

2) $p_s = \cancel{\dot{\phi}}^{\,0\,(\text{estacionario})} - \cancel{\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta}^{\,0}$

$q_s = \cancel{\dot{\theta}\cos\phi}^{\,0} + \dot{\psi}\cos\theta\operatorname{sen}\phi$

$r_s = -\cancel{\dot{\theta}\operatorname{sen}\phi}_{\,0} + \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi$ (1)

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} p_s &= 0 \\ q_s &= \dot{\psi}\operatorname{sen}\phi = \frac{g}{V}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ r_s &= \dot{\psi}\cos\phi = \frac{g}{V}\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \end{aligned}}$$

$\gamma = 0$, $v = \beta = 0$ $\longrightarrow$ Ejes viento = Ejes estabilidad $\begin{cases} \dot{\chi} = \dot{\psi} \\ \phi = \mu \end{cases}$ $\gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \theta = 0$

3) $$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b \left[\cancel{C_{l_0}}^{\,0} + \cancel{C_{l_\beta}\beta}^{\,0} + C_{l_{\delta a}}\delta a + C_{l_{\delta r}}\delta r + \cancel{C_{l_{\hat p}}\hat p}^{\,0} + C_{l_{\hat r}}\hat r\right] = (I_z - I_y)\, q_s \cdot r_s \quad (1)$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b \left[\cancel{C_{n_0}}^{\,0} + \cancel{C_{n_\beta}\beta}^{\,0} + \cancel{C_{n_{\delta a}}\delta a}^{\,0} + C_{n_{\delta r}}\delta r + \cancel{C_{n_{\hat p}}\hat p}^{\,0} + C_{n_{\hat r}}\hat r\right] = J_{xz}\, q_s \cdot r_s + I_m \omega_m q_s \quad (2)$$

$$M_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S c \left[\cancel{C_{m_0}}^{\,0} + \cancel{C_{m_\alpha}\alpha}^{\,0} + C_{m_{\delta e}}\cdot\delta e + C_{m_{\hat q}}\cdot\hat q\right] = -J_{xz}\, r_s^2 + I_m \omega_m r_s \quad (3)$$

$$L_T = I_m \cdot \omega_m \vec{i_s} \; ; \; \frac{dL_T}{dt} = \vec{\omega_m} \wedge \vec{L_T} = \begin{vmatrix} \vec{i_s} & \vec{j_s} & \vec{k_s} \\ p_s & q_s & r_s \\ I_m\omega_m & 0 & 0 \end{vmatrix} = I_m \omega_m r_s \vec{j_s} - I_m \omega_m \cdot q_s \vec{k_s}$$

$$\hat p = \frac{p_s b}{2V} = 0 \; ; \; \hat r = \frac{r_s b}{2V} \; ; \; \hat q = \frac{\bar c}{2V}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

4) (3) $\rightsquigarrow$ $$\boxed{\delta_e = \frac{1}{C_{m\delta_e}}\left[-C_{m_0} - C_{m_q}\hat{q}\cdot\frac{qc}{2V^2}\left(n-\frac{1}{\eta}\right) - \frac{2J_{xz}\,r_s^2}{\rho S V^2 c} + \frac{2I_m\omega_m r_s}{\rho S V^2 c}\right]}$$

(2) $\rightsquigarrow$ $$\boxed{\delta_r = \frac{1}{C_{n\delta_r}}\left[-C_{n_r}\hat{r}\cdot\hat{r} + \frac{2J_{xz}\cdot q_s\cdot r_s}{\rho S V^2 b} + \frac{2I_m\omega_m q_s}{\rho S V^2 b}\right]}$$

(1) $\rightsquigarrow$ $$\boxed{\delta_a = \frac{1}{C_{l\delta_a}}\left[-C_{l_r}\hat{r}\cdot\hat{r} - C_{l\delta_r}\cdot\delta_r + \frac{2(I_z-I_y)\,p_s r_s}{\rho S V^2 b}\right]}$$

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO – E. Final Febrero – A+B+CD 17.02.93

PROBLEMA 3º

Un avión como el que se indica en la figura está provisto de un grupo motopropulsor (motor alternativo + hélice) cuyos efectos sobre los momentos alrededor del centro de gravedad del avión completo no son despreciables.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión. En particular: el avión es simétrico másica y geométricamente; I_m es el momento de inercia de las partes móviles del grupo motopropulsor respecto a su eje de giro; los ejes estabilidad son principales de inercia con $I_x \neq I_y \neq I_z$.

b) La línea de acción de la tracción coincide con el eje x_s (por tanto, pasa por el centro de gravedad del avión y está contenida en su plano de simetría).

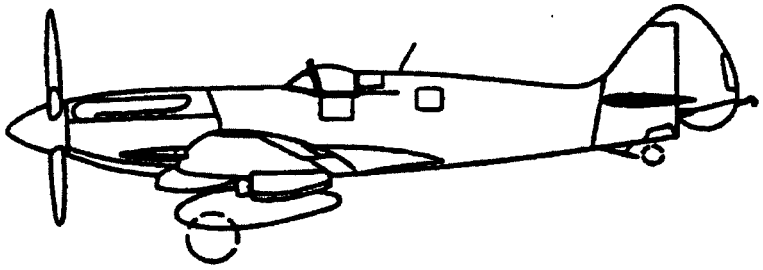
c) El motor alternativo está generando una potencia P, y sus partes móviles y la hélice giran a derechas (vistas por el piloto) con una velocidad angular ω, ambas constantes conocidas.

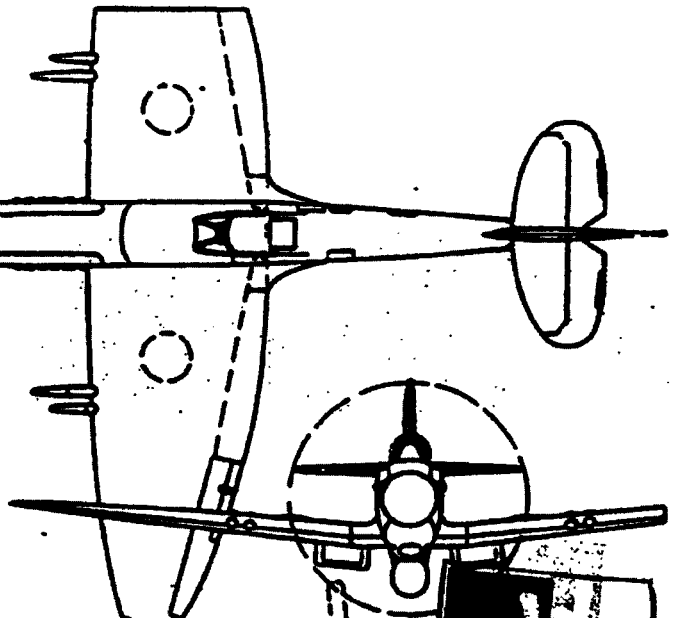
Se pide:

1º) Determinar las componentes de la velocidad angular del avión en ejes estabilidad, p q r, durante un viraje horizontal simétrico estacionario con ángulo de balance ϕ, no necesariamente pequeño, y velocidad V, ambos constantes conocidas. Supóngase que en esta maniobra la fuerza lateral Y es despreciable frente al resto de fuerzas que intervienen en el problema.

2º) Plantear las tres ecuaciones de momentos alrededor del centro de gravedad, en ejes estabilidad, para la maniobra descrita en el apartado anterior, incluyendo tanto los efectos giroscópicos como los debidos al par motor.

3º) Determinar, para la maniobra descrita en el apartado 1º), las deflexiones de alerones, δ_a, timón de dirección, δ_r, y timón de profundidad, δ_e. Discutir la influencia sobre $\delta_a, \delta_r, \delta_e$ de los efectos del grupo motopropulsor, tanto en los virajes a derechas como a izquierdas.





TIEMPO CONCEDIDO: $1^h 15^m$

PROBLEMA DE EXAMEN FINAL FEBRERO 4+B+CD 17-2-93

PROBLEMA 3º

a) Características geométricas, másicas y aerodinámicas conocidas

- Avión simétrico másica y geométricamente. $C_{Y_0} = C_{L_0} = C_{m_0}$
- Im. momento de inercia de las partes móviles del grupo motopropulsor respecto de su eje de giro. Le suponemos paralelo a $x_b \equiv x_s$
- Ejes estabilidad: principales de inercia $I_x \neq I_y = I_z$ $I_{xy} = 0$

b) Línea de acción de la tracción coincide con x_s: No da momentos el empuje

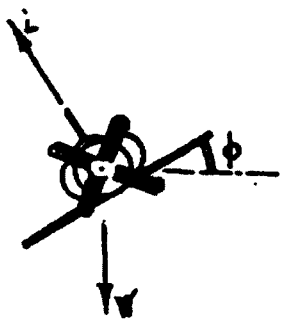
c) Motor de potencia P y velocidad angular ω: Gira a derechas

1º) Vuelo horizontal simétrico estacionario.

Por ser simétrico, el sustentamiento es nulo y el eje y_s es paralelo al y_w.

Por ser eje de estabilidad x_s tiene la dirección de la velocidad en condiciones estacionarias x_s es paralelo a x_w.

Los ejes viento y estabilidad coinciden.



$p_s = \dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta$ Alas a nivel

$q_s = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\phi$ y horizontal

$r_s = \dot{\psi}\cos\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi$ Alas a nivel

Alas a nivel

$\dot{\phi} = \mu$; $\gamma = \theta$; $\psi = \chi$

Ecuación de fuerzas: $\left.\begin{array}{l} L\cos\phi = W \\ \frac{W}{g}\cdot\dot{x}\,v = L\sin\phi \end{array}\right\} \Rightarrow tg\phi = \frac{\dot{x}\cdot v}{g}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x} = \dot{\psi} = \frac{g\,tg\phi}{v}} \qquad \phi = cte \Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = 0}$$

Vuelo horizontal $\Rightarrow \gamma = \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\gamma} = \dot{\theta} = 0}$

$$\boxed{\begin{array}{l} p_s = 0 \\ q_s = \frac{g}{v}\cdot tg\phi\,\sin\phi \\ r_s = \frac{\dot{x}}{v}\cdot\sin\phi \end{array}}$$

2ª) De las ecuaciones de Euler, y teniendo en cuenta que $\vec{c}_{x_i x_j} = 0$ y que $\dot{p}_s = \dot{q}_s = \dot{r}_s = 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \mathcal{L} = (I_z - I_y)\cdot q\cdot r \\ M = (I_x - I_z)\,p\,r \\ N = (I_y - I_x)\,p\,q \end{array}$$

En la ecuación de L (momento alrededor de x_s) tenemos que añadir los términos de inercia debido al grupo motopropulsor $\bar{L}_m = I_m\cdot\bar{\omega}_m \wedge \bar{\omega}$

$$\Rightarrow \boxed{(I_m\cdot\bar{\omega}_m\wedge\bar{\omega}) + \begin{cases} \mathcal{L} = (I_z - I_y)\,\frac{g^2}{v^2}\,tg\phi\,\sin^2\phi \\ M = 0 \\ N = 0 \end{cases}}$$

En vez de expresarlo directamente, vamos a hacer el desarrollo

$$\bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

Es el momento de inercia total del avión; vamos a separarlo en dos partes: El momento de todo el avión sin las partes móviles del motor y el de las partes móviles $\Rightarrow$ $\bar{\bar{I}} = \bar{\bar{I}}_{SM} + \bar{\bar{I}}_M$

El momento cinético total será: $\bar{h} = \bar{h}_{SM} + \bar{h}_M = \bar{\bar{I}}_{SM}\,\bar{\omega}_{SM} + \bar{\bar{I}}_M\,\bar{\omega}_M$

donde $\bar{\omega}_{SM} = (p_s, q_s, r_s)$ y $\bar{\omega} = \bar{\omega}_{SM} + \bar{\omega}_m = (p_s + \omega_m, q_s, r_s)$

$$\Rightarrow \bar{h} = \bar{\bar{I}}_{SM}\cdot\bar{\omega}_{SM} + \bar{\bar{I}}_M(\bar{\omega}_{SM} + \bar{\omega}_m) = (\bar{\bar{I}}_{SM} + \bar{\bar{I}}_M)\,\bar{\omega}_{SM} + \bar{\bar{I}}_M\cdot\bar{\omega}_m$$

$$\Rightarrow \bar{h} = \bar{\bar{I}}\,\bar{\omega}_{SM} + \bar{\bar{I}}_M\cdot\bar{\omega}_m$$

Si el motor está bien equilibrado $\_$ $\bar{\bar{I}}_M = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \bar{\bar{I}}_M\cdot\bar{\omega}_m = I_m\,\omega\,\bar{i}_s$$

Finalmente $$\frac{d\bar{h}}{dt} = \frac{d(\bar{\bar{I}}\bar{\omega}_{SM})}{dt} + \frac{d(I_m\omega\,\bar{i}_s)}{dt}$$

$$\frac{d(\bar{\bar{I}}\bar{\omega}_{SM})}{dt} = \begin{Bmatrix} (I_z - I_y)\,q_s r_s \\ (I_x - I_z)\,p_s r_s \\ (I_y - I_x)\,p_s q_s \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d(I_m\omega\,\bar{i}_s)}{dt} = \cancel{\frac{d(I_m\omega)}{dt}}\,\bar{i}_s + \bar{\omega}_{SM}\wedge\bar{\bar{I}}_m\cdot\bar{\omega}_M = \begin{bmatrix} \bar{i}_s & \bar{j}_s & \bar{k}_s \\ p_s & q_s & r_s \\ I_m\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} = I_m\omega(r_s\bar{j}_s - q_s\bar{k}_s)$$

Sustituyendo todos los términos ⇒

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} &= (I_z - I_y)\frac{g^2}{v^2}\, tg\phi\, sen^2\phi \\ M &= I_m\, \omega \cdot \frac{g}{v}\, sen\,\phi \\ N &= -I_m\, \omega\, \frac{g}{v}\, tg\phi\, sen\phi \end{aligned}}$$

3ª) En las ecuaciones anteriores sustituimos

$$\mathcal{L} = (\cancel{C_{l_0}} + C_{l_p}\cdot \cancel{p} + C_{l_{\delta_a}}\delta_a + C_{l_{\delta_r}}\delta_r)\, q\, S\, b$$

$$M = (C_{m_0} + C_{m_\alpha}\cdot \alpha + C_{m_{\delta_e}}\delta_e)\, q\cdot S\cdot c$$

$$N = (\cancel{C_{n_0}} + C_{n_p}\cdot \cancel{p} + C_{n_{\delta_a}}\cdot\delta_a + C_{n_{\delta_r}}\delta_r)\, q\, S\, b$$

Con $\mathcal{L}$ y N podemos obtener δ_a y δ_r

$$C_{l_{\delta_a}}\cdot\delta_a + C_{l_{\delta_r}}\delta_r = \frac{(I_z - I_y)\, g^2}{q S b\, v^4}\, tg\phi\cdot sen^2\phi = l$$

$$C_{n_{\delta_a}}\cdot\delta_a + C_{n_{\delta_r}}\cdot\delta_r = -\frac{I_m\, \omega\, g}{q S b\cdot v}\, tg\phi\cdot sen\phi = -n$$

$$\Rightarrow \quad \delta_a = \frac{l\, C_{n_{\delta_r}} + n\, C_{l_{\delta_r}}}{\left(C_{l_{\delta_a}} C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_a}}\cdot \frac{C_{l_{\delta_r}}}{C_{l_{\delta_a}}}\right)} = \frac{g}{v}\, tg\phi\, sen\phi\cdot \frac{1}{q S b}\, \frac{\left[(I_z - I_y)\frac{g}{v}\, sen\phi\, C_{n_{\delta_r}} + I_m\omega\, C_{l_{\delta_r}}\right]}{C_{l_{\delta_a}}\cdot C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_a}}\cdot C_{l_{\delta_r}}}$$

$$\delta_r = -\frac{g}{v}\, tg\phi\, sen\phi\, \frac{1}{q S b}\left[(I_z - I_y)\cdot\frac{g}{v}\, sen\phi\, C_{n_{\delta_a}} + I_m\omega\, C_{l_{\delta_a}}\right]\frac{1}{C_{l_{\delta_a}} C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_a}} C_{l_{\delta_r}}}$$

δ_e lo obtenemos con la ecuación de momento de cabeceo:

$$\Rightarrow \quad \frac{I_m \omega \cdot \frac{g}{v} \operatorname{sen}\phi}{q S c \, C_{m\delta_e}} - \frac{C_{m0}}{C_{m\delta_e}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \alpha = \delta_e$$

Donde α lo obtenemos de la ecuación de sustentación

$$L \cos\phi = W \quad \Rightarrow \quad L = q S c \cdot C_L = \frac{W}{\cos\phi} \quad \Rightarrow \quad C_L = \frac{W}{q S c \cos\phi}$$

$$\text{si} \quad C_L = C_{L0} + C_{L\alpha} \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = + \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{W}{q S C_{L\alpha} \cos\phi} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_e = \frac{I_m \omega \frac{g}{v} \operatorname{sen}\phi}{v q S c \cdot C_{m\delta_e}} - \frac{C_{m0}}{C_{m\delta_e}} + \frac{C_{m\alpha} C_{L0}}{C_{m\delta_e} \cdot C_{L\alpha}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}} \cdot \frac{W}{q S C_{L\alpha} \cos\phi}}$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{g \cdot \operatorname{Tg}\phi \operatorname{sen}\phi}{v q S b \left(C_{l\delta_a} \cdot C_{n\delta_r} - C_{l\delta_r} C_{n\delta_a} \right)} \left[(I_z - I_y) \frac{g}{v} \operatorname{sen}\phi \, C_{n\delta_r} + I_m \omega \, C_{l\delta_r} \right]}$$

$$\boxed{\delta_r = - \frac{g \operatorname{tg}\phi \operatorname{sen}\phi}{v g S b \left(C_{l\delta_a} \cdot C_{n\delta_r} - C_{l\delta_r} C_{n\delta_a} \right)} \left[(I_z - I_y) \frac{g}{v} \operatorname{sen}\phi \, C_{n\delta_a} + I_m \omega \, C_{l\delta_a} \right]}$$

En un viraje a derechas $\phi > 0$ $\Rightarrow$ El δ_a que necesitamos es un valor positivo que multiplica a $[(I_z - I_y) \frac{g}{v} \operatorname{sen}\phi \, C_{n\delta_r} + I_m \omega \, C_{l\delta_r}]$

$I_z > I_y$ (Hay mucha más masa alejada del eje x_s que del y_s)

$C_{n\delta_r} > 0$ y $C_{l\delta_r} < 0$ Por tanto $\delta_a = K \cdot [\operatorname{sen}\phi \cdot A - B]$

Sin embargo para $\phi < 0$ $\Rightarrow$ $\delta_a = + K [- A \operatorname{sen}|\phi| + B]$

En un viraje a derechas se necesita ~~y~~ δ_a menor en valor absoluto que en un viraje a izquierdas $K [A \operatorname{sen}|\phi| - B] < K [A \operatorname{sen}|\phi| + B]$

Lo mismo ocurre con δ_2 $\quad C_{n\delta_a} < 0 \quad C_{l\delta_a} > 0$

$$\delta_2 = -K[-C\sin\phi + D]$$

Viraje a derechas $\phi > 0 \rightarrow |\delta_2| = K[D - C\sin|\phi|]$

" " izquierdas $\phi < 0 \rightarrow |\delta_2| = K[D + C\sin|\phi|]$

Se necesita una deflexión de mando mayor en viraje a izquierdas.
En viraje a derechas ayuda el par de inercia del motor.

2

Ingenieros Aeronáuticos
MECÁNICA DEL VUELO I
Javier Crespo

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

25-06-1997 (problema 3 del 97)

Un avión como el que se indica en la figura adjunta efectúa un resbalamiento horizontal rectilíneo estacionario a velocidad V. Los motores proporcionan un empuje de magnitud T en la dirección del eje x_b y que no contribuye a los momentos alrededor del centro de masas.

Este avión presenta un acoplamiento aerodinámico direccional-longitudinal de forma que aparece una contribución adicional al momento de cabeceo de la forma $(\Delta C_m)_\beta = C_{m\beta}\,|\beta|$.

Las características conocidas del avión y los datos del problema son los indicados en la Tabla adjunta, en la que las características aerodinámicas están referidas a los ejes cuerpo de la figura.

Suponiendo que todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños, excepto el ángulo de resbalamiento β, y que puede aplicarse el modelo lineal para el cálculo de acciones aerodinámicas, se pide:

1. Plantear las ecuaciones dinámicas de fuerzas en ejes viento y determinar los ángulos de ataque α y de resbalamiento β.
2. Determinar las deflexiones de los mandos δ_e, δ_r y δ_a necesarias para efectuar el resbalamiento.
3. Determinar el ángulo de balance ϕ y las componentes de las fuerzas aerodinámicas X, Y, Z en los ejes cuerpo indicados.

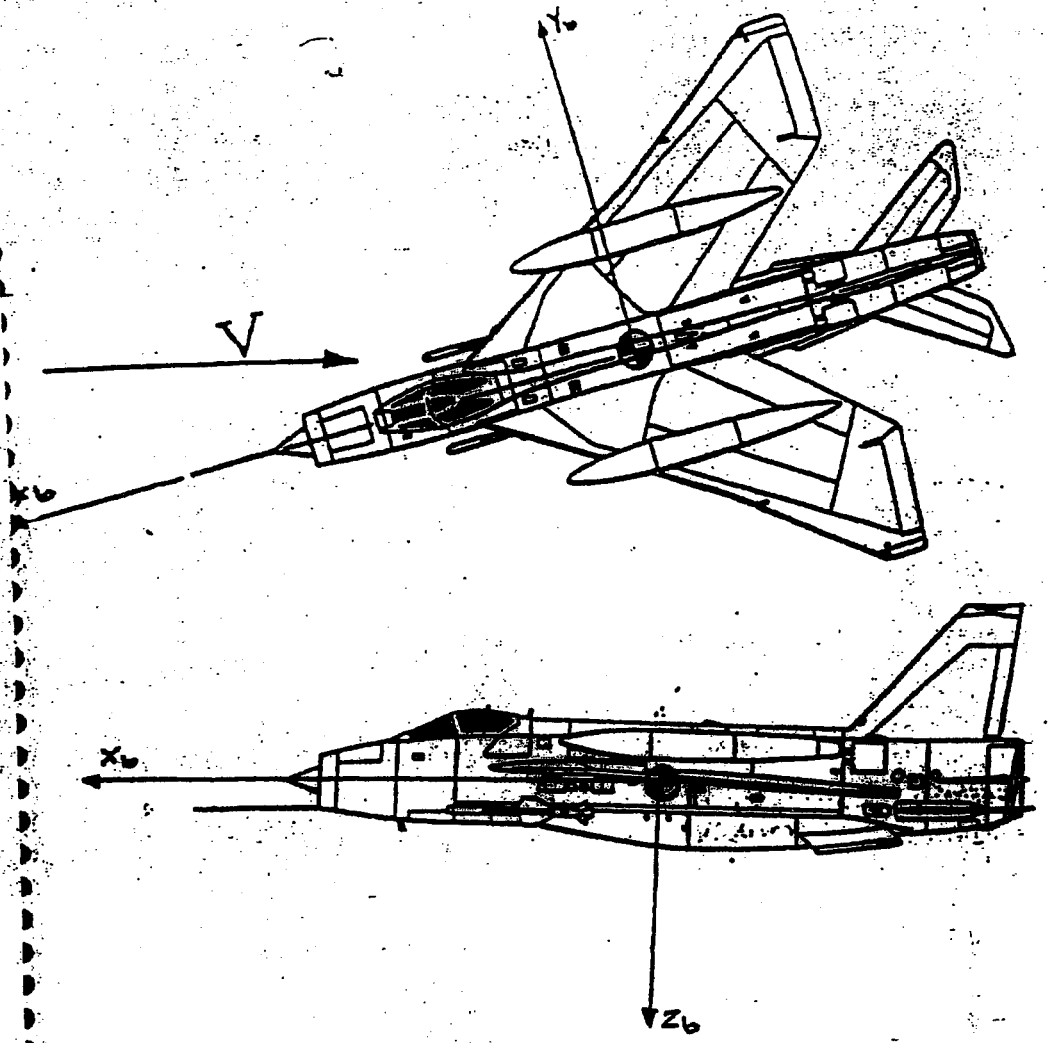
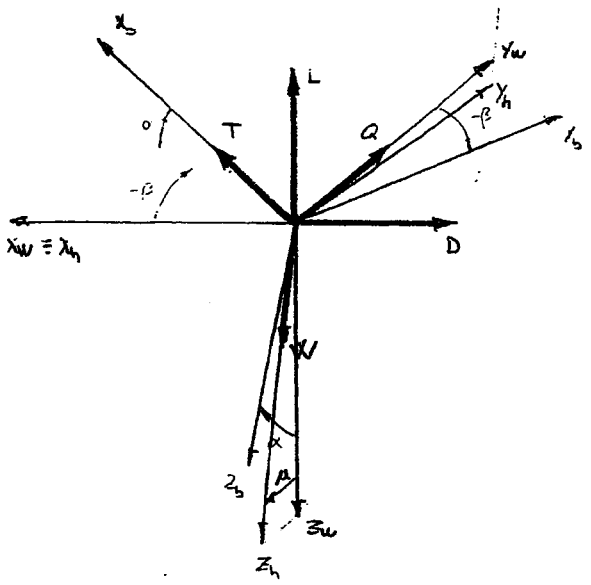


TABLA DE DATOS
• V, T, m, S
• ρ, g
• C_{D_0}, K
• $C_{L_0}, C_{L_\alpha}, C_{L_{\delta_e}} = 0$
• $C_{y_\beta}, C_{y_{\delta_r}}, C_{y_{\delta_a}} = 0$
• $C_{m_0}, C_{m_\alpha}, C_{m_{\delta_e}}, C_{m_\beta}$
• $C_{n_\beta}, C_{n_{\delta_r}}, C_{n_{\delta_a}}$
• $C_{l_\beta}, C_{l_{\delta_r}}, C_{l_{\delta_a}}$
• $C_{y_0} = C_{n_0} = C_{l_0} = 0$

1)



EJES VIENTO

$T\cos\alpha\cos\beta - D = 0$ (1)

$-T\cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta - Q + mg\,\mathrm{sen}\mu = 0$ (2)

$-T\,\mathrm{sen}\alpha - L + mg\cos\mu = 0$ (3)

$\alpha, \beta, \mu \ll 1$

$D = T\cos\beta$ (1)

$L = mg - T\alpha$ (2)

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\, C_{L\alpha}\,\alpha + T\alpha = mg \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{mg}{\frac{1}{2}\rho V^2 S\, C_{L\alpha} + T}}$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{D0} + K C_{L\alpha}^2\,\alpha^2)}{T}}$$

2)

$$C_{m_{cg}} = 0 = C_{m0} + C_{m\alpha}\,\alpha + C_{m\delta}\,\delta_e + C_{m\beta}\,\beta$$

$$\boxed{\delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\,\alpha - \frac{C_{m\beta}}{C_{m\delta}}\,\beta}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L} = 0 &= C_{\mathcal{L}\beta}\,\beta + C_{\mathcal{L}\delta_a}\,\delta_a + C_{\mathcal{L}\delta_r}\,\delta_r \\ \mathcal{N} = 0 &= C_{N\beta}\,\beta + C_{N\delta_a}\,\delta_a + C_{N\delta_r}\,\delta_r \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{C_{N\beta}\,C_{\mathcal{L}\delta_r} - C_{\mathcal{L}\beta}\,C_{N\delta_r}}{C_{\mathcal{L}\delta_a}\,C_{N\delta_r} - C_{N\delta_a}\,C_{\mathcal{L}\delta_r}}\,\beta}$$

$$\delta_r = \frac{-C_{N\beta}\,C_{\mathcal{L}\delta_a} + C_{\mathcal{L}\beta}\,C_{N\delta_a}}{C_{\mathcal{L}\delta_a}\,C_{N\delta_r} - C_{N\delta_a}\,C_{\mathcal{L}\delta_r}}\,\beta$$

3)

$$Y = \frac{1}{2}\rho v^2 S' \left(C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_{\delta r}}\delta_r \right) = \overbrace{\frac{1}{2}\rho v^2 S' \left(C_{Y_\beta} + C_{Y_{\delta r}} \frac{C_{N_\beta} C_{\delta_a} - C_{N_{\delta a}} C_{\delta_\beta}}{C_{N_{\delta r}} C_{\delta_a} - C_{N_{\delta a}} C_{\delta_r}} \right)}^{K} \beta$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \left[L_{bw} \right] \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & -\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & \alpha\operatorname{sen}\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta & \alpha\cos\beta \\ -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta & \alpha\operatorname{sen}\beta \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

$$-D = X\cos\beta + Y\operatorname{sen}\beta + Z\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$-L = -X\alpha + Z \Rightarrow Z = X\alpha - L$$

$$-D = \left(\cos\beta + \alpha^2\operatorname{sen}\beta\right) X + K\beta\operatorname{sen}\beta - L\operatorname{sen}\beta$$

$$\boxed{\begin{aligned} X &= \frac{\frac{1}{2}\rho v^2 S' \left(C_{L_\alpha}\alpha\operatorname{sen}\beta \mp C_{D_0} \mp K C_{L_\alpha}^2 \alpha^2 \right) - K\beta\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta + \alpha^2\operatorname{sen}\beta} \\ Y &= K\beta \\ Z &= \frac{\frac{1}{2}\rho v^2 S' \left(C_{L_\alpha}\alpha\operatorname{sen}\beta \mp C_{D_0} \mp K C_{L_\alpha}^2 \alpha^2 \right) - K\beta\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta + \alpha^2\operatorname{sen}\beta}\alpha - \frac{1}{2}\rho v^2 S' C_{L_\alpha}\alpha \end{aligned}}$$

$$\left.\begin{aligned} Q &= X\operatorname{sen}\beta - Y\cos\beta - Z\alpha\operatorname{sen}\beta \\ mg\mu &= Q + T\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu = \frac{X\operatorname{sen}\beta - Y\cos\beta - Z\alpha\operatorname{sen}\beta + T\alpha\operatorname{sen}\beta}{mg}$$

$$L_{bh} = L_{bw} \cdot L_{wh}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ \phi\theta - \psi & \phi\theta\psi + 1 & \phi \\ \theta + \phi\psi & \theta\psi - \phi & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & -\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & \alpha\operatorname{sen}\beta & 1 \end{bmatrix}}_{L_{bw}} \begin{bmatrix} 1 & \chi & 0 \\ -\chi & 1 & \mu \\ \mu\chi & -\mu & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \phi = \mu\cos\beta$$

③

1) $\theta = \cancel{\gamma}^{\,0\ (\text{horizontal})} + \alpha \Rightarrow \theta = \alpha$ $\qquad$ T según $x_b \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \alpha \\ \nu = \beta \end{cases}$

<u>En ejes viento:</u>

$$T\cos\varepsilon\cos\nu - D - \cancel{mg\,\mathrm{sen}\,\gamma}^{\,0} - \cancel{mV}^{\,0} = 0$$

$$T\cos\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\nu - Q + mg\cancel{\cos\gamma}^{\,1}\,\mathrm{sen}\,\mu + mV(\cancel{\dot\gamma\,\mathrm{sen}\,\mu}^{\,0} - \cancel{\dot\chi\cos\gamma\cos\mu}^{\,0}) = 0$$

$$-T\,\mathrm{sen}\,\varepsilon - L + mg\cancel{\cos\gamma}^{\,1}\cos\mu + mV(\cancel{\dot\gamma\cos\mu}^{\,0} + \cancel{\dot\chi\cos\gamma\,\mathrm{sen}\,\mu}^{\,0}) = 0$$

$$T\cos\beta = D \;;\quad \cos\beta = \frac{D}{T} = \frac{C_{D0} + K C_L^2}{T}$$

$$T\,\mathrm{sen}\,\beta - Q + W\mu = 0$$

$$-T\alpha - L + W = 0 \;;\quad -T\alpha - \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha) + W = 0$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + \cancel{C_{L\delta e}\delta e}^{\,0}$$

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha} - T\right) - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L0} + W = 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L0} - W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha} - T}}$$

$$\cos\beta = \frac{C_{D0} + K(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2}{T}\cdot\frac{1}{2}\rho V^2 S \rightsquigarrow \boxed{\beta = \mathrm{Arccos}\left\{\frac{1}{2}\rho V^2 S - \frac{C_{D0} + K(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2}{T}\right\}}$$

2)

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[\cancel{C_{Y0}}^{\,0} + C_{Y\beta}\beta + \cancel{C_{Y\delta a}\delta a}^{\,0} + C_{Y\delta r}\delta r\right]$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[\cancel{C_{l0}}^{\,0} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r\right] = 0 \qquad (\mathrm{I})$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[\cancel{C_{n0}}^{\,0} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r\right] = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

(I) $\rightarrow$ $\boxed{\delta a = \dfrac{-C_{l\beta}\beta C_{n\delta r} + C_{n\beta}\beta C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}}$

(II) $\rightarrow$ $\boxed{\delta_r = \dfrac{C_{l\beta}\beta C_{n\delta a} - C_{l\delta a}C_{n\beta}\beta}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}}$

$$C_{MA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_e}\delta e + C_{m\beta}\beta = 0$$

$$\boxed{\delta e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\beta}\cdot\beta\right]}$$

3) Matriz de cambio de base de ejes viento a ejes cuerpo:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\beta & \cos\beta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta & -\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\mathrm{sen}\,\beta & -\alpha \\ \mathrm{sen}\,\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & -\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$$X = -D\cos\beta + Q\,\mathrm{sen}\,\beta + \alpha L$$

$$Y = -D\,\mathrm{sen}\,\beta - Q\cos\beta = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{y\beta}\beta + C_{y\delta_r}\delta_r\right) \rightsquigarrow Q = \frac{1}{\cos\beta}\left[\frac{1}{2}\rho v^2 S\left(C_{D0}+K(C_{L0}+C_{L\alpha}\alpha)^2 - C_{y\beta}\beta - C_{y\delta_r}\right.\right.$$

$$Z = -D\alpha\cos\beta + Q\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta - L$$

$$X = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left\{ tg\,\beta\left[\left(C_{D0}+K(C_{L0}+C_{L\alpha}\alpha)^2 - C_{y\beta}\beta - C_{y\delta_r}\delta_r\right)\right] - \cos\beta\left(C_{D0}+K(C_{L0}+C_{L\alpha}\alpha)^2\right) + \alpha\left(C_{L0}+C_{L\alpha}\alpha\right)\right\}$$

$$Z = \frac{1}{2}\rho v^2 S\left\{ tg\,\beta\cdot\alpha\left[C_{D0}+K(C_{L0}+C_{L\alpha}\alpha)^2 - C_{y\beta}\beta - C_{y\delta_r}\delta_r\right] - \cos\beta\cdot\alpha\left(C_{D0}+K(C_{L0}+C_{L\alpha}\alpha)^2\right) - \left(C_{L0}+C_{L\alpha}\alpha\right)\right\}$$

$$\mu = \frac{1}{W}\left\{\frac{\rho v^2 S}{2\cos\beta}\left[C_{D0}+K(C_{L0}+C_{L\alpha}\alpha)^2\right] - C_{y\beta}\beta - C_{y\delta_r}\delta_r - T\,\mathrm{sen}\,\beta\right\}$$

$$L_{bh} = L_{bw}\cdot L_{wh} \rightsquigarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \theta = \alpha \ll 1 \\ \psi = ? \quad \phi = ? \\ X = ? \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ \phi\theta-\psi & \phi\theta\psi+1 & \phi \\ \theta+\phi\psi & \theta\psi-\phi & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\mathrm{sen}\,\beta & -\alpha \\ \mathrm{sen}\,\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & -\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X & 0 \\ -X & 1 & \mu \\ \mu X & -\mu & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\phi = \mu\cos\beta}$$

P.3

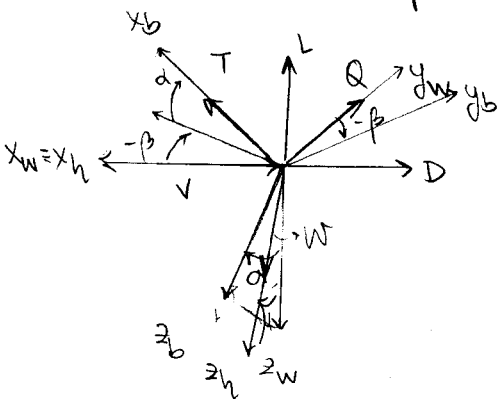
- Resto balan. horizontal rectilíneo estac. a vdac. V ($\gamma = 0$)
- T (motores)
- $(\Delta C_m)_\beta = C_{m_\beta} |\beta|$ [contrib. adic. al mom. de cabeceo]
- Ejes cuerpo
- Ángulos peq., excepto β

DATOS

- V, T, m, S
- ρ, g
- C_{D_0}, K
- $C_{L_0}, C_{L_{\delta e}} = 0$
- $C_{Y_\beta}, C_{Y_{\delta r}}, C_{Y_{\delta a}} = 0$
- $C_{m_0}, C_{m_\alpha}, C_{m_{\delta e}}, C_{m_\beta}$
- $C_{l_\beta}, C_{l_{\delta r}}, C_{l_{\delta a}}$
- $C_{n_\beta}, C_{n_{\delta r}}, C_{n_{\delta a}}$
- $C_{Y_0} = C_{n_0} = C_{l_0} = 0$

1) ¿Ecs. dinámicas en ejes viento? ¿α, β?

Horizontal $\gamma = 0$
Rect $\bar{\omega}_{bw} = \bar{0}$; $\dot{\gamma} = \dot{\chi} = \dot{\mu} = 0$
Estac. $\dot{V} = 0$



$\bar{i}_w$: $T\cos\alpha\cos\beta - D = 0$

$\bar{j}_w$: $-T\cos\alpha\sin\beta - Q + mg\sin\mu = 0$

$\bar{k}_w$: $-T\sin\alpha - L + mg\cos\mu = 0$

ver ecs 3.5
$\alpha = \varepsilon$
$+\beta = \nu$

$\alpha, \mu \ll 1$

$$T\cos\beta - D = 0$$
$$-T\sin\beta - Q + mg\mu = 0$$
$$-T\cdot\alpha - L + mg = 0$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{D}{T} = \frac{\frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D_0} + K C_L^2)}{T}}$$

$C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cdot\alpha$

$$+T\alpha + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L = +mg$$

$$T\cdot\alpha + \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cdot\alpha) = mg$$

$$\alpha\left(T + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L_\alpha}\right) = mg - \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L_0} \rightsquigarrow \boxed{\alpha = \frac{mg - \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L_0}}{T + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L_\alpha}}}$$

2) ¿$\delta_e, \delta_a, \delta_r$? Todas las fuerzas aplicadas en c.d.g. $\Rightarrow$ no dan momento

$$\mathcal{L} = 0 = \cancel{C_{l_0}}_{0} + C_{l_{\delta_a}} \cdot \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \cdot \delta_r + C_{l_\beta} \cdot \beta = 0 \quad (1)$$

$$N = 0 = \cancel{C_{n_0}}_{0} + C_{n_{\delta_a}} \cdot \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \cdot \delta_r + C_{n_\beta} \cdot \beta = 0 \quad (2)$$

(1) $$\delta_a = -\frac{C_{l_\beta}}{C_{l_{\delta_a}}}\beta - \frac{C_{l_{\delta_r}}}{C_{l_{\delta_a}}} \cdot \delta_r$$

(2) $$-C_{n_{\delta_a}} \frac{C_{l_\beta}}{C_{l_{\delta_a}}} \cdot \beta + \delta_r \left(C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_a}} \cdot \frac{C_{l_{\delta_r}}}{C_{l_{\delta_a}}} \right) + C_{n_\beta} \beta = 0$$

$$\hookrightarrow \quad \delta_r = \frac{\left(C_{n_{\delta_a}} \frac{C_{l_\beta}}{C_{l_{\delta_a}}} - C_{n_\beta} \right) \cdot \beta}{C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_a}} \frac{C_{l_{\delta_r}}}{C_{l_{\delta_a}}}} = \boxed{\frac{\left(C_{n_{\delta_a}} C_{l_\beta} - C_{n_\beta} \cdot C_{l_{\delta_a}} \right) \cdot \beta}{C_{n_{\delta_r}} \cdot C_{l_{\delta_a}} - C_{n_{\delta_a}} \cdot C_{l_{\delta_r}}}} = \delta_r$$

(1)
$$\delta_a = -\frac{C_{l_\beta}}{C_{l_{\delta_a}}} \cdot \beta - \frac{C_{l_{\delta_r}}}{C_{l_{\delta_a}}} \cdot \frac{C_{n_{\delta_a}} C_{l_\beta} - C_{n_\beta} C_{l_{\delta_a}}}{C_{n_{\delta_r}} C_{l_{\delta_a}} - C_{n_{\delta_a}} C_{l_{\delta_r}}} \beta =$$

$$= -\frac{\beta}{\cancel{C_{l_{\delta_a}}}} \left[\frac{C_{l_\beta} \cdot C_{n_{\delta_r}} \cancel{C_{l_{\delta_a}}} - \cancel{C_{l_\beta} C_{n_{\delta_a}}} C_{l_{\delta_r}} + \cancel{C_{n_{\delta_a}} C_{l_\beta}} C_{l_{\delta_r}} - C_{n_\beta} \cancel{C_{l_{\delta_a}}} C_{l_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_r}} C_{l_{\delta_a}} - C_{n_{\delta_a}} C_{l_{\delta_r}}} \right] =$$

$$= +\beta \left[\frac{C_{n_\beta} C_{l_{\delta_r}} - C_{l_\beta} C_{n_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_r}} C_{l_{\delta_a}} - C_{n_{\delta_a}} C_{l_{\delta_r}}} \right]$$

$$C_{m_A} = 0 = C_{m_0} + C_{m_{\delta_e}} \cdot \delta_e + \cancel{C_{m_q} \cdot q}^{\,0} + C_{m_\alpha} \cdot \alpha + C_{m_\beta} \cdot |\beta| = 0$$

apdo 1 apdo. 1.

$$\hookrightarrow \quad \boxed{\delta_e = -\frac{C_{m_0}}{C_{m_{\delta_e}}} - \frac{C_{m_\alpha}}{C_{m_{\delta_e}}} \cdot \alpha - \frac{C_{m_\beta}}{C_{m_{\delta_e}}} \cdot |\beta|}$$

3) ¿ϕ, X, Y, Z? T/1 $\quad \delta_3 = -\beta;\ \delta_2 = \alpha;\ \delta_1 = 0$ [pág. 35] (1.13)

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & -\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & +\alpha\sin\beta & 1 \end{bmatrix}}_{\hookrightarrow\ Q^{-1} = Q^T} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= -\cos\beta\, D + Q\sin\beta + \alpha L \\ Y &= -D\sin\beta - Q\cos\beta \\ Z_1 &= -D\alpha\cos\beta - Q\alpha\sin\beta - L \end{aligned}\right\}$$

Apdo. 1

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D_0} + k\cdot\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cdot\alpha\right)^2\right) \\ Q &= mg\mu - T\sin\beta \\ L &= \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cdot\alpha\right) \end{aligned}\right\}$$

$$L_{bh} = L_{bw}\cdot L_{wh}$$

$$L_{bh} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & -\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & \alpha\sin\beta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \chi & 0 \\ -\chi & 1 & \mu \\ \mu\chi & -\mu & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta - \chi\sin\beta - \alpha\mu\chi & \chi\cos\beta + \sin\beta - \alpha\mu & \mu\sin\beta - \alpha \\ -\sin\beta - \chi\cos\beta & -\chi\sin\beta + \cos\beta & \mu\cos\beta \\ \alpha\cos\beta - \alpha\chi\sin\beta + \mu\chi & \alpha\chi\cos\beta + \alpha\sin\beta - \mu & \alpha\mu\sin\beta + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ \psi\theta - \psi & \psi\theta + 1 & \phi \\ \theta + \phi\psi & \theta\psi - \phi & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\phi = \mu\cos\beta}$$

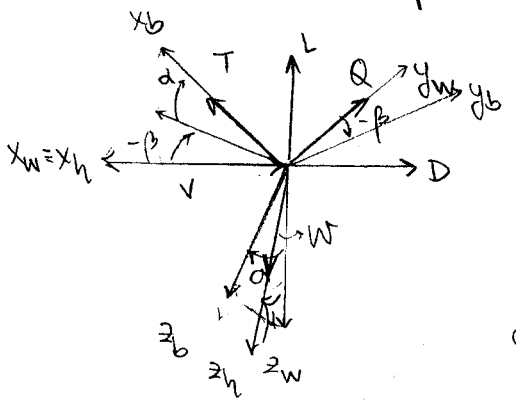
- Restablecim. horizontal rectilíneo estac. a velocid. V ($\gamma = 0$)
- T (motores)
- $(\Delta C_m)_\beta = C_{m_\beta} |\beta|$ [contrib. adic. al momento de cabeceo]
- Ejes cuerpo
- Ángulos peq., excepto β

DATOS

- V, T, m, S
- ρ, g
- C_{D_0}, K
- $C_{L_0}, C_{L_{de}} = 0$
- $C_{Y_\beta}, C_{Y_{dr}}, C_{Y_{da}} = 0$
- $C_{m_0}, C_{m_\alpha}, C_{m_{de}}, C_{m_\beta}$
- $C_{l_\beta}, C_{l_{dr}}, C_{l_{da}}$
- $C_{n_\beta}, C_{n_{dr}}, C_{n_{da}}$
- $C_{Y_0} = C_{n_0} = C_{l_0} = 0$

1) ¿Ecs. dinámicas en ejes viento? ¿α, β?

Horizontal $\gamma = 0$
Rect $\bar{\omega}_{bw} = \bar{0}$; $\dot{\gamma} = \dot{\chi} = \dot{\mu} = 0$
Estac $\dot{V} = 0$



$\bar{i}_w$: $T\cos\alpha\cos\beta - D = 0$

$\bar{j}_w$: $-T\cos\alpha\sin\beta - Q + mg\sin\mu = 0$

$\bar{k}_w$: $-T\sin\alpha - L + mg\cos\mu = 0$

ver ecs. 3.5
$\alpha = \varepsilon$
$+\beta = \nu$

$\alpha, \mu \ll 1$

$$T\cos\beta - D = 0$$
$$-T\sin\beta - Q + mg\mu = 0$$
$$-T\cdot\alpha - L + mg = 0$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{D}{T} = \frac{\frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D_0} + K\cdot C_L^2)}{T}}$$

$C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cdot\alpha$

$$+T\alpha + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_L = +mg$$

$$T\cdot\alpha + \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cdot\alpha) = mg$$

$$\alpha\left(T + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L_\alpha}\right) = mg - \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L_0} \rightsquigarrow \boxed{\alpha = \frac{mg - \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L_0}}{T + \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L_\alpha}}}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= -\cos\beta\, D + Q\sin\beta + \alpha L \\ Y &= -D\sin\beta - Q\cos\beta \\ Z_1 &= -D\alpha\cos\beta - Q\alpha\sin\beta - L \end{aligned}\right\}$$

Apdo. 1

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D_0} + k\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cdot\alpha\right)^2\right) \\ Q &= mg\mu - T\sin\beta \\ L &= \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cdot\alpha\right) \end{aligned}\right\}$$

$$L_{bh} = L_{bw}\cdot L_{wh}$$

$$L_{bh} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & -\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & \alpha\sin\beta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \chi & 0 \\ -\chi & 1 & \mu \\ \mu\chi & -\mu & 1 \end{bmatrix} =$$

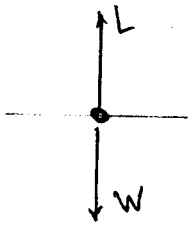
$$= \begin{bmatrix} \cos\beta - \chi\sin\beta - \alpha\mu\chi & \chi\cos\beta + \sin\beta - \alpha\mu & \mu\sin\beta - \alpha \\ -\sin\beta - \chi\cos\beta & -\chi\sin\beta + \cos\beta & \mu\cos\beta \\ \alpha\cos\beta - \alpha\chi\sin\beta + \mu\chi & \alpha\chi\cos\beta + \alpha\sin\beta - \mu & \alpha\mu\sin\beta + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ \phi\theta - \psi & \phi\theta\psi + 1 & \phi \\ \theta + \phi\psi & \theta\psi - \phi & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\phi = \mu\cos\beta}$$

MARIA JESÚS JIMENEZ SALVÁ
nº exp 05299

C_{L_3} = dato

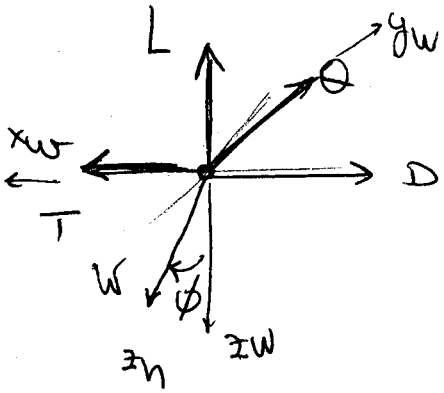
Vuelo haut. rect. estac. con $\beta \neq$



haut $\gamma = 0$

Rec $\dot{\gamma} = \dot{\lambda} = \dot{\mu} = 0$ ó $\dot{\phi} = \dot{\psi} = \dot{\theta} = 0$.

Estac $\dot{V} = 0$



$\boxed{\alpha = 0}$

$$T - D = 0 \quad (1)$$
$$W \sin\beta - Q + W \sin\phi = 0 \quad (2)$$
$$-L + W\cos\phi = 0 \quad (3)$$

$\boxed{L = W}$

$W = \frac{1}{2}$

$$L = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S b \left(C_{l_0} + C_{l_\beta} \cdot \beta + C_{l_{\delta a}} \delta_a + C_{l_{\delta r}} \delta_r \right) = 0$$
$$M = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S c \left(C_{m_0} + C_{m_\alpha} \cdot \cancel{\alpha} + C_{m_{\delta e}} \cdot \delta_e \right) = 0$$
$$N = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S b \left(C_{n_0} + C_{n_\beta} \cdot \beta + C_{n_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta_r \right) = 0$$

$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L_3}$

$W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L_3}$

2) $\frac{d\phi}{d\beta}$, $\frac{d\delta_a}{d\beta}$, $\frac{d\delta_r}{d\beta}$

(4) $C_{l_\beta} \cdot \beta + C_{l_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta_r = 0 \longrightarrow \delta_r = -\frac{C_{l_\beta}}{C_{l_{\delta r}}} \cdot \beta - \frac{C_{l_{\delta a}}}{C_{l_{\delta r}}} \cdot \delta_a$

(6) $C_{n_\beta} \cdot \beta + C_{n_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta_r = 0$

$\hookrightarrow C_{n_\beta} \cdot \beta + \left(C_{n_{\delta a}} - C_{n_{\delta r}} \cdot \frac{C_{l_{\delta a}}}{C_{l_{\delta r}}} \right) \delta_a - C_{n_{\delta r}} \cdot \frac{C_{l_\beta}}{C_{l_{\delta r}}} \cdot \beta$

$$-C_{l_\beta}\cdot\beta - \frac{C_{l_{\delta a}}\left(C_{n_{\delta r}}C_{l_\beta} - C_{n_\beta}C_{l_{\delta r}}\right)}{C_{n_{\delta a}}C_{l_{\delta r}} - C_{n_{\delta r}}\cdot C_{l_{\delta a}}} =$$

$$= -C_{l_\beta}\cdot C_{n_{\delta a}}C_{l_{\delta r}} - \cancel{C_{l_{\delta a}}\cdot C_{n_{\delta r}}C_{l_\beta}} + \cancel{C_{l_\beta}\cdot C_{n_{\delta r}}C_{l_{\delta a}}} + C_{n_\beta}C_{l_{\delta r}}C_{l_{\delta a}}$$

$$\left|C_{l_{\delta r}}\cdot C_{n_{\delta a}}\right| << C_{n_{\delta r}}C_{l_{\delta a}}$$

Apdo3)

$$\frac{d\phi}{d\beta} = \frac{1}{C_{L_S}}\left(C_{y_\beta} + C_{y_{\delta r}}\frac{C_{n_\beta}C_{l_{\delta a}} - C_{l_\beta}C_{n_{\delta a}}}{-C_{n_{\delta r}}C_{l_{\delta a}}}\right)$$

$$\boxed{\frac{d\delta a}{d\beta} = \frac{C_{n_{\delta r}}C_{l_\beta} - C_{n_\beta}C_{l_{\delta r}}}{-C_{n_{\delta r}}C_{l_{\delta a}}}} = -\frac{C_{l_\beta}}{C_{l_{\delta a}}} + \frac{C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta r}}}\frac{C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}}$$

$$\boxed{\frac{d\delta r}{d\beta} = -\frac{C_{l_\beta}\cdot C_{n_{\delta a}} + C_{n_\beta}\cdot C_{l_{\delta a}}}{-C_{n_{\delta r}}C_{l_{\delta a}}}} = +\frac{C_{l_\beta}\cdot C_{n_{\delta a}}}{C_{n_{\delta r}}C_{l_{\delta a}}} - \frac{C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta r}}}$$

Apdo4)

¿ $\frac{C_{l_\beta}}{C_{l_{\delta a}}}$? ¿ $\frac{C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta r}}}$? ¿ $C_{l_{\delta r}}/C_{l_\beta}$? DATO ¿ $C_{n_{\delta a}}/C_{n_\beta}$? DATO

A B C D

$$\frac{d\delta a}{d\beta} = \text{dato}$$

$$\frac{d\delta r}{d\beta} = \text{dato}$$

A D B

$$\frac{C_{l_\beta}}{C_{n_{\delta r}}}\cdot\frac{C_{n_{\delta a}}}{C_{l_{\delta a}}}\cdot\frac{C_{n_\beta}}{C_{n_\beta}}$$

$$\frac{d\delta a}{d\beta} = -A + B.$$

$$\frac{d\delta r}{d\beta} = A\cdot D\cdot B - B$$

$$\begin{array}{ccc} B & C & A \\ C_{n\beta} & C_{l\delta r} & C_{l\beta} \\ C_{n\delta r} & C_{l\delta a} & C_{l\beta} \end{array}$$

$$\frac{d\delta a}{d\beta} = -A + B\cdot C\cdot A = \cancel{-A(B+1)} + A(BC-1)$$

$$\begin{array}{ccc} A & D & B \\ C_{l\beta} & C_{n\delta a} & C_{n\beta} \\ C_{n\delta r} & C_{l\delta a} & C_{n\beta} \end{array} = -B + A\cdot D\cdot B = \frac{d\delta r}{d\beta}$$

$$B(AD-1) = \frac{d\delta r}{d\beta};$$

$$C_1\cdot C_3 = \left(\frac{d\delta a}{d\beta}\right)^2\cdot D$$

$$B = \frac{d\delta r}{d\beta}\cdot\frac{1}{AD-1}$$

$$A\left(\frac{d\delta r}{d\beta}\cdot\frac{1}{AD-1}\cdot C - 1\right) = \frac{d\delta a}{d\beta}$$

$$C_2^2 = \left(\frac{d\delta r}{d\beta}C - \frac{d\delta a}{d\beta}\cdot D + 1\right) = \left(\frac{d\delta r}{d\beta}\right)^2 C - \left(\frac{d\delta a}{d\beta}\right)^2 D + 1 - \frac{d\delta r}{d\beta}\frac{d\delta a}{d\beta}CD + \frac{d\delta r}{d\beta}C - \frac{d\delta a}{d\beta}\cdot D$$

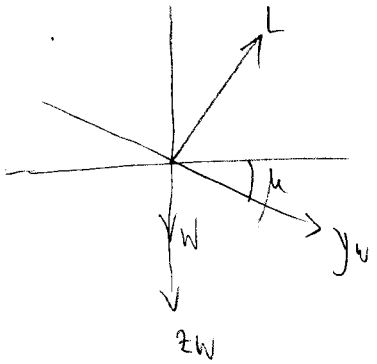
$\cancel{A\cdot D =}$

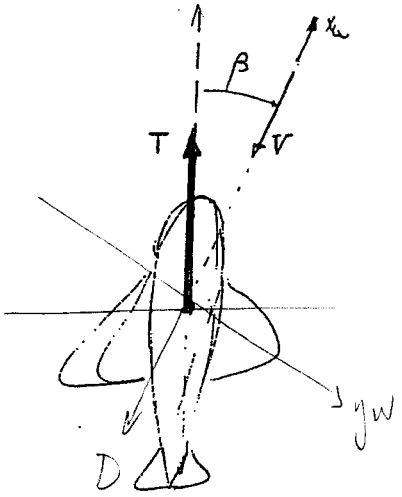
$$A\left(\frac{d\delta r}{d\beta}\cdot C - (AD-1)\right) = \frac{d\delta a}{d\beta}\cdot(AD-1)$$

$$\cancel{A\left(\frac{d\delta r}{d\beta}\right.} \quad A\overbrace{\left(\frac{d\delta r}{d\beta}C - \frac{d\delta a}{d\beta}\cdot D + 1\right)}^{C_2} - A^2\overbrace{\frac{d\delta a}{d\beta}\cdot D}^{C_1} + \overbrace{\frac{d\delta a}{d\beta}}^{C_3} = 0$$

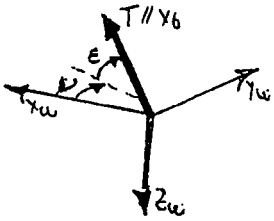
$$A = \frac{-C_2 \pm \sqrt{C_2^2 + 4\cdot C_1\cdot C_3}}{-2\cdot C_1}$$

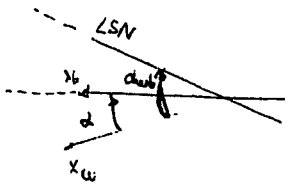
H.24/25-06-1997





$$C_{m_{cg}} = C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha_{wi} + C_{m_\varepsilon}\cdot\delta_e + \underbrace{C_{m_\beta}\cdot|\beta|}_{(\Delta C_m)_\beta}$$





1 PLANTEAR ECNES DINÁMICAS.

- Para las ecs de fuerza → ecs 4.4./3 pero en este caso $\begin{cases} \nu = -\beta \\ \varepsilon = \theta = \alpha \end{cases}$

$$\begin{cases} T\cos\varepsilon\cos\nu - D - mg\,\text{sen}\,\gamma = m\cancel{\dot{V}}^{\,0} \\ T\cos\varepsilon\,\text{sen}\,\nu - Q + mg\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu - mV(-\cancel{\dot{\gamma}}^{\,0}\text{sen}\,\mu + \cancel{\dot{\chi}}^{\,0}\cos\gamma\cos\mu) = 0 \\ -T\,\text{sen}\,\varepsilon - L + mg\cos\gamma\cos\mu + mV(\cancel{\dot{\gamma}}^{\,0}\cos\mu + \cancel{\dot{\chi}}^{\,0}\cos\gamma\,\text{sen}\,\mu) = 0 \end{cases}$$

(vuelo horizontal rectilíneo estacionario)

$$\begin{cases} \nu = -\beta \\ \varepsilon = \alpha \\ \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T\cos\alpha\cos\beta - D = 0 & (1) \\ -T\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta - Q + mg\,\text{sen}\,\mu = 0 & (2) \\ -T\,\text{sen}\,\alpha - L + mg\cos\mu = 0 & (3) \end{cases}$$

- Para ángulos pequeños (excepto el β):

De (3): $-T\cdot\alpha - \underbrace{L}_{qS(C_{L_0}+C_{L_\alpha}\cdot\alpha_{wb})} + mg = 0 \longrightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{-qSC_{L_0} + mg}{T + qSC_{L_\alpha}}}$

$\alpha_{wb} = \alpha + \alpha_{ib}$

incluimos esto cte en el C_{L_0}

- De (1):

$$\boxed{\cos\beta = \frac{qS}{T}\left[C_R + K\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\frac{-qSC_{L_0}+mg}{T+qSC_{L_\alpha}}\right)^2\right]}$$

2 CÁLCULO DE $\delta_e, \delta_r, \delta_a$

- Avión equilibrado: $C_{m_{cg}} = 0$

$$C_{m_{cg}} = C_{m_0} + C_{m_\alpha}\cdot\underset{\text{conocido}}{\alpha} + C_{m_\delta}\cdot\delta_e + C_{m_\beta}\underset{\text{conocido}}{|\beta|} = 0 \longrightarrow \boxed{\delta_e = \frac{1}{C_{m_\delta}}(\ldots)}$$

2.ª Momentos:

- $$\begin{cases} C_{l_\beta}\cdot\overset{\text{conocido}}{\beta} + C_{l_{\delta_r}}\cdot\delta_r + C_{l_{\delta_a}}\cdot\delta_a = 0 \\ C_{n_\beta}\cdot\beta + C_{n_{\delta_r}}\cdot\delta_r + C_{n_{\delta_a}}\cdot\delta_a = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\delta_a = \ldots} \quad \boxed{\delta_r = \ldots}$$

3 CÁLCULO DE ϕ, x, y, z.

- $$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_b = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\,\mathrm{sen}\beta & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta & -\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}}_{=[L_{bw}]} \begin{vmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{vmatrix}_w \longrightarrow \boxed{X, Z, Q}$$

- D, L, Y son conocidas
  - $Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{Y_0} - C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_{\delta_a}}\delta_a + C_{Y_{\delta_r}}\delta_r)$
- Conocido Q $\xrightarrow[\text{en (2)}]{}$ $\boxed{\mu = \frac{T\,\mathrm{sen}\beta + Q}{mg}}$
- Para calcular la ϕ

  - $L_{bh} = L_{bw}\cdot L_{wh}$ y considerando ángulos pequeños:

$$L_{bh} = \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ \phi\theta & \phi\psi+1 & \phi \\ \theta+\psi & \theta\psi-\phi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\mathrm{sen}\beta & -\alpha \\ \mathrm{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & \alpha\,\mathrm{sen}\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \chi & 0 \\ -\chi & 1 & \mu \\ \mu\chi & -\mu & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\phi = \mu\cos\beta}$$

(3)

1)

$$\gamma = 0 \quad \begin{cases} T\cos\varepsilon\cos\nu - D - mg\sin\gamma - m\cancelto{0}{\dot{V}} = 0 \\ T\cos\varepsilon\sin\nu - Q + mg\cos\gamma\sin\mu + mV(\cancelto{0}{\dot{\gamma}}\sin\mu - \cancelto{0}{\dot{\chi}\cos\gamma}\cos\mu) = 0 \\ -T\sin\varepsilon - L + mg\cos\gamma\cos\mu + mV(\cancelto{0}{\dot{\gamma}}\cos\mu + \cancelto{0}{\dot{\chi}\cos\gamma}\sin\mu) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\nu=-\beta]{\varepsilon=\alpha} \begin{cases} T\cos\alpha\cos\beta - D = 0 \; ; \\ T\cos\alpha\sin\beta - Q + mg\sin\mu = 0 \; ; \\ -T\sin\alpha - L + mg\cos\mu = 0 \; ; \quad -T\alpha - L + mg = 0 \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)$$

$$\alpha\left(-T + \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha}\right) = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L0} - mg \rightsquigarrow \boxed{\alpha = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L0} - mg}{\frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L\alpha} - T}}$$

$$T\cos\beta = D \rightsquigarrow \boxed{\cos\beta = \frac{\frac{1}{2}\rho V^2 S}{T}\left[C_{D0} + K(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)^2\right]}$$

2)

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e + C_{m\beta}\beta = 0$$

$$\boxed{\delta e = -\frac{1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\beta}\beta\right]}$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\,(\cancelto{0}{C_{l0}} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r) = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\,(\cancelto{0}{C_{n0}} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r) = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\,(\cancelto{0}{C_{y0}} + C_{y\beta}\beta + C_{y\delta a}\cancelto{0}{\delta a} + C_{y\delta r}\delta r) = Y$$

$$\boxed{\delta r = \frac{C_{n\beta}C_{l\delta r} - C_{l\beta}C_{n\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\beta}$$

$$\boxed{\delta a = \frac{C_{n\beta}C_{l\delta a} - C_{l\beta}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\beta}$$

3)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & -\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \alpha\cos\beta & \alpha\sin\beta & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & \alpha\cos\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta & \alpha\sin\beta \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -D = x\cos\beta + y\sin\beta + z\alpha\sin\beta \\ -L = -x\alpha + z \Rightarrow z = x\alpha - L \\ -D = (\cos\beta + \alpha^2\sin\beta)x + K\beta\sin\beta - L\sin\beta \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{1}{\cos\beta + \alpha^2\sin\beta}\cdot\left[\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{L\alpha}\alpha\sin\beta - C_{D0} - K C_{L\alpha}^2\alpha^2\right) - K\beta\sin\beta\right] \\ y &= K\beta \end{aligned}}$$

$$\mu = \frac{1}{mg}\left[\alpha \sin\beta - y\cos\beta - z\alpha\sin\beta + T\alpha\sin\beta\right]$$

$$\phi = \mu G \beta$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO – 2º E. Parcial – B+CD 06.02.93

PROBLEMA 2º

Un avión provisto de cuatro turborreactores, cuyas características aerodinámicas geométricas y másicas se consideran conocidas (en particular, el avión es completamente simétrico y $C_{Y\delta a}=0$), se encuentra en condiciones de vuelo horizontal rectilíneo estacionario sin resbalamiento y con empuje nulo en el motor exterior izquierdo.

Se pide:

1º) Determinar la velocidad mínima a la que es posible mantener el avión en vuelo en las condiciones indicadas.

2º) Determinar $\delta a, \delta r, \delta e$ para la velocidad calculada en el apartado anterior.

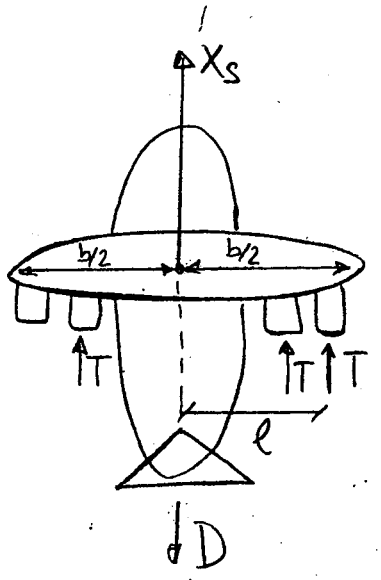
3º) En el caso de que sea necesario volar con un ángulo de balance ϕ, determinar ϕ en función de la velocidad de vuelo.

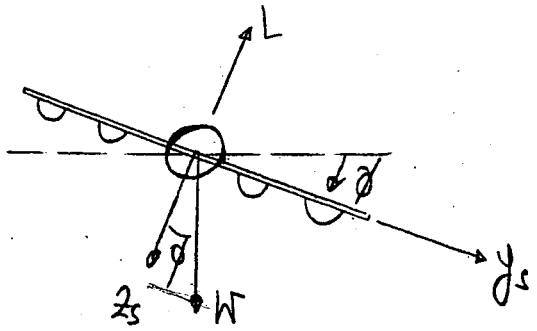
TIEMPO CONCEDIDO : 45^m

$\boxed{6\text{-}02\text{-}1993}$ (PROBLEMA 2 / 2-E. PARCIAL B + CD)

- Avión es completamente simétrico $C_{y_0} = C_{l_0} = C_{n_0} = 0$
- $C_{y\delta_a} = 0$
- VUELO HORIZONTAL RECTILÍNEO ESTACIONARIO, $\beta = 0$, $T = 0$ en el motor exterior izquierdo.

1)





$$3T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D_0} + K C_L^2) \; ; \quad V = \sqrt{\frac{6T}{\rho S (C_{D_0} + K C_L^2)}}$$

Si $C_L = C_{L_{MAX}} \rightarrow V = V_{MIN} \rightarrow$ $\boxed{V_{MIN} = \sqrt{\frac{6T}{\rho S (C_{D_0} + K C_{L_{MAX}}^2)}}}$

2) $Y + W \operatorname{sen}\phi = 0$

$$\boxed{Y = qS(\underbrace{C_{y_0}}_{0} + \underbrace{C_{y\beta}\beta}_{0} + \underbrace{C_{y\delta_a}\delta_a}_{0} + C_{y\delta_r}\delta_r)}$$

$$qS C_{y\delta_r}\delta_r + W \operatorname{sen}\phi = 0 \rightarrow \delta_r = -\frac{W \operatorname{sen}\phi}{qS C_{y\delta_r}}$$

Del equilibrio del peso y la sustentación: $qS = \frac{3T}{C_{D_0} + K C_{L_{MAX}}^2}$

$$L = W\cos\phi \rightarrow \cos\phi = \frac{L}{W} = \frac{qS C_{L_{MAX}}}{W} = \frac{3T \cdot C_{L_{MAX}}}{W(C_{D_0} + K C_{L_{MAX}}^2)}$$

Por tanto:

$$\delta_r = -\frac{W(C_{D_0} + K C_{L_{MAX}}^2)}{3T \cdot C_{y\delta_r}} \sqrt{1 - \left(\frac{3T\, C_{L_{MAX}}}{W(C_{D_0} + K C_{L_{MAX}}^2)}\right)^2} = +\frac{C_{L_{MAX}}}{C_{y\delta_r}} \sqrt{1 - \left(\frac{W(C_{D_0} + K C_{L_{MAX}}^2)}{3T\, C_{L_{MAX}}}\right)^2}$$

- Equilibrio de momentos de balance:

$$\boxed{\mathcal{L}=0=qSb\,(\cancel{C_{\ell_0}}+C_{\ell_{\delta a}}\delta_a+C_{\ell_{\delta r}}\delta_r+\cancel{C_{\ell_\beta}\beta})=0} \rightarrow \delta_a=-\frac{C_{\ell_{\delta r}}\delta_r}{C_{\ell_{\delta a}}}$$

$$\boxed{\delta_a=-\frac{C_{\ell_{\delta r}}}{C_{\ell_{\delta a}}}\frac{C_{L_{MAX}}}{C_{y_{\delta r}}}\sqrt{1-\left(\frac{W(C_{D_0}+KC_{L_{MAX}}^2)}{3TC_{L_{MAX}}}\right)^2}}$$

- Equilibrio de momentos de guiñada:

$$\boxed{N_{TOTAL}=N+(-T\cdot\ell)=0}$$

$$*\ N=qSb\,(\cancel{C_{n_0}}+\cancel{C_{n_\beta}\beta}+C_{n_{\delta a}}\delta_a+C_{n_{\delta r}}\delta_r)$$

Por tanto: $qSb\,(C_{n_{\delta a}}\delta_a+C_{n_{\delta r}}\delta_r)-T\cdot\ell=0 \quad (*)$

De aquí sacamos otra relación entre δ_a y δ_r que no tiene porqué cumplirse, por tanto, hay fuerza lateral y el vuelo horizontal no será rectilíneo, por ello $C_{L_{MAX}}$ NO DETERMINA V_{MIN}, a no ser que consideremos T como incógnita (la necesitamos para que $3T=D$)

$$\text{De } (*) \quad \ell=\frac{+3b}{(C_{D_0}+KC_{L_{MAX}}^2)}\left(-C_{n_{\delta a}}\frac{C_{\ell_{\delta r}}}{C_{\ell_{\delta a}}}\frac{C_{L_{MAX}}}{C_{y_{\delta r}}}+C_{n_{\delta r}}\frac{C_{L_{MAX}}}{C_{y_{\delta r}}}\right)\sqrt{1-\left(\frac{W(C_{D_0}+KC_{L_{MAX}}^2)}{3TC_{L_{MAX}}}\right)^2}$$

- Momento de cabeceo (vuelo equilibrado):

$$C_{m_g}=0=C_{m_0}+C_{m_\alpha}\alpha+C_{m_\delta}\delta_e$$

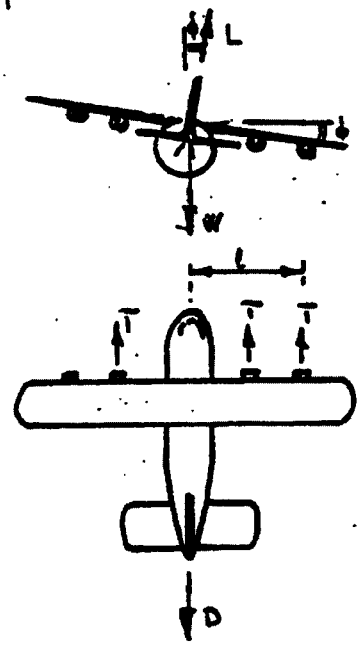
$$\hookrightarrow \boxed{\delta_e=-\frac{C_{m_0}}{C_{m_\delta}}-\frac{C_{m_\alpha}}{C_{m_\delta}}\alpha_{MAX}}$$

PROBLEMA DE EXAMEN 2º PARCIAL B+CD 6.2.93

PROBLEMA 2º

- Avión con cuatro turborreactores
- Características aerodinámicas, geométricas y másicas conocidas
  (Avión simétrico → $C_{Y_\beta} = C_{l_\beta} = C_{n_\beta} = 0$ y $C_{Y_p} = 0$)
- Vuelo horizontal estabilizado estacionario
- $\beta = 0$
- Empuje nulo en el motor exterior izquierdo

1º Si no hay balanceo, para equilibrar la asimetría, tiene que haber balance



El avión se mantiene horizontal estable y estacionario mientras el empuje compense a la asimetría y haya sustentación → Límite lo marca $C_{L_{MAX}}$

(2) $3T = D = qSC_D = qS(C_{D_0} + KC_L^2)$

Para $C_{L_{MAX}}$ ⇒ $\boxed{q = \dfrac{3T}{S(C_{D_0} + KC_{L_{MAX}}^2)}}$

⇒ $\boxed{U_{MAX} = \sqrt{\dfrac{6T}{\rho S(C_{D_0} + KC_{L_{MAX}}^2)}}}$

2º) De las ecuaciones de fuerzas y momentos laterales-direccionales

$Y + L \operatorname{sen}\phi = 0 \Rightarrow qS(C_{Y_{\delta_R}} \cdot \delta_R) + qSC_L \operatorname{sen}\phi = 0$

En esta ecuación $C_{Y_\beta} = C_{Y_{\delta a}} = 0$ $\beta = 0$

$\Rightarrow$ Para la velocidad mínima $C_L = C_{L_{MAX}}$

y $\sin\phi$ lo obtenemos del equilibrio de pesos y sustentación:

(1) $L\cos\phi = W \Rightarrow qSC_{L_{MAX}}\cos\phi = W \Rightarrow \cos\phi = \frac{W}{qSC_{L_{MAX}}}$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\phi = \frac{W(C_{D_0} + KC_{L_{MAX}}^2)}{3T\,C_{L_{MAX}}}} \qquad qS = \frac{3T}{C_D}$$

(3) $Y = -L\sin\phi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \delta_e = -\frac{C_{L_{MAX}}\sin\phi}{C_{Y_{\delta e}}} \Rightarrow \boxed{\delta_e = -\frac{C_{L_{MAX}}}{C_{Y_{\delta e}}}\sqrt{1-\left(\frac{W C_{D_{MAX}}}{3T C_{L_{MAX}}}\right)^2}}$$

Equilibrio de momento de balanceo $\Rightarrow$

(4) $\tilde{L} = 0 = qSb\,(C_{l_{\delta a}}\delta_a + C_{l_{\delta e}}\delta_e) \Rightarrow \delta_a = -\frac{C_{l_{\delta e}}}{C_{l_{\delta a}}}\delta_e$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_a = \frac{C_{l_{\delta e}} C_{L_{MAX}}}{C_{l_{\delta a}} C_{L_{\delta e}}}\sqrt{1-\left(\frac{W C_{D_{MAX}}}{3T C_{L_{MAX}}}\right)^2}}$$

Equilibrio de momento de guiñada:

(5) $-T\cdot l + qS\frac{\cancel{x}}{b}(\delta_a C_{n_{\delta a}} + C_{n_{\delta e}}\delta_e) = 0$

$$\Rightarrow T\cdot l = \frac{3T}{C_{D_{MAX}}}\frac{\cancel{x}}{b}(C_{n_{\delta a}}\delta_a + C_{n_{\delta e}}\delta_e)$$

Hay una relación más entre δ_a y δ_e que no tiene por qué cumplirse por tanto hay fuerza lateral y el vuelo horizontal no será estacionario.

$C_{L_{MAX}}$ no determina v_{MIN}, a no ser que consideramos T como incógnita, la necesaria para que $\delta T = 0$ sea. $3T = D$

$\rightarrow$ lo dejamos hecho!

Las ecuaciones que utilizamos son:

$$qS C_L \cos\phi = W \quad (1)$$

$$3T = qS(C_{D0} + KC_L^2) \quad (2)$$

$$qS C_{Y\delta_e}\delta_e + qS C_L \operatorname{sen}\phi \Rightarrow C_{Y\delta_e}\delta_e + C_L \operatorname{sen}\phi = 0 \quad (3)$$

$$C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_e}\delta_e = 0 \quad (4)$$

$$Ti = qSc(C_{n\delta_a}\delta_a + C_{n\delta_e}\delta_e) \quad (5)$$

Incógnitas: $q, \phi, C_L, \delta_e, \delta_a, T$

Entre (1) y (2) podemos establecer una relación y la incógnita T es

$$3c(C_{n\delta_a}\delta_a + C_{n\delta_e}\delta_e) = i(C_{D0} + KC_L^2) \quad (6)$$

Con (3), (4) y (5) podemos calcular $q, \phi, \delta_e, \delta_a, C_L$, una vez que fijamos una de las incógnitas, por que esta alcanza un valor máximo concreto.

En nuestro caso si $C_L = C_{Lmax}$ se debe cumplir que $\delta_e < \delta_{e\,max}$ y $\delta_a < \delta_{a\,max}$ y finalmente al obtener el valor de T $T < T_{max}$

$$i = \frac{3c}{C_{Dmax}}\left(C_{n\delta_a}\cdot\frac{C_{l\delta_e}C_{Lmax}}{C_{y\delta_a}C_{l\delta_a}} - C_{n\delta_e}\cdot\frac{C_{Lmax}}{C_{y\delta_e}}\right)\sqrt{1-\left(\frac{WC_{Dmax}}{3TC_{Lmax}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{WC_{Dmax}}{3C_{Lmax}\sqrt{1-\left[\dfrac{iC_{Dmax}/3c}{\dfrac{C_{Lmax}}{C_{y\delta_e}}\left(C_{n\delta_a} - C_{n\delta_e}\dfrac{C_{l\delta_a}}{C_{l\delta_e}}\right)}\right]^2}}}$$

δ_e se calcula con la ecuación de momento de cabeceo; en vuelo equilibrado $C_{mcg} = 0$

$$\Rightarrow 0 = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta_e$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}} \cdot \alpha_{MAX}}$$ y α_{MAX} es el correspondiente a $C_{L\,MAX}$

3ª) Dividiendo ③ entre ①: $\frac{C_{Y_\beta}}{W} = -\frac{\sin\phi}{qS\cos\phi} \Rightarrow tg\phi = -q\left(\frac{S}{W}\right) C_{Y_\beta}\delta_e$

Tenemos sacado ② de la gráfica: $C_{Y_{\delta_a}}\delta_a - C_{Y_{\delta_r}}\delta_r = \frac{2C_D}{S}$

y operando con esta ecuación y ③ $\Rightarrow \delta_r = \dfrac{\frac{2}{S}C_D}{C_{Y_{\delta_r}} - C_{Y_{\delta_a}}\frac{C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}}}$

$$\Rightarrow tg\phi = -q\left(\frac{S}{W}\right) C_{Y_{\delta_r}} \frac{\frac{2}{S}\left[C_{D_0} - K\left(\frac{W}{qS}\frac{1}{\cos\phi}\right)^2\right]}{C_{Y_{\delta_r}} - C_{Y_{\delta_a}}\frac{C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}}}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{tg\phi}{q}\left(\frac{W}{S}\right)\right] = -\frac{C_{Y_{\delta_r}}\frac{2}{S}}{C_{Y_{\delta_r}} - C_{Y_{\delta_a}}\frac{C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}}} \cdot \left[C_{D_0} + K\left(\left(\frac{W}{S}\right)\frac{1}{q}\frac{1}{\cos\phi} + \left(\frac{W}{qS}\right)^2\right)\right]$$

Si $\frac{tg\phi}{q}\cdot\frac{W}{S} = X$ $\qquad A = -\dfrac{\frac{2}{S}C_{Y_{\delta_r}}}{C_{Y_{\delta_r}} - C_{Y_{\delta_a}}\cdot\frac{C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}}}$

$$\Rightarrow X = A\left[C_{D_0} + KX^2 + K\left(\frac{W}{qS}\right)^2\right] \Rightarrow KX^2 - \frac{X}{A} + C_{D_0} + K\left(\frac{W}{qS}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow X = +\frac{1}{2AK} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2AK}\right)^2 - \left(\frac{W}{qS}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{tg\phi = \frac{q}{W/S}\left(\frac{1}{2AK} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2AK}\right)^2 - \left(\frac{W/S}{q}\right)^2}\right)}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 21.06.06

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 3º

Un avión provisto de cuatro turborreactores, cada uno de los cuales proporciona en condiciones nominales el mismo empuje, se encuentra en condiciones de vuelo horizontal rectilíneo estacionario sin resbalamiento y con el motor exterior derecho parado.

Suponiendo que se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, el avión es completamente simétrico, son datos W, S, ρ, $C_{L\delta e} = C_{Y\delta a} = 0$, los coeficientes de la polar parabólica C_{D0} y k, etc.), el empuje de cada motor está dirigido según el eje x_w y no contribuye ni al momento de cabeceo ni al de balance, y que, en el caso de que sea necesario volar con ángulo de balance, este es pequeño, se pide:

1º) Determinar la velocidad mínima, V_{min}, a la que se puede mantener el avión en vuelo en las condiciones indicadas, suponiendo que esta venga limitada por la máxima o la mínima deflexión del timón de dirección, δ_{rmax} o δ_{rmin}.

2º) Determinar las deflexiones de los mandos, δ_a, δ_e y δ_r, para la velocidad calculada en el apartado 1º).

3º) En el caso de que sea necesario volar con ángulo de balance, determinar este ángulo ϕ en función de la velocidad de vuelo.

TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

④

1) $T\cancel{\cos\varepsilon}\,\cancel{\cos\nu} - D - mg\cancel{\operatorname{sen}\gamma} - m\cancel{\dot{V}} = 0$

2) $T\cos\varepsilon\,\operatorname{sen}\nu - Q + mg\cancel{\cos\gamma}\operatorname{sen}\mu + mV(\cancel{-r_w}) = 0$

3) $-T\cancel{\operatorname{sen}\varepsilon} - L + mg\cancel{\cos\gamma}\cos\mu + mV\cancel{q_w} = 0$

Eje viento

Vuelo $\begin{cases} \gamma = 0 \\ \dot{V} = 0 \\ q_w = 0 = r_w \\ \beta = 0 \end{cases}$

T según x_w ; T_{re} = Empuje de cada motor

$T - D = 0 \rightsquigarrow T = D = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_D = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0} + K C_L^2)$; $V_{MIN} = \sqrt{\frac{6 T_{re}}{\rho S V^2 (C_{D0} + K C_{L_{MAX}}^2)}}$

$-Q + W\operatorname{sen}\mu = 0 \rightsquigarrow Q = W\operatorname{sen}\mu$

$-L + W\cos\mu = 0$

$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta e}\delta_e = \frac{2W\cancel{\cos\mu}}{\rho S V} \rightsquigarrow \alpha = \alpha_0 + \frac{2W\cancel{\cos\mu}}{\rho S C_{L\alpha} V^2}$

$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S(\cancel{C_{Y0}} + \cancel{C_{Y\beta}\beta} + \cancel{C_{Y\delta a}\delta a} + C_{Y\delta r}\delta r) = W\mu \rightsquigarrow \boxed{\mu = \frac{\rho V^2 S}{2W} C_{Y\delta r}\delta r}$

$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S b(\cancel{C_{l0}} + \cancel{C_{l\beta}\beta} + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r) = 0$ (I) $\rightsquigarrow \delta a = -\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\delta r$

$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n(\cancel{C_{n0}} + \cancel{C_{n\beta}\beta} + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r) = -T_{re}\ell$ (II)

$\frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n\left[-\frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\delta r + C_{n\delta r}\delta r\right] = -T_{re}\ell$; $\frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n\left[\delta r\left(C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right)\right] = -T_{re}\ell$

$$\delta_r = \frac{-\cancel{\frac{1}{2}\rho S V^2}\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)\ell\cdot\frac{1}{4}}{\cancel{\frac{1}{2}\rho S V^2} b\cdot\left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]} = \frac{\left(-C_{D0} - \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)\ell\cdot\frac{1}{4}}{b\left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]} = \frac{\rho^2 S^2 V^4(-C_{D0} - 4KW^2)\ell\cdot\frac{1}{4}}{b\cdot\left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]}$$

$$V^4 = \frac{4b\cdot\left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]\delta r}{\rho^2 S^2 \ell(-C_{D0} - 4KW^2)} \rightsquigarrow \boxed{V_{MIN} = \sqrt[4]{\frac{4b\left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]\delta r_{MIN}}{\rho^2 S^2 \ell(-C_{D0} - 4KW^2)}}}$$

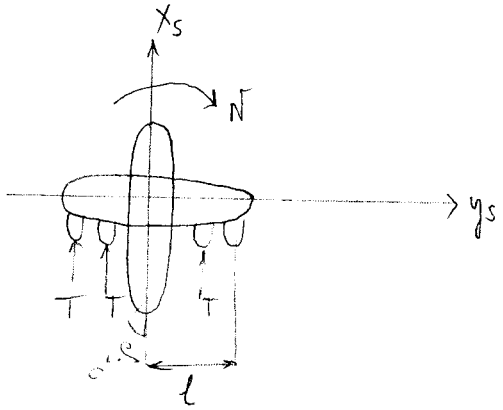
$$\boxed{\begin{aligned} \delta_r &= \delta_{r_{MIN}} \\ \delta_a &= -\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\delta_{r_{MIN}} \end{aligned}}$$

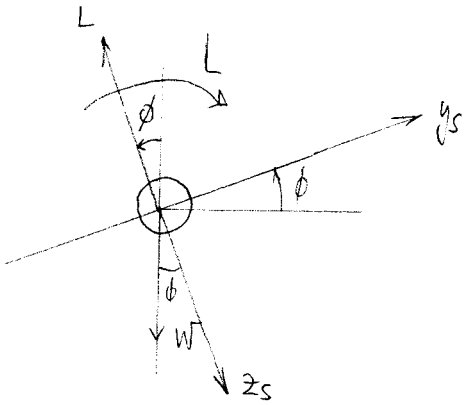
$C_{M_A} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e = 0 \rightsquigarrow \delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha\right]$

$$\alpha_{MAX} = \alpha_0 + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V_{MIN}^2} = \alpha_0 + \frac{\cancel{2W}}{\cancel{\rho S} C_{L\alpha}\left(\frac{\cancel{4}b\cdot\left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]\delta r_{MIN}}{\cancel{\rho^2 S^2}\ell(-C_{D0} + 4KW^2)}\right)^{1/2}} = \alpha_0 + \frac{W\ell(-C_{D0} + 4KW^2)}{2b C_{L\alpha}\left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]\delta_{r_{MIN}}}$$

$$\boxed{\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + \frac{W\ell(-C_{D0} + 4KW^2)^{1/2}}{b^{1/2} C_{L\alpha}\left[C_{n\delta r} - \frac{C_{l\delta r}C_{n\delta a}}{C_{l\delta a}}\right]\delta_{r_{MIN}}^{1/2}}\right]}$$

(4)





1) Avión simétrico $\Rightarrow C_{y_0} = C_{l_0} = C_{n_0} = 0$

$C_{y_{\delta a}} = 0$

$\beta = 0$

$$3T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S (C_{D0} + K C_L^2) \longrightarrow V = \sqrt{\frac{6T}{\rho S (C_{D0} + K C_L^2)}}$$

$$V_{MIN} \Leftrightarrow C_{L_{MAX}} \longrightarrow V_{MIN} = \sqrt{\frac{6T}{\rho S (C_{D0} + K C_{L_{MAX}}^2)}}$$

2) $$q S (\cancel{C_{y_0}}^{0} + \cancel{C_{y_\beta}\beta}^{0} + \cancel{C_{y_{\delta a}}\delta a}^{0} + C_{y_{\delta r}}\delta r) - \underbrace{W \operatorname{sen}\phi}_{W\phi} = 0 ;$$

$$q S C_{y_{\delta r}} \cdot \delta r = W\phi \longrightarrow \delta r = \frac{W}{q S C_{y_{\delta r}}}\phi$$

$$q S b (\cancel{C_{l_0}}^{0} + \cancel{C_{l_\beta}\beta}^{0} + C_{l_{\delta a}}\delta a + C_{l_{\delta r}}\delta r) = 0 ;$$

$$q S b (C_{l_{\delta a}}\delta a + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta r) = 0 \longrightarrow \delta a = -\frac{C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}} \cdot \delta r$$

$$L = W\cos\phi \Rightarrow L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho \cancel{S} \frac{6T}{\rho \cancel{S}(C_{D0} + K C_{L_{MAX}}^2)} \cdot C_{L_{MAX}} = \frac{3T C_{L_{MAX}}}{C_{D0} + K C_{L_{MAX}}^2}$$

$$q S b (\cancel{C_{y_0}}^{0} + \cancel{C_{y_\beta}\beta}^{0} + C_{n_{\delta a}}\delta a + C_{n_{\delta r}}\delta r) + Tl = 0$$

$$q S b (C_{n_{\delta a}}\delta a + C_{n_{\delta r}}\delta r) = -Tl \; ; \; q S b \left(C_{n_{\delta a}} \cdot -\frac{C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}}\delta r + C_{n_{\delta r}}\delta r\right) = -Tl ;$$

$$q S b \, \delta r \left[C_{n_{\delta r}} - C_{n_{\delta a}} \cdot \frac{C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}}\right] = -Tl$$

$$\delta r = \frac{-Tl}{q S b \left(C_{n_{\delta r}} - C_{n_{\delta a}} \frac{C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}}\right)} =$$

$$\frac{6T}{\rho S (C_{D0} + K C_{L_{MAX}}^2)} = V_{MIN}^2 \Rightarrow T = \frac{V_{MIN}^2}{6\rho S (C_{D0} + K C_{L_{MAX}}^2)}$$

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha_{wb} \longrightarrow \alpha_{wb} = \frac{2W}{\rho S V^2 C_{L_\alpha}} - \frac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}}$$

$$C_m = C_{m_0} + C_{m_{\alpha wb}} + C_{m_{\delta a}}\delta a = 0 \longrightarrow \delta e = -\frac{1}{\ldots}\left[C_{m_0} + \frac{C_{m_\alpha}}{\ldots}\left(\frac{2W}{\ldots} - C_{L_0}\right)\right]$$

3) $\phi = \frac{q S C_y \delta_r}{W} \cdot \delta_r$

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12. 2º A - 91 543 45 12

11-02-1995

Un avión turbohélice de cuatro motores, tal y como el que se muestra en la figura, efectúa una subida rectilínea estacionaria con ángulo de asiento de velocidad $\gamma \ll 1$, con resbalamiento nulo, a una velocidad un 25 % superior a la velocidad de pérdida en esas condiciones de vuelo y, en el caso en que sea necesario, un ángulo de balance de velocidad μ ($|\mu| \ll 1$). Las hélices proporcionan cada una un empuje T dirigido según el eje x_w, y su velocidad angular es ω constante (en el sentido de las agujas del reloj vistas desde atrás) y su rendimiento es η constante. El empuje de los motores no pasa por el centro de gravedad y el efecto del par motor sobre el equilibrio del avión no es despreciable.

En un momento dado se para el motor exterior derecho (nº 4) y el piloto acciona los mandos de vuelo, sin tocar los mandos del motor, de modo que continúa una subida en las mismas condiciones que antes y con la misma velocidad.

Se pide determinar:

- el ángulo de asiento de velocidad γ,
- la deflexión del timón de profundidad δ_e,
- la deflexión de alerones δ_a,
- la deflexión del timón de dirección δ_r, y
- el ángulo de balance de velocidad μ

antes de pararse y después de pararse el motor exterior derecho.

NOTA: Los datos de los que se dispone son los siguientes:

W, S, b, c

T (empuje por motor), ω, η, d, y_1, y_2

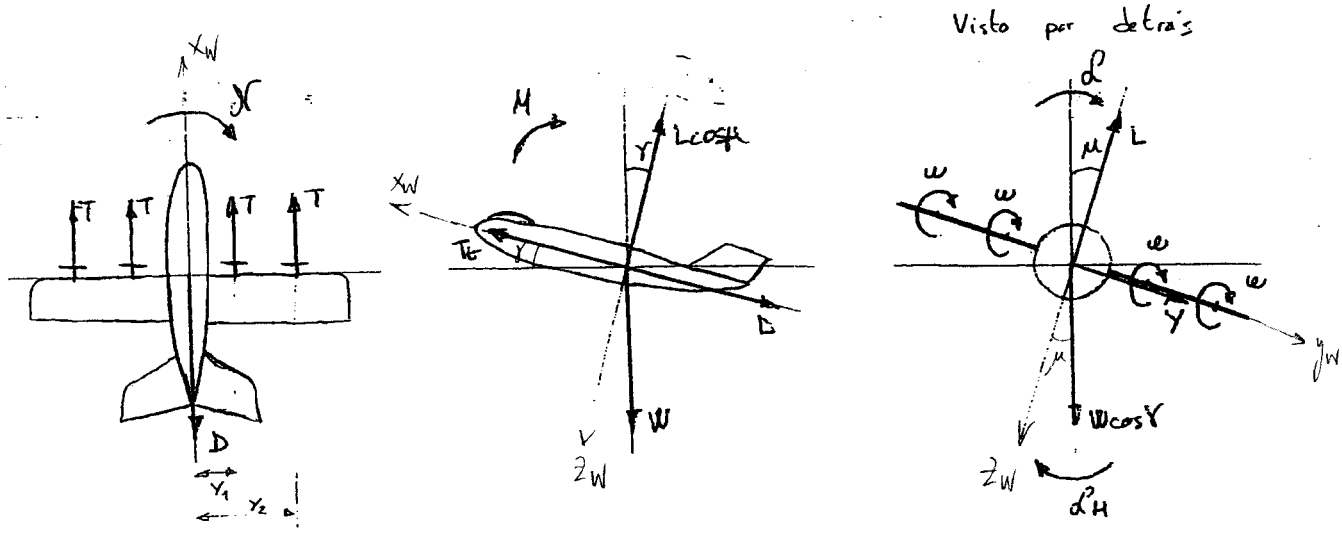
C_{D0}, k (constantes de la polar parabólica)

C_{Lmax} (coeficiente de sustentación máximo), C_{L0}, $C_{L\alpha}$, $C_{L\delta_e} = 0$

C_{m0}, $C_{m\alpha}$, $C_{m\delta_e}$

$C_{Y\delta_r}$, $C_{Y\delta_a} = 0$, $C_{\ell\delta_r}$, $C_{\ell\delta_a}$, $C_{n\delta_r}$, $C_{n\delta_a}$, $C_{Y0} = C_{\ell 0} = C_{n0} = 0$

$V = 1'25\ V_s$



Par producido por las hélices:

$$P_{1m} = M_H \cdot \omega = \frac{P_{1\,hélice}}{\eta} = \frac{T.V}{\eta} \Rightarrow M_{1H} = \frac{T.V}{\eta\,\omega}$$

4 motores $\rightarrow$ $\mathcal{L}_H = \dfrac{4T.V}{\eta\,\omega}$

3 motores $\rightarrow$ $\mathcal{L}_H = \dfrac{3TV}{\eta\,\omega}$

Antes del Fallo

$$\mathcal{N} = 0 = C_{N0} + C_{N\beta}\beta + C_{N\delta a}\delta_a + C_{N\delta r}\delta r$$

$$L\cos\mu = W\cos\gamma$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H = \frac{1}{2}\rho S b V^2 \left(C_{\mathcal{L}0} + C_{\mathcal{L}\beta}\beta + C_{\mathcal{L}\delta a}\delta_a + C_{\mathcal{L}\delta r}\delta r \right) = \frac{4.TV}{\eta\,\omega}$$

$$W\cos\gamma\,\mathrm{sen}\,\mu = Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{Y0} + C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta a}\delta_a + C_{Y\delta r}\delta_r \right)$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta}\delta e = 0$$

$$4T = D + W\,\mathrm{sen}\,\gamma$$

Ángulos pequeños:

$$L = W \Rightarrow C_L = \frac{2W}{\rho S V^2} = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$$

$$\alpha = \frac{2W}{\rho S V^2 C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}$$

$$\delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\left(\frac{2W}{\rho S V^2 C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}\right)$$

$$4T = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2\right) + W\gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{W}\left[4T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K\frac{4W^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)\right]$$

$$\delta_r = -\frac{C_{N\delta a}}{C_{N\delta r}}\delta_a \Rightarrow C_{l\delta a}\delta_a - C_{l\delta r}\frac{C_{N\delta a}}{C_{N\delta r}}\delta_a = \frac{4.T.V}{\eta\omega}$$

$$\delta_a = \frac{4TV}{\eta\omega}\,\frac{C_{N\delta r}}{C_{l\delta a}C_{N\delta r} - C_{l\delta r}C_{N\delta a}}$$

$$\delta_r = \frac{4TV}{\eta\omega}\,\frac{C_{N\delta a}}{C_{l\delta r}C_{N\delta a} - C_{l\delta a}C_{N\delta r}}$$

$$W\mu = \frac{1}{2}\rho V^2 S\, C_{y\delta r}\,\delta_r$$

$$\mu = \frac{2T\rho V^3 S}{2W\omega}\,\frac{C_{N\delta a}C_{y\delta r}}{C_{l\delta r}C_{N\delta a} - C_{l\delta a}C_{N\delta r}}$$

Después del fallo.

δ_e y γ → iguales (con 3T.)

$$N + Ty_2 = 0 = \frac{1}{2}\rho S b V^2\left(C_{N\delta a}\delta_a + C_{N\delta r}\delta_r\right) + Ty_2$$

$$\delta_r = -\frac{2Ty_2}{\rho S b V^2 C_{N\delta r}} - \frac{C_{N\delta a}}{C_{N\delta r}}\delta_a$$

$$C_{l\delta a}\delta_a - C_{l\delta r}\left(\frac{2Ty_2}{\rho S b V^2 C_{N\delta r}} + \frac{C_{N\delta a}}{C_{N\delta r}}\delta_a\right) = \frac{3TV}{\eta\omega}$$

$$\frac{C_{l\delta a}C_{N\delta r} - C_{l\delta r}C_{N\delta a}}{C_{N\delta r}}\delta_a = \frac{3TV}{\eta\omega} + \frac{2Ty_2 C_{N\delta r}}{\rho S b V^2 C_{N\delta r}}$$

$$\delta_a = \left(\frac{3TV}{\eta \omega} + \frac{2T Y_z \, C_{\ell\delta r}}{\rho S b V^2 C_{N\delta r}} \right) \frac{C_{N\delta r}}{C_{\ell\delta a} C_{N\delta r} - C_{\ell\delta r} C_{N\delta a}}$$

$$\delta_r = \left(\frac{3TV}{\eta \omega} + \frac{2T Y_z \, C_{\ell\delta r}}{\rho S b V^2 C_{N\delta r}} \right) \frac{C_{N\delta a}}{C_{\ell\delta r} C_{N\delta a} - C_{\ell\delta a} C_{N\delta r}} - \frac{2T Y_z}{\rho S b V^2 C_{N\delta r}}$$

$$M = \frac{\rho V^2 S}{2W} C_{Y\delta r} \left[\left(\frac{3TV}{\eta \omega} + \frac{2T Y_z \, C_{\ell\delta r}}{\rho S b V^2 C_{N\delta r}} \right) \frac{C_{N\delta a}}{C_{\ell\delta r} C_{N\delta a} - C_{\ell\delta a} C_{N\delta r}} - \frac{2T Y_z}{\rho S b V^2 C_{N\delta r}} \right]$$

⑤

$$3T\cancel{\cos\varepsilon}^{1}\,\cancel{\cos\nu}^{1} - D - mg\,\cancel{\operatorname{sen}\gamma}^{\gamma} - \cancel{mV}^{0} = 0$$

$$3T\cancel{\cos\varepsilon}\,\cancel{\operatorname{sen}\nu}^{0} - Q + mg\,\cancel{\cos\gamma}^{1}\,\cancel{\operatorname{sen}\mu}^{\mu} + \cancel{mV(-r_w)}^{0} = 0$$

$$-3T\cancel{\operatorname{sen}\varepsilon}^{0} - L + mg\,\cancel{\cos\gamma}^{1}\,\cancel{\cos\mu}^{1} + \cancel{mV(q_w)}^{0} = 0$$

Eje viento

$$\begin{cases} 3T - D - W\gamma = 0 \quad (I) \\ -Q + W\mu = 0 \\ L = W \end{cases}$$

$$V = 1'25\,V_s = 1'25\cdot\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L\max}}}$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + \cancel{C_{L\delta e}\,\delta e}^{0} = \frac{2W}{\rho S V^2} \rightsquigarrow \alpha = \alpha_0 + \frac{2W}{\rho S V^2 C_{L\alpha}}$$

$$P = \frac{3TV}{\eta} = M\cdot\omega \Rightarrow M = M_{hélice} = \frac{3TV}{\omega\eta}$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\cancel{C_{Y0}}^{0} + \cancel{C_{Y\beta}\beta}^{0} + \cancel{C_{Y\delta a}\delta a}^{0} + C_{Y\delta r}\delta r\right) = W\mu \quad (IV)$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{l0}}^{0} + \cancel{C_{l\beta}\beta}^{0} + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r\right) = \frac{3TV}{\omega\eta} \quad (II)$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{n0}}^{0} + \cancel{C_{n\beta}\beta}^{0} + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r\right) = -T y_2 \quad (III)$$

$$C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e = 0 \rightsquigarrow \boxed{\delta e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\left(\alpha_0 + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V^2}\right)\right]}$$

$$(I) \rightsquigarrow \boxed{\gamma = \frac{3T - D}{W} = \frac{3T - \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0} + K C_L^2)}{W} = \frac{3T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}{W}}$$

$$(II)\quad \boxed{\delta a = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{6TV}{W\eta}\cdot\frac{1}{\rho S V^2 b} & C_{l\delta r} \\ -2Ty_2\frac{1}{\rho S V^2 b} & C_{n\delta r}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{l\delta a} & C_{l\delta r} \\ C_{n\delta a} & C_{n\delta r}\end{vmatrix}} = \frac{-\frac{6V}{W\eta}C_{n\delta r} + 2y_2 C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{l\delta r}C_{n\delta a}}\cdot\frac{T}{\rho S V^2 b}}$$

$$(III)\quad \boxed{\delta r = \frac{\begin{vmatrix} C_{l\delta a} & -\frac{6TV}{W\eta}\frac{1}{\rho S V^2 b} \\ C_{n\delta a} & -2Ty_2\frac{1}{\rho S V^2 b}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} C_{l\delta a} & C_{l\delta r} \\ C_{n\delta a} & C_{n\delta r}\end{vmatrix}} = \frac{\frac{6V}{W\eta}C_{n\delta a} - 2y_2 C_{l\delta a}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\cdot\frac{T}{\rho S V^2 b}}$$

$$(IV) \rightsquigarrow \boxed{\mu = \frac{\rho S V^2}{2W}\cdot C_{Y\delta r}\,\delta r = \frac{\rho S V^2}{2W}\cdot C_{Y\delta r}\cdot\left[\frac{\frac{6V}{W\eta}C_{n\delta a} - 2y_2 C_{l\delta a}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\,\frac{T}{\rho S V^2 b}\right]}$$

$$P = \frac{4TV}{\eta} = M\omega \Rightarrow M = M_{hélice} = \frac{4TV}{W\eta} \qquad 4T - D - W\gamma = 0 \quad (V)$$

$$(V) \rightsquigarrow \boxed{\gamma = \frac{4T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + \frac{4KW^2}{\rho^2 S^2 V^4}\right)}{W}}$$

$$\boxed{\delta e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\left(\alpha_0 + \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha} V^2}\right)\right]}$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{l\delta_r}\delta_r = W\mu \quad (\mathrm{VI})$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\delta_r\right] = \frac{4TV}{W\eta} \quad (\mathrm{VII})$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[C_{n\delta_a}\delta_a + C_{n\delta_r}\delta_r\right] = 0 \quad (\mathrm{VIII}) \rightarrow \delta_a = -\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}\delta_r$$

$$(\mathrm{VII}) \rightarrow \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[C_{l\delta_r}\delta_r - \frac{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}\delta_r\right] = \frac{4TV}{W\eta}$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[\delta_r\left[C_{l\delta_r} - \frac{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}\right]\right] = \frac{4TV}{W\eta} \rightarrow \boxed{\delta_r = \frac{8TV}{W\eta\rho V^2 S b\left[C_{l\delta_r} - \frac{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}\right]}}$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{-8TVC_{n\delta_r}}{W\eta\rho V^2 S b\left[C_{n\delta_a}C_{l\delta_r} - C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}\right]}}$$

$$(\mathrm{VI}) \rightarrow \boxed{\mu = \frac{\cancel{\rho V^2 S}}{2W}\cdot\frac{8TVC_{l\delta_r}}{W\eta\cancel{\rho V^2 S} b\left[C_{l\delta_r} - \frac{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}\right]}} = \boxed{\frac{4TVC_{l\delta_r}}{W\eta W b\left[C_{l\delta_r} - \frac{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}\right]}}$$

6

Lateral - Direccional

4.21 **11-02-1995** visto

Un avión turbohélice de cuatro motores, tal y como el que se muestra en la figura, efectúa una subida rectilínea estacionaria con ángulo de asiento de velocidad $\gamma \ll 1$, con resbalamiento nulo, a una velocidad un 25 % superior a la velocidad de pérdida en esas condiciones de vuelo y, en el caso en que sea necesario, un ángulo de balance de velocidad μ ($|\mu| \ll 1$). Las hélices proporcionan cada una un empuje T dirigido según el eje x_w, y su velocidad angular es ω constante (en el sentido de las agujas del reloj vistas desde atrás) y su rendimiento es η constante. El empuje de los motores no pasa por el centro de gravedad y el efecto del par motor sobre el equilibrio del avión no es despreciable.

En un momento dado se para el motor exterior derecho (nº 4) y el piloto acciona los mandos de vuelo, sin tocar los mandos del motor, de modo que continúa una subida en las mismas condiciones que antes y con la misma velocidad.

Se pide determinar:

- el ángulo de asiento de velocidad γ,
- la deflexión del timón de profundidad δ_e,
- la deflexión de alerones δ_a,
- la deflexión del timón de dirección δ_r, y
- el ángulo de balance de velocidad μ

antes de pararse y después de pararse el motor exterior derecho.

NOTA: Los datos de los que se dispone son los siguientes:

W, S, b, c

T (empuje por motor), ω, η, d, y_1, y_2

C_{D0}, k (constantes de la polar parabólica)

C_{Lmax} (coeficiente de sustentación máximo), C_{L0}, $C_{L\alpha}$, $C_{L\delta_e} = 0$

C_{m0}, $C_{m\alpha}$, $C_{m\delta_e}$

$C_{Y\delta_r}$, $C_{Y\delta_a} = 0$, $C_{\ell\delta_r}$, $C_{\ell\delta_a}$, $C_{n\delta_r}$, $C_{n\delta_a}$, $C_{Y0} = C_{\ell 0} = C_{n0} = 0$

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

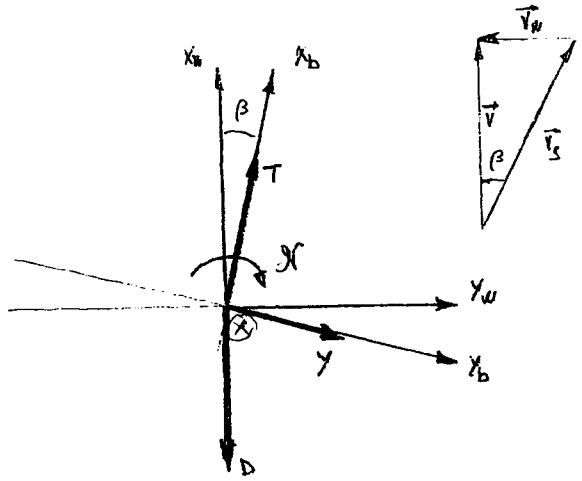
27-01-1997

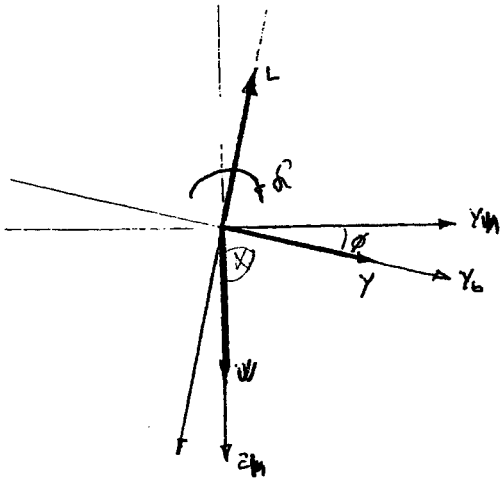
Una avioneta convencional efectúa un vuelo horizontal rectilíneo estacionario con velocidad respecto a tierra V_g contenida en su plano de simetría y en presencia de un viento horizontal cruzado por la derecha de módulo V_w ($V_w \ll V_g$) constante y conocido. En cierto instante se rompe la transmisión entre el sistema de mando lateral y el alerón izquierdo (quedando éste flotando alrededor de sus charnelas, por lo que el piloto solamente mantiene mando lateral sobre el alerón derecho) y se pretende seguir volando en las mismas condiciones de vuelo de antes de la rotura y a la misma velocidad V_g.

Suponiendo además que:

- Las características geométricas, aerodinámicas y másicas de la avioneta son conocidas (en concreto, las deflexiones de los alerones no cambian la sustentación total del avión, $C_{L0} = C_{L\delta_e} = 0$, $C_{l\delta_r} C_{n\beta} - C_{n\delta_r} C_{l\beta} > 0$).
- Las derivadas de los coeficientes de fuerza y momentos lateral-direccionales respecto a δ_a se conocen referidas a la semisuma de las deflexiones de los alerones derecho e izquierdo. Además, para la avioneta sin rotura del sistema de mando, no existe deflexión diferencial de alerones.
- El empuje del motor pasa por el centro de masas de la avioneta y está dirigido según el eje x_s.
- Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

Se pide determinar en función de V_g, los siguientes incrementos entre magnitudes después de la rotura (subíndice "r") y antes de la rotura (sin subíndice): $\Delta\delta_{ad} = (\delta_{ad})_r - \delta_{ad}$ (el subíndice "d" significa alerón derecho), $\Delta\delta_r = (\delta_r)_r - \delta_r$, $\Delta\delta_e = (\delta_e)_r - \delta_e$, $\Delta\phi = \phi_r - \phi$. Comentar físicamente los resultados obtenidos y la dependencia con los distintos parámetros del problema.





$$\beta = \frac{V_w}{V_s} \quad \text{(ang. peq)}$$

- Antes de la rotura: $|\delta_{ad}| = |\delta_{ai}| \longrightarrow \delta_a = \dfrac{|\delta_{ad}| + |\delta_{ai}|}{2}$

$$C_{m_{cg}} = 0 = C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha_{wb} + C_{m_\delta}\cdot\delta_e$$

$$W\cos\phi = L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha_{wb}) \Rightarrow \alpha_{wb} = \frac{W\overset{\approx 1}{\cos\phi}}{\frac{1}{2}\rho(V_s^2+V_w^2)SC_{L_\alpha}}$$

$$Y + W\,\text{sen}\,\phi = 0$$

$$\mathcal{L} = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(C_{L_0} + C_{L_\beta}\beta + C_{L_{\delta r}}\delta_r + \overbrace{\frac{C_{L_{\delta a}}}{2}\delta_{ad} + \frac{C_{L_{\delta a}}}{2}\delta_{ai}}^{C_{L_{\delta a}}\delta_a}\right)$$

$$\mathcal{N} = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(C_{N_0} + C_{N_\beta}\beta + C_{N_{\delta r}}\delta_r + \frac{C_{N_{\delta a}}}{2}\delta_{ad} + \frac{C_{N_{\delta a}}}{2}\delta_{ai}\right)$$

- Después de la rotura: se rompe transmisión entre mando lat y alerón izquierdo $\boxed{C_h|_{ai} = 0} \Rightarrow \delta_{ai}|_f = -\dfrac{1}{C_{h_{\delta a}}}(C_{h_0} + C_{h_\alpha}\alpha)$

$$(\delta_{ad})_r = 2\delta_a - \delta_{ai}|_f \Rightarrow \Delta\delta_{ad} = (\delta_{ad})_r - \delta_{ad} = 2\delta_a - \delta_{ai}|_f - \delta_a$$

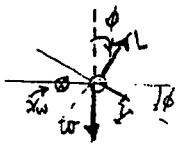
$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L} = 0\\ \mathcal{N} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \delta_a = \frac{C_{N_0}C_{\mathcal{L}\delta r} - C_{\mathcal{L}_0}C_{N\delta r}}{C_{\mathcal{L}\delta a}C_{N\delta r} - C_{N\delta a}C_{\mathcal{L}\delta r}} + \frac{C_{N\beta}C_{\mathcal{L}\delta r} - C_{\mathcal{L}\beta}C_{N\delta r}}{C_{\mathcal{L}\delta a}C_{N\delta r} - C_{N\delta a}C_{\mathcal{L}\delta r}}\frac{V_w}{V_s}$$

$$\Delta\delta_{ad} = \frac{C_{N_0}C_{\mathcal{L}\delta r} - C_{\mathcal{L}_0}C_{N\delta r}}{C_{\mathcal{L}\delta a}C_{N\delta r} - C_{N\delta a}C_{\mathcal{L}\delta r}} + \frac{C_{N\beta}C_{\mathcal{L}\delta r} - C_{\mathcal{L}\beta}C_{N\delta r}}{C_{\mathcal{L}\delta a}C_{N\delta r} - C_{N\delta a}C_{\mathcal{L}\delta r}}\frac{V_w}{V_s} + \frac{C_{h_0}}{C_{h\delta a}} + \frac{C_{h\alpha}}{C_{h\delta a}}\frac{2W}{\rho(V_s^2+V_w^2)SC_{L_\alpha}}$$

$$\Delta\delta_r = \Delta\delta_e = \Delta\phi = 0$$

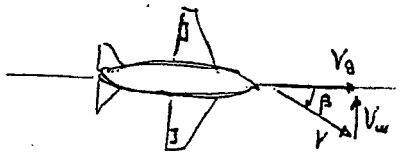
H.20/27-01-1997

visto de atrás



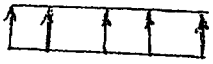
$$L = W\cos\phi$$

visto de arriba



- $\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_w}$; $V^2 = V_g^2 + V_w^2$, donde V_g, lin sin ci
- $tg\,\beta = \dfrac{V_w}{V_g} \xrightarrow[\text{angulos pequeños}]{} \beta \simeq \dfrac{V_w}{V_g}$

V_w



* **Se conocen** : $\begin{cases} C_{y\delta a} \\ C_{n\delta a},\ C_{l\delta a} \end{cases}$ referidos a $\delta_a = \dfrac{\delta_{ai}+\delta_{ad}}{2}$

- **Antes**

$$\# \; C_{mcg} = 0 = C_{m0} + C_{m\alpha}\cdot\alpha_{wb} + C_{m\delta}\cdot\delta_e$$

$$\# \; C_L = \underbrace{C_{L0}}_{0\ (\text{dato})} + C_{L\alpha}\cdot\alpha_{wb} + \underbrace{C_{L\delta e}}_{NO}\cdot\delta_e = \frac{2W\cos\phi}{\rho V^2 S} \longrightarrow \alpha_{wb} = \frac{2W\cos\phi}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}$$

$$\longrightarrow \boxed{\delta_e = -\frac{1}{C_{m\delta}}\left(C_{m0} + \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}}\frac{2W\cos\phi}{\rho S V^2}\right)}$$

$$\# \; \mathcal{L} = qSb\left(C_{l\beta}\cdot\beta + C_{l\delta a}\cdot\underbrace{\delta_a}_{=\frac{\delta_{ad}+\delta_{ai}}{2}} + C_{l\delta r}\cdot\delta_r\right) = 0$$

$$\# \; N = qSb\left(C_{n\beta}\cdot\beta + C_{n\delta a}\cdot\delta_a + C_{n\delta r}\cdot\delta_r\right) = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \boxed{\delta_r = -\dfrac{C_{l\beta}C_{n\delta a} - C_{n\beta}C_{l\delta a}}{C_{l\delta r}C_{n\delta a} - C_{n\delta r}C_{l\delta a}}\cdot\dfrac{V_w}{V_g}} \\ \boxed{\delta_a = -\dfrac{C_{n\beta}C_{l\delta r} - C_{l\beta}C_{n\delta r}}{C_{l\delta r}C_{n\delta a} - C_{n\delta r}C_{l\delta a}}\cdot\dfrac{V_w}{V_g} = \delta_{ad} = \delta_{ai}} \end{cases}$$

(antes de la rotera)

son iguales pq no hay deflexión diferencial de

$$L \operatorname{sen}\phi = Y\cos\phi \longrightarrow \boxed{\overset{\sim\phi}{\operatorname{tg}\phi}} = \frac{Y}{L} = \frac{qSC_Y}{qSC_L} = \boxed{\frac{C_Y}{C_L}}$$

donde
$$C_Y = C_{Y\beta}\cdot\beta + C_{Y\delta_r}\cdot\delta_r + C_{Y\delta_a}\cdot\delta_a$$
$$C_L = \frac{2W\cos\phi}{\rho S V^2} \simeq \frac{2W}{\rho S V^2}$$

- <u>Después</u>

* Todo es lo mismo pero ahora en vez de usar δ_a se usan la δ_{ad}, δ_{ai} por separado; tenemos 1 incógnita + pero a cambio tenemos la ecuación del momento de charnela nulo en el alerón izquierdo (que se queda flotando al romperse la transmisión).

* $C_{h\delta_{ai}} = 0 = C_{h_0} + C_{h\alpha}\cdot\alpha_{wb} + C_{h\delta_a}\cdot\delta_{ai} \longrightarrow \delta_{ai} = -\frac{C_{h_0}}{C_{h\delta_{ai}}} - \frac{C_{h\alpha}}{C_{h\delta_a}}\cdot\alpha_{wb}$

* $\Delta\delta_r = 0$

$\Delta\delta_e = 0$

$\Delta\alpha_{wb} = 0$

$\Delta\delta_a = 0$

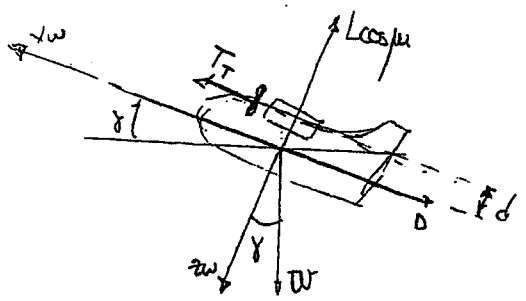
$(\delta_{ad})_r = 2\delta_a - \delta_{ai} \longrightarrow \Delta\delta_{ad} = (\delta_{ad})_r - \delta_{ad} = (2\delta_a - \delta_{ai}) - \underbrace{\delta_{ad}}_{\delta_a} =$

el de sin rotura (las ecs para $(\delta_a)_{nudo}$ son iguales antes y después de rotura)

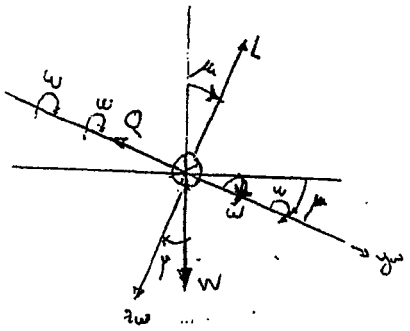
$= \delta_a - \delta_{ai} = \ldots$

H.21/11-02-1995

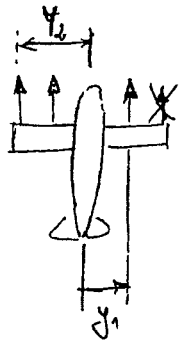
• Nos indican que los motores hélice giran en sentido de las agujas del reloj, vistos desde atrás porque las hélices nos darán momento de balance



Visto de atrás



visto de arriba



$$T_T = \begin{cases} 4T, & \text{antes de rotura} \\ 3T, & \text{dp de rotura} \end{cases}$$

→ 6 ecs con 6 incógnitas ($\alpha, \gamma, \delta_e, \delta_a, \delta_r, \mu$). En ejes viento:

(1) $T_T - D - W\operatorname{sen}\gamma \simeq T_T - D - W\gamma = 0 \quad \vec{i}_w)$

(2) $-L\cos\gamma + W\cos\gamma\cos\mu \simeq -L + W = 0 \quad \vec{k}_w) \longrightarrow \boxed{V_s = \sqrt{\dfrac{2W}{\rho S C_{L_{max}}}}}$

$-L + W\cos\mu\cdot\cos\gamma = 0$

(3) $-Q + W\cos\gamma\operatorname{sen}\mu \simeq -Q + W\mu = 0 \quad \vec{j}_w)$; con ángulos pequeños, en este caso: $Q \simeq -$

(4) $\ell_A + \ell_T = 0$ donde $\ell_T = \begin{cases} 4T_m, & \text{antes de rotura} \\ 3T_m, & \text{dp de rotura} \end{cases}$ (T_m = par de 1 motor)

(5) $M_A + M_T = 0$ donde $M_T = \begin{cases} -4T\cdot d, & \text{antes de rotura} \\ -3Td, & \text{dp de rotura} \end{cases}$

(6) $N_A + N_T = 0$ donde $N_T = \begin{cases} 0, & \text{antes de rotura} \\ TY_2, & \text{dp de rotura} \end{cases}$

• Para poner T_m en función de los datos del enunciado:

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} = \frac{\overset{\text{tracción}}{T}\cdot V}{\underset{\text{por motor}}{T_m}\cdot\omega} \longrightarrow \boxed{T_m = \frac{TV}{\eta\omega}}$$

$$(1) \Rightarrow T_T - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + k \frac{4W^2}{\rho^2 V^4 S^2}\right) = W\gamma \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\gamma = \frac{T_T}{W} - \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\frac{C_{D_0}}{W} + \frac{4k}{\rho^2 V^4 S^2}\right)\right]$$

$$(5) \Rightarrow \left[\delta_e = \frac{1}{C_{m\delta}}\left[\frac{-2M_T}{\rho V^2 S b} - C_{m_0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2W}{\rho V^2 S} - C_{L_0}\right)\right]\right]$$

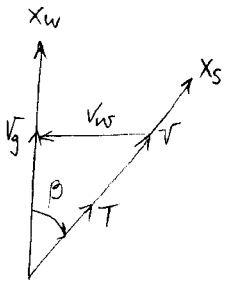
$$(6) \Rightarrow \left[\delta_r = \frac{2W\mu}{\rho V^2 S C_{y\delta_r}}\right]$$ (aunque tal vez sustituir la μ)

$$(4) \Rightarrow \left[\delta_a = -\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}} \cdot \delta_r\right]$$ donde $\delta_r = \frac{2\delta_r}{\rho V^2 S b} \cdot \frac{1}{C_{l\delta_r} - C_{l\delta_a} \cdot \frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}}$

$$(3) \Rightarrow \left[\mu = \frac{C_{y\delta_r}}{W} \cdot \frac{\cancel{\rho V^2 S}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2} M_T}{\cancel{\rho V^2 S}\, b} \cdot \frac{1}{C_{l\delta_r} - C_{l\delta_a} \cdot \frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\delta_a}}}\right]$$

(6)

Antes de la rotura:



$\mu = \phi$

$\beta = 0$

$\tan\beta = \frac{V_w}{V_g}$

$V^2 = V_w^2 + V_g^2$

$\beta = \frac{V_w}{V_g}$

$$T\cos\varepsilon\cos\delta - D - mg\sin\theta - m\dot{V} = 0$$
$$T\cos\varepsilon\sin\delta - Q + mg\cos\theta\sin\mu + mV(\dot{\gamma} - r_w) = 0$$
$$-T\sin\varepsilon - L + mg\cos\theta\cos\mu + mV(q - r_w) = 0$$

$$T - D = 0 \rightsquigarrow T = D = \frac{1}{2}\rho(V_w^2 + V_g^2)S(C_{D0} + KC_L^2)$$

$$T\beta - Q + W\phi = 0 \; ; \; Y = -\underbrace{D\beta}_{T} - Q \Rightarrow Y = -W\phi$$

$$-L + W = 0$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta e}\delta e = \frac{2W}{\rho S V^2} \rightsquigarrow \alpha = \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha}(V_w^2 + V_g^2)}$$

$$C_{MA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\delta e = 0 \longrightarrow \delta e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\frac{2W}{\rho S C_{L\alpha}(V_w^2 + V_g^2)}\right]$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{Y0} + C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta a}\delta a + C_{Y\delta r}\delta r) = -W\phi$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S b(C_{l0} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r) = 0 \quad (I)$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S b(C_{n0} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r) = 0 \quad (II)$$

(I) $\delta a = \frac{-C_{l\beta}C_{n\delta r} + C_{n\beta}C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\beta \rightsquigarrow \delta a_d = \delta a_i \Rightarrow \delta a = \frac{\delta a_i + \delta a_d}{2} = \delta a_d$

(II) $\delta r = \frac{C_{l\beta}C_{n\delta a} - C_{l\delta a}C_{n\beta}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\cdot\beta$

$$\phi = \frac{-1}{W}\left[\frac{1}{2}\rho(V_w^2 + V_g^2)S(C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta a}\delta a + C_{Y\delta r}\delta r)\right]$$

$$\phi = \frac{-1}{W}\left[\frac{1}{2}\rho(V_w^2 + V_g^2)S\left(C_{Y\beta}\beta + \frac{-C_{l\beta}C_{n\delta r} + C_{n\beta}C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}C_{Y\delta a}\beta + \frac{C_{l\beta}C_{n\delta a} - C_{l\delta a}C_{n\beta}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}C_{Y\delta r}\beta\right)\right]$$

Despues de la rotura:

$$T - D = 0$$
$$T\beta - Q + W\phi = 0$$
$$-L + W = 0$$

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_r + C_{L\delta e}\delta e_r = \frac{2W}{\rho S V^2} \rightsquigarrow \alpha_r = \frac{2W}{\rho S C_{L\alpha}(V_g^2 + V_w^2)}$$

$$\delta e_r = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\frac{2W}{\rho S C_{L\alpha}(V_g^2 + V_w^2)}\right]$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_y = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(\cancel{C_{y_0}}^{\,0} + C_{y_\beta}\beta + C_{y_{\delta a}}\delta a_r + C_{y_{\delta r}}\delta_{r_r}\right) = -W\phi_r$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_l b = \frac{1}{2}\rho V^2 S b \left(\cancel{C_{l_0}}^{\,0} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta a}}\delta a_r + C_{l_{\delta r}}\delta_{r_r}\right) = 0$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_n b = \frac{1}{2}\rho V^2 S b \left(\cancel{C_{n_0}}^{\,0} + C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta a}}\delta a_r + C_{n_{\delta r}}\delta_{r_r}\right) = 0$$

$$H_{a_i} = 0 = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{S_a}{2} c_a \left(C_{h_0} + C_{h_\alpha}\alpha_r + C_{h_{\delta a}}\delta a_i\right) \rightsquigarrow \delta a_{i_f} = -\frac{C_{h_0}}{C_{h_{\delta a}}} - \frac{C_{h_\alpha}}{C_{h_{\delta a}}}\cdot \overset{\alpha}{\alpha_r}$$

$$\delta a_r = \frac{\delta a_r}{2} + \frac{\delta a_{i_f}}{2} = \frac{\delta a}{2} + \frac{\delta a_{i_f}}{2} = \frac{-C_{l_\beta}C_{n_{\delta r}} + C_{n_\beta}C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}C_{n_{\delta r}} - C_{n_{\delta a}}C_{l_{\delta r}}}\cdot\frac{\beta}{2} - \frac{C_{h_0}}{2C_{h_{\delta a}}} - \frac{C_{h_\alpha}}{C_{h_{\delta a}}}\cdot\frac{\alpha}{2}$$

$$\delta a_r = \frac{-C_{l_\beta}C_{n_{\delta r}} + C_{n_\beta}C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}C_{n_{\delta r}} - C_{n_{\delta a}}C_{l_{\delta r}}}\cdot\frac{\beta}{2} - \frac{C_{h_0}}{2C_{h_{\delta a}}} - \frac{C_{h_\alpha}}{C_{h_{\delta a}}}\cdot\frac{\cancel{2}W}{\rho S C_{h_\alpha}\left(\cancel{V_w^2}^{\,0} + V_g^2\right)\cancel{2}}$$

$$\boxed{\Delta\delta a_d = \frac{C_{l_\beta}C_{n_{\delta r}} - C_{n_\beta}C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}C_{n_{\delta r}} - C_{n_{\delta a}}C_{l_{\delta r}}}\cdot\frac{\beta}{2} + \frac{C_{h_0}}{2C_{h_{\delta a}}} + \frac{C_{h_\alpha}}{C_{h_{\delta a}}}\cdot\frac{W}{\rho S C_{h_\alpha} V_g^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\delta_r &= 0\\ \Delta\delta_e &= 0\\ \Delta\phi &= 0\end{aligned}}$$

7

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 12.09.09

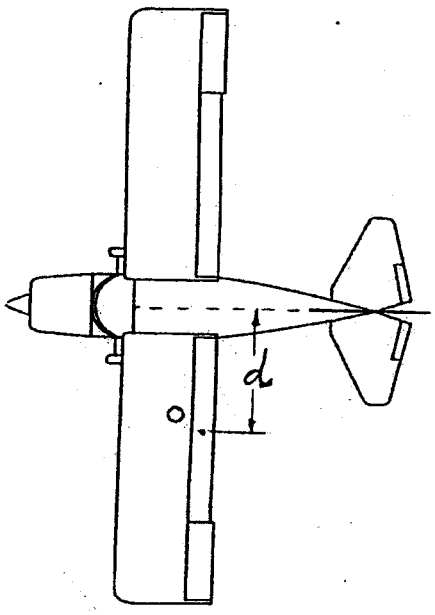
E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 2º

Se considera un avión en fase de aproximación final con sus dos flaps izquierdo y derecho deflectados la misma cantidad δ_{f0} conocida, volando rectilínea, simétrica y estacionariamente a velocidad V_0 conocida y con las alas a nivel. En cierto instante se rompe la barra de transmisión del flap izquierdo (quedándose este enganchado por sus soportes en condiciones de flotación) y el piloto pretende seguir descendiendo rectilínea, simétrica y estacionariamente sin tocar el flap derecho, con la misma velocidad de antes de la rotura. Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, el avión es simétrico, la curva del coeficiente de sustentación del avión completo, para deflexión nula de flaps, tiene la forma $C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha$, y la deflexión de cada flap genera incrementos de los coeficientes de sustentación y de resistencia del avión completo dados por $\Delta C_{Lf} = a_1\ \delta_f$ e $\Delta C_{Df} = a_2\ \delta_f^2$, aplicados en el punto O, donde δ_f es la deflexión del flap, y a_1 y a_2 son constantes conocidas, $C_{n\delta a} = C_{Y\delta a} = 0$, etc.).
b) El empuje del motor está dirigido según el eje x_w y pasa por el centro de masas del avión.
c) El mando direccional es convencional, mecánico y reversible, y el timón de dirección no tiene tab de compensación.
d) Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.
e) ρ es una constante conocida.

Se pide determinar la deflexión del timón de dirección, δ_r, la deflexión de los alerones, δ_a, el ángulo de balance, ϕ, y la fuerza en pedales, F_r, para el descenso antes de la rotura de la barra del flap izquierdo y para el descenso después de la rotura.



TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

(7)

Antes de la rotura:

$$\left.\begin{aligned} &T\cos\varepsilon\cos\nu - D - W\sin\gamma - m\dot{v} = 0 \\ &T\cos\varepsilon\sin\nu - Q + W\cos\gamma\sin\mu + m v(\dot{\gamma}+\dot{\mu}) = 0 \\ &-T\sin\varepsilon - L + W\cos\gamma\cos\mu + m v(q_w) = 0 \end{aligned}\right\} \text{Ejes viento}$$

$\beta = 0$ Simétrico

$\gamma \neq 0$; $\gamma \ll 1$

$\mu = 0$ Alas a nivel $\Rightarrow \boxed{\phi = 0}$

$$T - D - W\gamma = 0$$

$$-Q = 0$$

$$-L + W = 0$$

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + \Delta C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + 2a_1\delta_{f_0} = \frac{2W}{\rho S V_0^2} \rightsquigarrow \alpha = \frac{-C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} - 2a_1\frac{\delta_{f_0}}{C_{L_\alpha}} + \frac{2W}{\rho S C_{L_\alpha} V_0^2}$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\left(C_{Y_0} + C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_{\delta a}}\delta a + C_{Y_{\delta r}}\delta r\right) = 0$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_l = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S b\left(C_{l_0} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta a}}\delta a + C_{l_{\delta r}}\delta r\right) = 0 \rightsquigarrow \delta a = -\frac{C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}}\delta r \rightsquigarrow \boxed{\delta a = 0}$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b C_n = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S b\left(C_{n_0} + C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta a}}\delta a + C_{n_{\delta r}}\delta r\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\delta_r = 0}$$

$$F_r = -C_r H_r = -C_r \cdot \frac{1}{2}\rho V_0^2 S \eta_v S_r c_r \left[C_{h_\beta}\beta + C_{h_{\delta r}}\delta r + C_{h_{\delta tr}}\delta tr\right] \Rightarrow \boxed{F_r = 0}$$

Después de la rotura:

$$\left.\begin{aligned} &T - D - W\gamma = 0 \\ &-Q + Wa = 0 \\ &-L + W = 0 \end{aligned}\right\} \text{Ejes viento}$$

$\beta = 0$

$\gamma \neq 0$; $\gamma \ll 1$

$\mu \neq 0$; $\mu = \phi$

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + \Delta C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + a_1\delta_{f_0} + a_1\delta_{f_{iF}} = \frac{2W}{\rho S V_0^2} \rightsquigarrow \alpha = -\frac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} - \frac{a_1}{C_{L_\alpha}}\left(\delta_{f_0} + \delta_{f_{iF}}\right) + \frac{2W}{\rho S C_{L_\alpha} V_0^2}$$

$$H_{f_i} = \frac{1}{2}\rho V_0^2 \frac{S_{f_i}}{2} c_{f_i}\left(C_{h_{f_0}} + C_{h_{f_\alpha}}\alpha + C_{h_{f_{\delta f}}}\cdot\delta_{f_i}\right) = 0 \quad \delta_{f_{iF}} = \frac{-1}{C_{h_{f_{\delta f}}}}\left[C_{h_{f_0}} + C_{h_{f_\alpha}}\alpha\right]$$

$$C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha + a_1\delta_{f_0} - \frac{a_1}{C_{h_{f_{\delta f}}}}\left(C_{h_{f_0}} + C_{h_{f_\alpha}}\alpha\right) = \frac{2W}{\rho S V_0^2}$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\left(C_{Y_0} + C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_{\delta a}}\delta a + C_{Y_{\delta r}}\delta r\right) = W\phi$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\left(C_{l_0} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta a}}\delta a + C_{l_{\delta r}}\delta r\right) = -L_{f_i}\cdot d = -\frac{1}{2}\rho V_0^2 S\,\Delta C_{L_i} = -\frac{1}{2}\rho V_0^2 S\cdot a_1\left(\delta_{f_{iF}} - \delta_{f_0}\right)d$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\left(C_{n_0} + C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta a}}\delta a + C_{n_{\delta r}}\delta r\right) = D_{f_i}\cdot d = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\,\Delta C_{D_i} = \frac{1}{2}\rho V_0^2 S\, a_2\left(\delta_{f_{iF}}^2 - \delta_{f_0}^2\right)d$$

$$\delta_{f_{iF}} = \frac{-1}{C_{h_{f_{\delta f}}}}\left[C_{h_{f_0}} + C_{h_{f_\alpha}}\left(-\frac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} - \frac{a_1}{C_{L_\alpha}}\delta_{f_0} - \frac{a_1}{C_{L_\alpha}}\delta_{f_{iF}} + \frac{2W}{\rho S C_{L_\alpha} V_0^2}\right)\right]$$

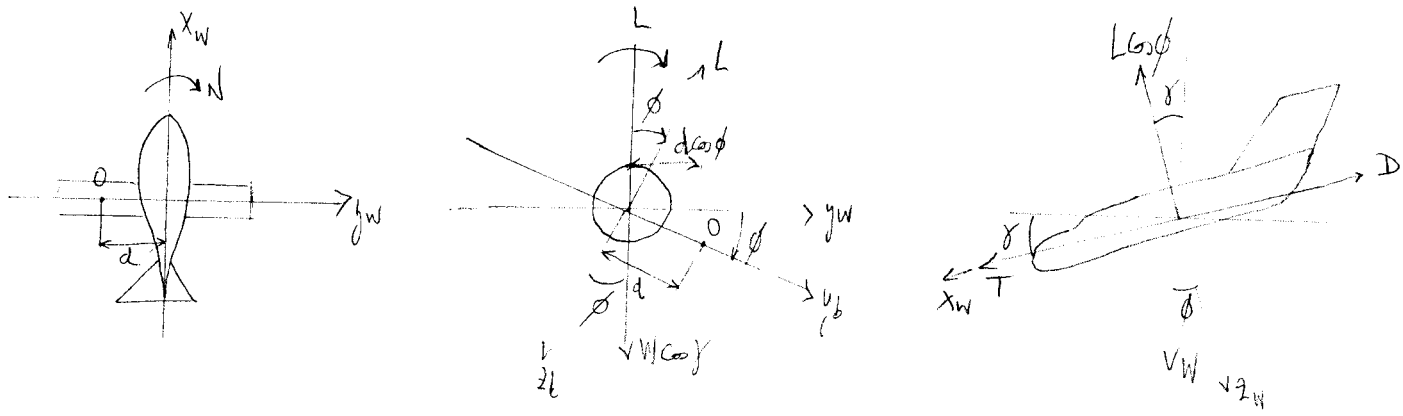
$$\delta_{f_{iF}} = \frac{1}{C_{h_{f_{\delta f}}} - a_1 C_{h_{f_\alpha}}}\left\{\frac{-1}{C_{L_\alpha}}\left[C_{h_{f_0}} + C_{h_{f_\alpha}}\left(-\frac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} - \frac{a_1}{C_{L_\alpha}}\delta_{f_0} + \frac{2W}{\rho S C_{L_\alpha} V_0^2}\right)\right]\right\}$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{a_2 d}{C_{n\delta r}} \left[\delta_{f_{iF}}^2 - \delta_{f_0}^2 \right]}$$

$$\boxed{\phi = \frac{\rho V_0^2 S}{2W} \cdot C_{y\delta r} \cdot \frac{a_2 d}{C_{n\delta r}} \left[\delta_{f_{iF}}^2 - \delta_{f_0}^2 \right]}$$

$$\boxed{\delta_a = -\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}} \delta_r - \frac{a_1 d}{C_{l\delta a}} \left[\delta_{f_{iF}} - \delta_{f_0} \right] = -\frac{a_2 d\, C_{l\delta r}}{C_{l\delta a} C_{n\delta r}} \left[\delta_{f_{iF}}^2 - \delta_{f_0}^2 \right] - \frac{a_1 d}{C_{l\delta a}} \left[\delta_{f_{iF}} - \delta_{f_0} \right]}$$

7



ANTES DE LA ROTORA:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + 2a_1\delta_{f0} \rightarrow \alpha_{wb} = \frac{2W}{\rho S V_0^2 C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} - \frac{2a_1}{C_{L\alpha}}\delta_{f0}$$

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S b\left(\cancel{C_{l0}}^{0} + \cancel{C_{lp}\bar{p}}^{0} + C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r\right) = 0 \rightarrow \delta_a = -\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\delta_r$$

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S b\left(\cancel{C_{n0}}^{0} + \cancel{C_{np}\bar{p}}^{0} + \cancel{C_{n\delta a}\delta_a}^{0} + C_{n\delta r}\delta_r\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\delta_r = 0} \rightarrow \boxed{\delta_a = 0}$$

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S\left(\cancel{C_{y0}}^{0} + \cancel{C_{yp}\bar{p}}^{0} + \cancel{C_{y\delta a}\delta_a}^{0} + \cancel{C_{y\delta r}\delta_r}^{0}\right) - \underbrace{W\cos\gamma\,\mathrm{sen}\,\phi}_{W\phi} = 0 ; \quad \boxed{\phi = 0}$$

$$F_r = -G_r H_r = -G_r \cdot \frac{1}{2}\rho V_0^2 S_r \eta_r S_r C_r\left(\cancel{C_{hp}\bar{p}}^{0} + \cancel{C_{h\delta r}\delta_r}^{0} + \cancel{C_{h\delta t_r}\delta t_r}^{0}\right) \Rightarrow \boxed{F_r = 0}$$

(NO TIENE TAB)

DESPUÉS DE LA ROTORA:

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + a_1\delta_{f0} + a_1\delta_{f_{iFLOT}} \rightarrow \alpha_{wb} = \frac{2W}{\rho S V_0^2 C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} - \frac{a_1}{C_{L\alpha}}\left(\delta_{f0} + \delta_{f_{iFLOT}}\right)$$

$$H_{fi} = 0 \Rightarrow \delta_{f_{iFLOT}} = \frac{-1}{C_{h\delta f}}\left(C_{h0} + C_{h\alpha}\alpha_{wb}\right)$$

$$\delta_{f_{iFLOT}} = \frac{-1}{C_{h\delta f}}\left[C_{h0} + \frac{C_{h\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2W}{\rho S V_0^2} - C_{L0} - a_1\delta_{f0} - a_1\delta_{f_{iFLOT}}\right)\right] ;$$

$$\delta_{f_{iFLOT}}\left(1 - \frac{C_{h\alpha}}{C_{L\alpha}C_{h\delta f}}a_1\right) = \frac{-1}{C_{h\delta f}}\left[C_{h0} + \frac{C_{h\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2W}{\rho S V_0^2} - C_{L0} - a_1\delta_{f0}\right)\right] ;$$

$$\delta_{f_{iFLOT}} = \frac{-C_{h0} - \frac{C_{h\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2W}{\rho S V_0^2} - C_{L0} - a_1\delta_{f0}\right)}{C_{h\delta f} - \frac{C_{h\alpha}}{C_{L\alpha}}a_1}$$

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S b\left(\cancel{C_{l0}}^{0} + \cancel{C_{lp}\bar{p}}^{0} + C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r\right) + L_{fi}\, d = 0 ;$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\rho V_0^2 S} b\left(C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r\right) + \cancel{\frac{1}{2}\rho V_0^2} S \cdot \underbrace{\Delta C_{Lf}}_{a_1(\delta_{f_{iFLOT}} - \delta_{f0})} d = 0 ;$$

$$b\left(C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r\right) = -a_1 d\left(\delta_{f_{iFLOT}} - \delta_{f0}\right)$$

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S b\left(\cancel{C_{n0}}^{0} + \cancel{C_{np}\bar{p}}^{0} + \cancel{C_{n\delta a}\delta_a}^{0} + C_{n\delta r}\delta_r\right) - D_{fi}\cdot d = 0 ,$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\rho V_0^2 S} b\, C_{n\delta r}\delta_r - \cancel{\frac{1}{2}\rho V_0^2 S}\,\Delta C_{Df}\cdot d = 0$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{a_2}{b C_{n\delta r}} \left(\delta f_{iTOT}^{\,2} - \delta f_0^{\,2}\right)}$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{-a_1 d}{b C_{l\delta a}} \left(\delta f_{iTOT} - \delta f_0\right) - \frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}} \cdot \frac{a_2}{b C_{n\delta r}} \left(\delta f_{iTOT}^{\,2} - \delta f_0^{\,2}\right)}$$

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 S \left(\cancel{C_{y0}}^{\,0} + \cancel{C_{y\beta}}^{\,0}\beta + \cancel{C_{y\delta a}}^{\,0}\delta_a + C_{y\delta r}\delta_r \right) - W\phi = 0$$

$$\boxed{\phi = \frac{2 a_2 C_{y\delta r}}{\rho V_0^2 S b C_{n\delta r} W} \cdot \left(\delta f_{iTOT}^{\,2} - \delta f_0^{\,2}\right)}$$

$$F_r = -G_r H_r = -G_r \cdot \frac{1}{2}\rho V_0^2 S \eta_r C_r S_r \left(\cancel{C_{h\beta}}^{\,0}\beta + C_{h\delta r}\delta_r + \cancel{C_{h\delta tr}}^{\,0}\delta_{tr} \right);$$

$$\boxed{F_r = -G_r \cdot \frac{1}{2}\rho V_0^2 S \eta_r C_r S_r \frac{a_2 C_{n\delta r}}{b C_{n\delta r}} \left(\delta f_{iTOT}^{\,2} - \delta f_0^{\,2}\right)}$$

· Ángulo de ataque del avión antes de la rotura

$$\frac{2W}{\rho V^2 S} = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha_0 + 2a_1\delta_{f_0} \rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{C_{L_\alpha}}\left(\frac{2W}{\rho V_0^2 S} - C_{L_0} - 2a_1\delta_{f_0}\right)$$

· Ángulo de ataque del avión después de la rotura y ángulo de flotación del flap izquierdo.

$$\left.\begin{aligned} &C_{m_{0f}} + C_{m_{\alpha f}}\alpha_1 + C_{m_{\delta f}}\delta_{f_{flot}} = 0 \\ &\frac{2W}{\rho V_0^2 S} = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha_1 + a_1\overbrace{\delta_{f_0}}^{dcho} + a_1\overbrace{\delta_{f_{flot}}}^{izdo} \end{aligned}\right\}$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{C_{L_\alpha}}\left(\delta_{f_{flot}} - \delta_{f_0}\right) + \alpha_0$$

$$\delta_{f_{flot}} = \frac{\frac{C_{m_{\alpha f}}}{C_{m_{\delta f}}}\left(\frac{a_1}{C_{L_\alpha}}\delta_{f_0} - \alpha_0\right) - \frac{C_{m_{0f}}}{C_{m_{\delta f}}}}{1 + \frac{C_{m_{\alpha f}}}{C_{m_{\delta f}}}\cdot\frac{a_1}{C_{L_\alpha}}}$$

· deflexiones de los mandos antes de la rotura

$\boxed{\phi = \delta_a = \delta_r = F_r = 0}$ Avión sim → $C_{l_0} = C_{n_0} = 0$.

· equilibrio de momentos de balance y guiñada después de la rotura

$$\Sigma L: \frac{1}{2}\rho V_0^2 S b\left(C_{l_{\delta_a}}\delta_a + C_{l_{\delta_r}}\delta_r\right) + \frac{1}{2}\rho V_0^2 S a_1\left(\delta_{f_{flot}} - \delta_{f_0}\right) = 0$$

$$\Sigma N: \frac{1}{2}\rho V_0^2 S b C_{n_{\delta_r}}\delta_r + \frac{1}{2}\rho V_0^2 S a_2\left(\delta_{f_0}^2 - \delta_{f_{flot}}^2\right) d = 0$$

$$\delta_r = \frac{a_2 d}{C_{n_{\delta_r}} b}\left(\delta_{f_{flot}}^2 - \delta_{f_0}^2\right)$$

$$\delta_a = \frac{a_1 d}{C_{l\delta a} b}\left(\delta_{f0} - \delta_{ffot}\right) - \frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}} \frac{a_2 d}{C_{n\delta r} b}\left(\delta_{ffot}^2 - \delta_{f0}^2\right)$$

- $Y + W\cos\phi = 0 \longrightarrow \phi = \frac{-\rho S}{2W} V_0^2 C_{Y\delta r}\delta_r$
- $F_r = -C_r H_r = -C_r \frac{1}{2}\rho V_0^2 \eta_v S_r C_r C_{n\delta r}\delta_r$

PROBLEMA 2 → TOTAL: 10 puntos

- Angulo de ataque antes de la rotura:

$$\frac{2W}{\rho V_0^2 S} = C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{C_{L_\alpha}}\left[\frac{2W}{\rho V_0^2 S} - C_{L_0}\right] \rightarrow 1$$

- Angulo de ataque después de la rotura y angulo de deflexión del timón requerido:

$$\frac{2W}{\rho V_0^2 S} = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha_1 + C_{L_{\delta_t}}\delta_{t_{req}} \rightarrow 1$$

$$\alpha_1 = \frac{C_{L_{\delta_t}}}{C_{L_\alpha}}\left(\delta_{t_{req}} - \delta_{t_0}\right) + \alpha_0 \rightarrow 2$$

$$\delta_{t_{req}} = \frac{\ldots}{\ldots} \rightarrow 1$$

$$\rho V_0^2 S\, x_{cp}\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha_1\right) - W x_{cg} = 0 \rightarrow 2$$

$$\rho V_0^2 S\, x_{cp}\left(C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha_0\right) - W x_{cg} = 0$$

$$\rightarrow 1$$

$$\rightarrow 1$$

$$\rightarrow 0.5$$

$$\rightarrow 0.5$$

8

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO [redacted]

E. Final Septiembre "Mecánica del Vuelo I"

PROBLEMA 3

Un avión lleva suspendidos debajo de las alas dos contenedores lanzables, cada uno de peso W_B, colocados simétricamente con respecto al plano de simetría del avión a una distancia d de éste y a una altura h por debajo del plano x_b-y_b.

El avión se encuentra en una condición inicial de vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario con las alas a nivel a velocidad conocida V. En un momento dado el piloto suelta el contenedor izquierdo y acciona los mandos de manera que continúa el vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario a la misma velocidad V.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión sin contenedores (en particular el avión es simétrico, su polar es parabólica de coeficientes constantes conocidos, $C_{n\delta a} = C_{Y\delta a} = C_{L\delta e} = 0$, etc.).

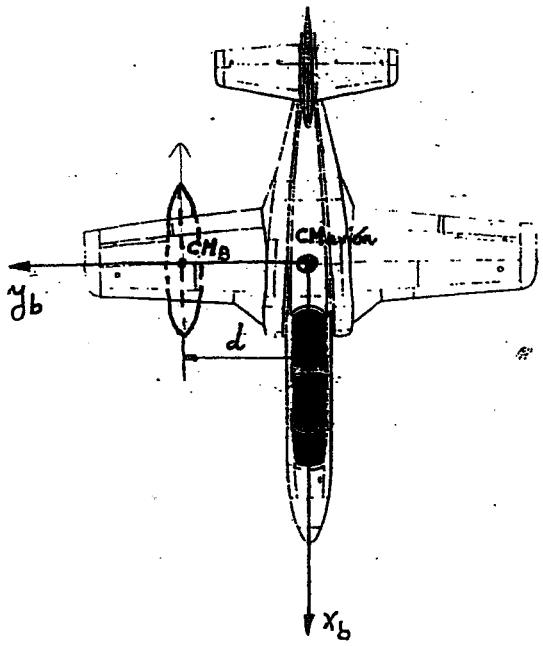
b) Las acciones aerodinámicas sobre cada contenedor se reducen a una resistencia ΔC_{DB} constante y conocida (referida a la superficie alar del avión y aplicada en el centro de masas del contenedor) y el peso de estos no es despreciable frente al del avión.

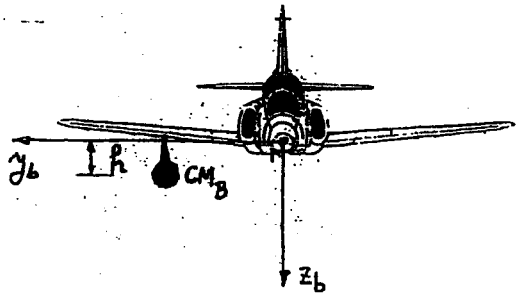
c) El empuje de los motores pasa por el centro de masas del avión y el ángulo de ataque del empuje es despreciable.

d) Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

e) ρ es una constante conocida.

Se pide determinar los incrementos de timón de dirección $\Delta\delta_r$, de alerones $\Delta\delta_a$, de empuje ΔT y de timón de profundidad $\Delta\delta_e$ que debe introducir el piloto para pasar de la situación inicial a la situación final indicadas anteriormente. Comentar físicamente los resultados obtenidos.





TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

Situación inicial → vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario con alas a nivel

$$L = W_T = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha + \cancel{C_{L\delta_e}}\delta_e \right)$$

$$Y = 0 \Rightarrow \cancelto{0}{C_{Y0}} + \cancel{C_{Y\beta}\beta} + \cancel{C_{Y\delta_a}\delta_a} + C_{Y\delta_r}\delta_r = 0$$

$$\mathcal{L} = 0 \Rightarrow \cancelto{0}{C_{\mathcal{L}0}} + \cancel{C_{\mathcal{L}\beta}\beta} + C_{\mathcal{L}\delta_a}\delta_a + C_{\mathcal{L}\delta_r}\delta_r = 0$$

$$T = D + 2D_B = \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D0} + K C_L^2 + 2\Delta C_{DB} \right)$$

$$\delta_r^0 = -\frac{C_{Y0}}{C_{Y\delta_r}} = 0$$

$$\delta_a^0 = -\frac{C_{\mathcal{L}0}}{C_{\mathcal{L}\delta_a}} + \frac{C_{\mathcal{L}\delta_r}}{C_{\mathcal{L}\delta_a}}\frac{C_{Y0}}{C_{Y\delta_r}} = 0$$

$$C_L = \frac{2W_T}{\rho V^2 S} \quad ; \quad \alpha = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W_T}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}$$

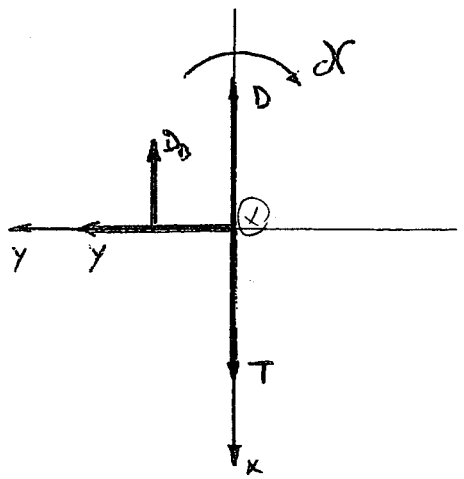
$$T^0 = \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D0} + \frac{4W_T^2 K}{\rho^2 V^4 S^2} + 2\Delta C_{DB} \right)$$

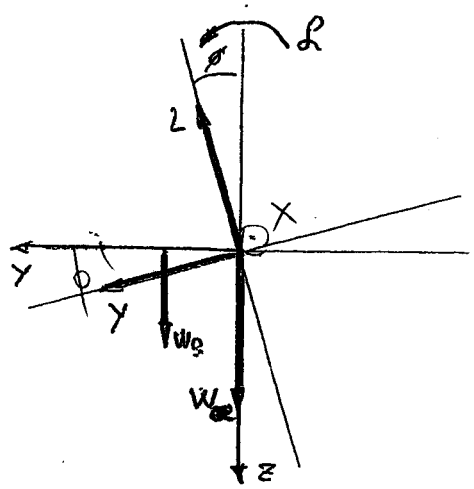
$$C_{mcg} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta_e}\delta_e = \underline{\underline{\frac{h}{c} 2\Delta C_{DB}}}$$

$$\delta_e^0 = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta_e}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}}\left(-\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2W_T}{\rho V^2 S C_{L\alpha}} \right) + \frac{2h}{c}\frac{\Delta C_{DB}}{C_{m\delta_e}}$$

$$W_T = W_a + 2W_B$$

Situación final → vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario





$$\mathcal{N} + d\,D_B = 0$$

$$L = W_a \cos\phi + W_B \cos\phi = (W_a + W_B)\cos\phi \simeq W + W_B = \frac{1}{2}\rho V^2 S\,(C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha)$$

$$\mathcal{L} = d\,W_B = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\,(\cancel{C_{\mathcal{L}0}}^{\,0} + \cancel{C_{\mathcal{L}\beta}\beta} + C_{\mathcal{L}\delta a}\,\delta_a + C_{\mathcal{L}\delta r}\,\delta_r)$$

$$T = D + D_B$$

$$Y = -(W_a + W_B)\,\mathrm{sen}\,\phi \simeq -(W_a + W_B)\,\phi$$

$$T = D + D_B = \frac{1}{2}\rho S V^2\,(C_{D0} + K C_L^2 + \Delta C_{DB})$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\,(\cancel{C_{N0}}^{\,0} + \cancel{C_{N\beta}\beta} + \cancel{C_{N\delta a}\delta_a} + C_{N\delta r}\,\delta_r) = -d\,\frac{1}{2}\rho S V^2\,\Delta C_{DB}$$

$$C_{N0} + C_{N\delta r}\,\delta_r = -\frac{d}{b}\,\Delta C_{DB} \Rightarrow \delta_r^1 = -\frac{d}{b}\,\frac{\Delta C_{DB}}{C_{N\delta r}} - \frac{C_{N0}}{C_{N\delta r}}$$

$$C_{\mathcal{L}0} + C_{\mathcal{L}\delta a}\,\delta_a + C_{\mathcal{L}\delta r}\,\delta_r = \frac{2W_B}{\rho V^2 S}\,\frac{d}{b}$$

$$\delta_a^1 = \frac{2W_B}{\rho V^2 S C_{\mathcal{L}\delta a}} - \frac{C_{\mathcal{L}0}}{C_{\mathcal{L}\delta a}} + \frac{C_{\mathcal{L}\delta r}}{C_{\mathcal{L}\delta a}}\,\frac{d}{b}\,\frac{\Delta C_{DB}}{C_{N\delta r}} + \frac{C_{\mathcal{L}\delta r}}{C_{\mathcal{L}\delta a}}\,\frac{C_{N0}}{C_{N\delta r}}$$

$$T^1 = \frac{1}{2}\rho S V^2\left(C_{D0} + K\,\frac{4(W + W_B)^2}{\rho^2 V^4 S^2} + \Delta C_{DB}\right)$$

$$C_{mcg} = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e} = \frac{h}{c}\,\Delta C_{DB}$$

$$\delta_e^1 = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta e}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta e}}\left(-\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} + \frac{2(W + W_B)}{\rho V^2 S C_{L\alpha}}\right) + \frac{h}{c}\,\Delta C_{DB}$$

$$\Delta\delta_r = \delta_r^1 - \delta_r^0 \Rightarrow \boxed{\Delta\delta_r = -\frac{d}{b}\,\frac{\Delta C_{DB}}{C_{N\delta r}}}$$

$$\Delta\delta_a = \delta_a^1 - \delta_a^0 \Rightarrow \boxed{\Delta\delta_a = \frac{2W_B}{\rho V^2 S C_{\mathcal{L}\delta a}} + \frac{C_{\mathcal{L}\delta r}}{C_{\mathcal{L}\delta a}}\,\frac{d}{b}\,\frac{\Delta C_{DB}}{C_{N\delta r}}}$$

$$\Delta T = T^1 - T^0 = \frac{1}{2}\rho S V^2\left[\frac{4K}{\rho^2 V^4 S^2}\left[(W + W_B)^2 - (W + 2W_B)^2\right] - \Delta C_{DB}\right]$$

$$\boxed{\Delta T = -\frac{1}{2}\rho V^2 S \left[\frac{4K}{\rho^2 V^4 S^2} \left(3W_B^2 + 2WW_B \right) + \Delta C_{DB} \right]}$$

$$\Delta\delta_e = \delta_e' - \delta_e^0 = -\frac{2\,C_{m\alpha}}{\rho V^2 S\, C_{L\alpha}\, C_{m\delta e}} \left(W + W_B - W - 2W_B \right) - \frac{h}{c}\,\frac{\Delta C_{DB}}{C_{m\delta e}}$$

$$\boxed{\Delta\delta_e = \frac{2\,C_{m\alpha}\,W_B}{\rho V^2 S\, C_{L\alpha}\, C_{m\delta e}} - \frac{h}{c}\,\frac{\Delta C_{DB}}{C_{m\delta e}}}$$

(8)

ANTES DE LA SUELTA: (Alas a nivel $\Rightarrow \phi = 0$ y sin reabalamiento $p = 0$)

$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + \cancel{C_{L\delta e}\delta_e}^{\,0} \rightarrow \alpha_{wb} = \frac{2W_T}{\rho S V^2 C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}} \qquad W_T = W + 2W_B$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_{wb} + C_{m\delta e}\delta_e = 2\frac{h}{b}\Delta C_{DB}$$

$$\delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2W_T}{\rho S V^2} - C_{L0}\right) + 2\frac{h}{b}\Delta C_{DB}\right]$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{l0}}^{\,0} + \cancel{C_{l\beta}\beta}^{\,0} + C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r\right) = 0 \rightarrow \delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta a}}\left[\cancel{C_{l0}}^{\,0} + C_{l\delta r}\delta_r\right] = 0$$

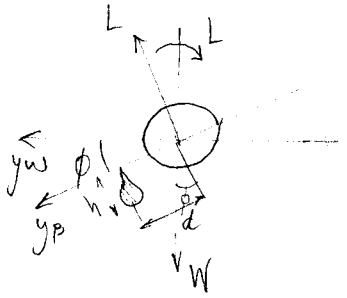
$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{n0}}^{\,0} + \cancel{C_{n\beta}\beta}^{\,0} + \cancel{C_{n\delta a}\delta_a}^{\,0} + C_{n\delta r}\delta_r\right) = 0$$

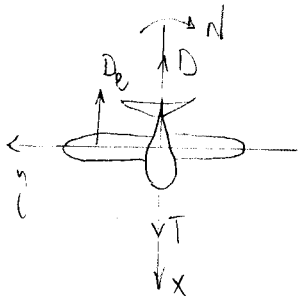
$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\cancel{C_{y0}}^{\,0} + \cancel{C_{y\beta}\beta}^{\,0} + \cancel{C_{y\delta a}\delta_a}^{\,0} + C_{y\delta r}\delta_r\right) = 0 \rightarrow \delta_r = -\frac{\cancel{C_{y0}}^{\,0}}{C_{y\delta r}} = -\frac{\cancel{C_{n0}}^{\,0}}{C_{n\delta r}} = 0$$

$$\delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta a}}\left[C_{l0} - \frac{C_{l\delta r}}{C_{y\delta r}}C_{y0}\right] = -\frac{1}{C_{l\delta a}}\left[\cancel{C_{l0}}^{\,0} - \cancel{\frac{C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}C_{n0}}^{\,0}\right] = 0$$

$$T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S' C_D = \frac{1}{2}\rho V^2 S'\left(C_{D0} + K C_L^2 + 2\Delta C_{DB}\right)$$

DESPUÉS DE LA SUELTA:





$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + \cancel{C_{L\delta e}\delta_e}^{\,0} = \frac{2(W+W_B)}{\rho V^2 S}$$

$$\alpha_{wb} = \frac{2(W+W_B)}{\rho S V^2 C_{L\alpha}} - \frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_{wb} + C_{m\delta e}\delta_e = \frac{h}{c}\Delta C_{DB} \rightarrow \delta_e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} + \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}}\left(\frac{2(W+W_B)}{\rho S V^2} - C_{L0}\right) + \frac{h}{b}\Delta C_{DB}\right]$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{l0}}^{\,0} + \cancel{C_{l\beta}\beta}^{\,0} + C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r\right) - W_B d = 0 \rightarrow \delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta a}}\left[\cancel{C_{l0}}^{\,0} + C_{l\delta r}\delta_r - \frac{W_B}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}\cdot\frac{d}{b}\right]$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{n0}}^{\,0} + \cancel{C_{n\beta}\beta}^{\,0} + \cancel{C_{n\delta a}\delta_a}^{\,0} + C_{n\delta r}\delta_r\right) + D_B d = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\cancel{C_{y0}}^{\,0} + \cancel{C_{y\beta}\beta}^{\,0} + \cancel{C_{y\delta a}\delta_a}^{\,0} + C_{y\delta r}\delta_r\right) + (W+W_B)\operatorname{sen}\phi = 0; \quad \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{y0}}^{\,0} + C_{y\delta r}\delta_r\right) + (W+W_B)\phi = 0$$

$$T = D + D_B = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D0} + K C_L^2 + \Delta C_{DB}\right)$$

$$\delta_r = \frac{-1}{C_{n\delta r}}\left[\cancel{C_{n0}}^{\,0} + \frac{\cancel{\frac{1}{2}\rho V^2 S}\,\Delta C_{DB}\, d}{\cancel{\frac{1}{2}\rho V^2 S}\, b}\right] = -\frac{1}{C_{n\delta r}}\left[\cancel{C_{n0}}^{\,0} + \Delta C_{DB}\frac{d}{b}\right]$$

$$\delta_a = \frac{-1}{C_{l\delta a}}\left[\cancel{C_{l0}}^{\,0} - \frac{C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}\left(\cancel{C_{n0}}^{\,0} + \Delta C_{DB}\frac{d}{b}\right) - \frac{2W_B}{\rho V^2 S}\cdot\frac{d}{b}\right]$$

$$\boxed{\Delta\delta_r = -\cancel{\frac{C_{y0}}{C_{y\delta r}}}^{\,0} + \frac{1}{C_{n\delta r}}\left[\cancel{C_{n0}}^{\,0} + \Delta C_{DB}\frac{d}{b}\right] = \frac{-1}{C_{n\delta r}}\Delta C_{DB}\frac{d}{b}}$$

$$\boxed{\Delta\delta_a = \frac{1}{C_{l\delta a}}\left[C_{l\delta r}\left(\frac{C_{y0}}{C_{y\delta r}} - \frac{C_{n0}+\Delta C_{DB}\,d/b}{C_{n\delta r}}\right) - \frac{2W_B}{\rho V^2 S}\cdot\frac{d}{b}\right] = \frac{1}{C_{l\delta a}}\left[-\frac{C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}\Delta C_{DB}\frac{d}{b} - \frac{2W_B}{\rho V^2 S}\cdot\frac{d}{b}\right]}$$

$$\boxed{\Delta\delta_e = -\frac{1}{C_{m\delta e}}\left[\frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}}\cdot\frac{2W_B}{\rho S V^2} + \frac{h}{b}\Delta C_{DB}\right]}$$

$$\boxed{\Delta T = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[K\left(C_L^2 - C_{L_0}^2\right) + \Delta C_{DB}\right] = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[K\left(\frac{4(W+2W_B)^2}{\rho^2 V^4 S^2} - \frac{4(W+W_B)^2}{\rho^2 V^4 S^2}\right) + \Delta C_{DB}\right] =}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[\frac{4K}{\rho^2 V^4 S^2}\left(3W_B^2 + 2WW_B\right) + \Delta C_{DB}\right]}$$

D-264

PROBLEMA 27

Un avión dispone de un sistema de mando lateral, mediante palanca, completamente reversible y sin tab de compensación y de un sistema de mando direccional, mediante pedales, completamente reversible y con tab de compensación.

Mediante cierta ligadura mecánica, cuando el piloto deflecta los alerones también deflecta el compensador del timón de dirección (con objeto de compensar la guiñada adversa) sin necesidad de ningún mando adicional.

Suponiendo que el avión tiene una asimetría másica (peso colgado del ala izquierda), que el piloto sólo actúa sobre los alerones y que se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión, se pide:

1°) Determinar la fuerza en palanca F_{Sa} necesaria para volar horizontal rectilínea, horizontal y estacionariamente a velocidad V y con β nulo.

2°) Determinar la relación de mecanismos que debe existir entre la deflexión de alerones δ_a y la deflexión del compensador del timón de dirección δ_{t_r} en las condiciones del apartado anterior, y comentar su signo.

9

1) $T = D$

$-Q + (W+W_p)\mu = 0$

$-L + (W+W_p) = 0$

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} \rightarrow Y = -D\cancel{\beta}^{0} - Q$$

$Y = -(W+W_p)\cancel{\mu}^{\phi}$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_y = \frac{1}{2}\rho S V^2 (\cancel{C_{y0}}^{0} + C_{y\beta}\cancel{\beta}^{0} + C_{y\delta a}\delta a + C_{y\delta r}\delta r) = -(W+W_p)\cancel{\phi}$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_l = \frac{1}{2}\rho S V^2 b (\cancel{C_{l0}}^{0} + \cancel{C_{l\beta}}^{0}\cancel{\beta}^{0} + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r) = W_p \cdot l_p \quad (I)$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_n b = \frac{1}{2}\rho S V^2 b (\cancel{C_{n0}}^{0} + \cancel{C_{n\beta}}^{0}\cancel{\beta}^{0} + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r) = \cancel{D_p l_p}^{0} \rightsquigarrow \delta_r = \frac{-C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}\delta a$$

$$D_p = \frac{1}{2}\rho S V^2 (C_{D0p} + K\cancel{C_{Lp}^2}^{0}) \simeq 0$$

$$(I) \rightsquigarrow \frac{1}{2}\rho S V^2 b \left[C_{l\delta a}\delta a - \frac{C_{n\delta a} C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}\delta a \right] = W_p l_p$$

$$\delta a \left[C_{l\delta a} - \frac{C_{n\delta a} C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}} \right] = \frac{2 W_p l_p}{\rho S V^2 b}$$

$$\delta_a = \frac{2 W_p l_p}{\rho S V^2 b} \frac{1}{C_{l\delta a} - \frac{C_{n\delta a} C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}}$$

$$F_{sa} = -G_a \cdot \frac{1}{2}\cancel{\rho S V^2} S_a C_a C_{ha\delta a} \frac{2 W_p l_p}{\cancel{\rho S V^2} b} \cdot \frac{1}{C_{l\delta a} - \frac{C_{n\delta a} C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}}$$

$$\boxed{F_{sa} = \frac{-2 W_p l_p}{C_{l\delta a} - \frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}} \cdot C_{l\delta r}} \cdot \frac{G_a S_a C_a C_{ha\delta a}}{b}}$$

2)

$$\delta_r = \frac{-2 W_p l_p}{\rho S V^2 b} \cdot \frac{1}{C_{l\delta a} - \frac{C_{n\delta a} C_{l\delta r}}{C_{n\delta r}}} \cdot \frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}} = \frac{-2 W_p l_p}{\rho S V^2 b} \cdot \frac{C_{n\delta a}}{C_{l\delta a} C_{n\delta r} - C_{n\delta a} C_{l\delta r}}$$

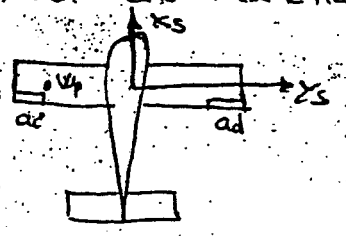
$$F_r = -G_r \cdot \frac{1}{2}\rho S V^2 \eta_r S_r C_r \left[\cancel{C_{h\beta}}^{0}\cancel{\beta}^{0} + C_{h\delta r} \frac{-2 W_p l_p}{\rho S V^2 b} \cdot \frac{C_{n\delta a}}{C_{l\delta a} C_{n\delta r} - C_{n\delta a} C_{l\delta r}} + C_{h\delta tr} \cdot \delta_{tr} \right] = 0$$

$$\delta_{tr} = \frac{C_{h\delta r}}{C_{h\delta tr}} \left[\frac{2 W_p l_p}{\rho S V^2 b} \cdot \frac{C_{n\delta a}}{C_{l\delta a} C_{n\delta r} - C_{n\delta a} C_{l\delta r}} \right]$$

$$\boxed{\frac{\delta_{tr}}{\delta_a}} = \frac{\dfrac{C_{h_r\delta_r}}{C_{h_r\delta_{tr}}}\left[\dfrac{2W_p\cancel{l_p}}{\cancel{\rho S}\,V^2 b}\;\dfrac{C_{n\delta_a}}{\cancel{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r} - C_{n\delta_a}C_{l\delta_r}}}\right]}{\dfrac{2W_p\cancel{l_p}}{\cancel{\rho S}\,V^2 b}\cdot\dfrac{C_{n\delta_r}}{\cancel{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r} - C_{n\delta_a}C_{l\delta_r}}}} = \boxed{\frac{C_{h_r\delta_r}}{C_{h_r\delta_{tr}}}\cdot\frac{C_{n\delta_a}}{C_{n\delta_r}}}$$

PROBLEMA 27

• AVIÓN CON ASIMETRÍA MÁSICA.

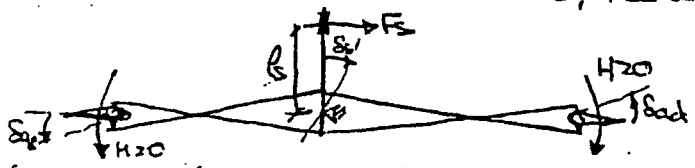


PILOTO SOLO ACTÚA SOBRE LOS ALERONES

COMPENSADOR EN TIMÓN DE DIRECCIÓN PARA COMPENSAR GUIÑADA ADVERSA.

1.- DET. FUERZA EN PALANCA F_s PARA VUELO HORIZONTAL, RECTILÍNEO ESTACIONARIO A $V=cte$ y $\beta=0$

Fuerza en palanca



La deflexión del alerón derecho es positiva hacia arriba y la del alerón izqdo es positiva hacia abajo.

Tomamos $H>0$ cuando va según el eje y_s

Ppio de trabajos virtuales $F_s \ell_s d\delta_s + H_{ai} d\delta_{ai} - H_{ad} d\delta_{ad} = 0$

Se desprecia la fuerza sobre el tab de compensación.

$H_{ai} = q S_{ai} c_{ai} (C_{h0} + C_{h\alpha} \cdot \alpha_w + C_{h\delta} \cdot \delta_{ai})$

$H_{ad} = q S_{ad} c_{ad} (C_{h0} + C_{h\alpha} \cdot \alpha_w + C_{h\delta} \cdot \delta_{ad})$

Entonces: $F_s = \dfrac{-d\delta_{ai}}{\ell_s d\delta_s} H_{ai} + \dfrac{d\delta_{ad}}{\ell_s d\delta_s} H_{ad}$

Tomamos: $\delta_a = \dfrac{\delta_{ai} + \delta_{ad}}{2}$

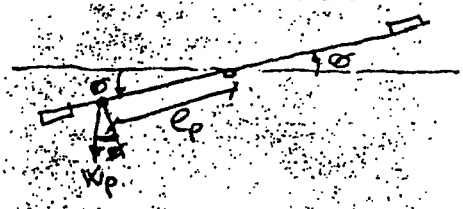
Si los dos alerones tienen la misma geometría $H_a = H_{ai} = H_{ad} = q S_a c_a (C_{h0} + C_{h\alpha} \cdot \alpha_w + C_{h\delta} \cdot \delta_a)$

Tomamos $C_{h0} \simeq 0$ y las contribuciones de α_w se anulan en los dos alerones $\Rightarrow$ $\boxed{H_a = q S_a c_a C_{h\delta} \cdot \delta_a}$

Como $H_{ai} = -H_{ad} \Rightarrow F_s = -\dfrac{d\delta_{ai}}{\ell_s d\delta_s} H_a - \dfrac{d\delta_{ad}}{\ell_s d\delta_s} H_a = -\dfrac{2 d\delta_a}{\ell_s d\delta_s} H_a = -G_a H_a$

$G_a = \dfrac{2 d\delta_a}{\ell_s d\delta_s} \Rightarrow F_s = -G_a q S_a c_a C_{h\delta} \cdot \delta_a$

Planteamos 3 ecuaciones!



$L = W_p \ell_p = qSb(\cancel{C_{L0}}^{0} + \cancel{C_{L\alpha}\cdot\beta}^{0} + C_{L\delta_a}\cdot\delta_a + \cancel{C_{L\delta_r}\cdot\delta_r}^{0})$

$N = 0 = qSb(\cancel{C_{n0}}^{0} + \cancel{C_{n\alpha}\cdot\beta}^{0} + C_{n\delta_a}\cdot\delta_a + \cancel{C_{n\delta_r}\cdot\delta_r}^{0})$

$Y = W_p \operatorname{sen}\phi = qS(\cancel{C_{Y0}}^{0} + \cancel{C_{Y\alpha}\cdot\beta}^{0} + C_{Y\delta_a}\cdot\delta_a + \cancel{C_{Y\delta_r}\cdot\delta_r}^{0})$

$$C_{fa}\cdot\delta_a + C_{fr}\cdot\delta_r = \frac{W_p l_p}{qSb}$$

$$C_{n\delta a}\cdot\delta_a + C_{n\delta r}\cdot\delta_r = 0 \rightarrow \delta_r = -\frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}\delta_a \Rightarrow C_{f\delta a}\cdot\delta_a - C_{f\delta r}\frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}\delta_a = \frac{W_p l_p}{qSb}$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{W_p l_p}{qSb}\frac{1}{C_{f\delta a} - C_{f\delta r}\frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}}} \Rightarrow \boxed{F_{s_a} = -G_a W_p l_p \frac{S_a c_a}{Sb}\frac{C_{h\delta a}}{C_{f\delta a} - C_{f\delta r}\frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}}}$$

2. RELACIÓN DE MECANISMOS ENTRE δ_a y $\delta_{\acute{e}r}$ EN LAS CONDS. DEL APARTADO ANTERIOR

Sabemos que $\delta_r = -\frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}\delta_a$

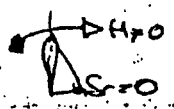
$\delta_{\acute{e}r}$ se pone para que el momento de charnela sea nulo en el timón de dirección. $\cancel{C_{h_0}}^{0} + \cancel{C_{h_\beta}\beta}^{0} + C_{h\delta r}\cdot\delta_r + C_{h\delta_{\acute{e}r}}\cdot\delta_{\acute{e}r} = 0$

$$C_{h\delta r}\left(-\frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}\right)\delta_a + C_{h\delta_{\acute{e}r}}\delta_{\acute{e}r} = 0 \Rightarrow \boxed{\delta_{\acute{e}r} = \frac{C_{h\delta r}}{C_{h\delta_{\acute{e}r}}}\cdot\frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}\delta_a}$$

Relación de mecanismos $= \frac{C_{h\delta r}}{C_{h\delta_{\acute{e}r}}}\frac{C_{n\delta a}}{C_{n\delta r}}$

$C_{n\delta a} < 0$ pq para $\delta_a > 0 \Rightarrow N < 0$

$C_{n\delta r} > 0$ pq para $\delta_r > 0 \Rightarrow N > 0$



$C_{h\delta r} > 0$ pq $\delta_r > 0 \Rightarrow H_r > 0$

$C_{h\delta_{\acute{e}r}} > 0$ pq $\delta_{\acute{e}r} > 0 \Rightarrow H_r > 0$

Entonces Relac de mecanismos $= \frac{C_{h\delta r}\, C_{n\delta a}}{C_{h\delta_{\acute{e}r}}\, C_{n\delta r}} < 0$

Esto quiere decir que para $\delta_a > 0 \Rightarrow \delta_{\acute{e}r} < 0$

Un $\delta_a > 0$ originaría un momento de guiñada $N < 0$ (guiñada adverso) y entonces necesitamos un $\delta_{\acute{e}r}$ para compensarlo.

D-188

PROBLEMA 25 libro 13.1

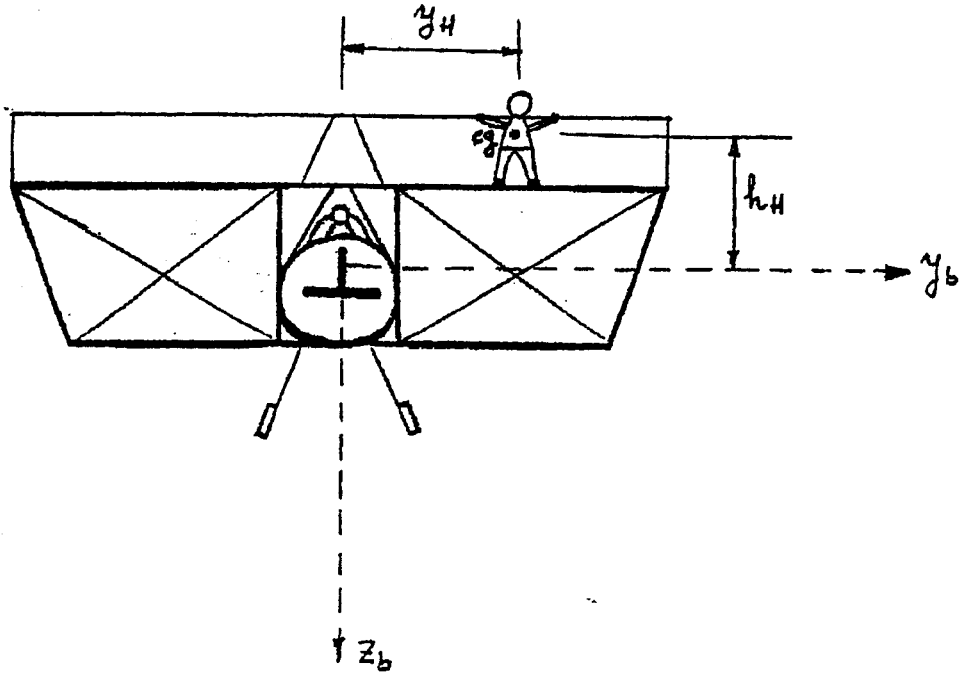
Un avión biplano pretende realizar un vuelo de exhibición horizontal, rectilíneo y uniforme con un hombre encima de su ala superior. El acróbata puede desplazarse lateralmente por encima del ala del biplano de forma que su centro de gravedad se sitúe a una distancia y_H del plano de simetría del avión.

Suponiendo conocidas todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión (en concreto $C_{Y_{\delta a}} = C_{n_{\delta a}} = 0$) así como el peso del hombre, W_H, la distancia representada en la figura adjunta, h_H, la densidad atmosférica, ρ, y el coeficiente de resistencia del hombre, C_{DH}, con relación a una superficie de referencia, S_H, se pide:

1°) Determinar las incógnitas lateral-direccionales del problema en función de y_H y de la velocidad de vuelo V, para las dos situaciones siguientes:
   a) Alas a nivel
   b) Resbalamiento nulo.

2°) Determinar, para las dos situaciones del apartado anterior, el máximo desplazamiento posible del acróbata, y_{HMAX}, suponiendo conocidas las deflexiones máximas permitidas para los alerones, δ_{aMAX}, y el timón de dirección, δ_{rMAX}.

NOTA: Considérense ángulos pequeños.



D-248

PROBLEMA 26

La figura esquematiza un avión en vuelo horizontal, rectilíneo, estacionario a velocidad V constante con su eje y_b contenido en el plano vertical (vuelo a "cuchillo").

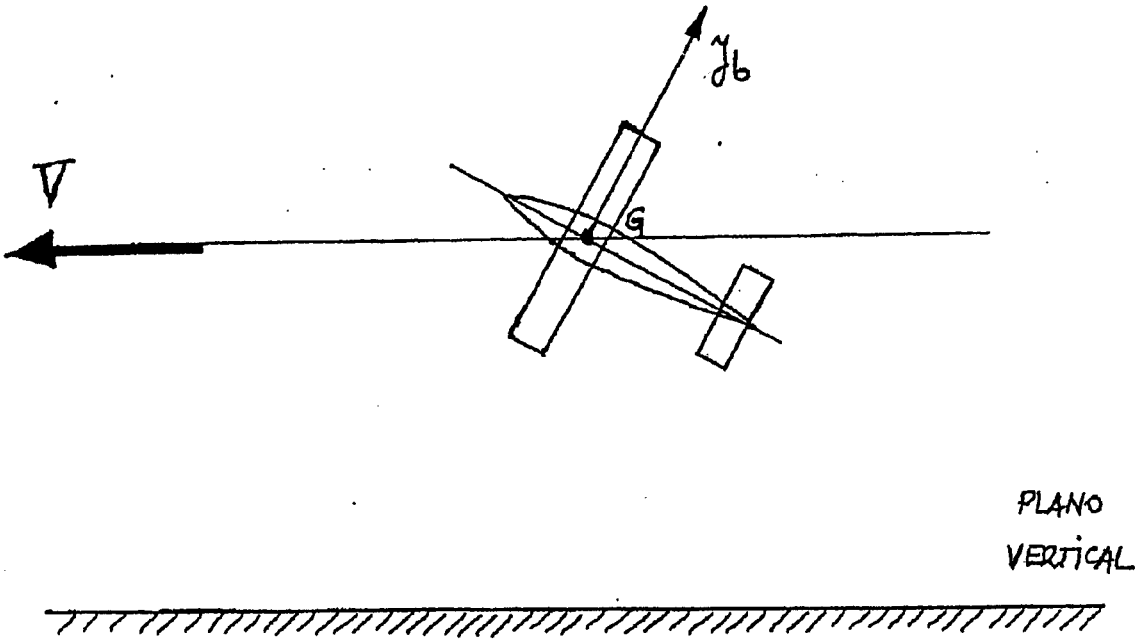
Suponiendo que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas necesarias para la resolución del problema (en concreto $C_{Y_{\delta a}} = C_{n_{\delta a}} = 0$)

b) El empuje pasa por el centro de gravedad y es paralelo al eje x_s.

c) Todos los ángulos son pequeños.

Se pide determinar $\delta_e, \delta_a, \delta_r, \alpha$ y β.



(17)

1)
$$T\cos\varepsilon\cos\nu - D - mg\,\cancelto{0}{\operatorname{sen}\gamma} - m\cancelto{0}{\dot V} = 0$$
$$T\cos\varepsilon\operatorname{sen}\nu - Q + mg\,\cancelto{1}{\cos\gamma}\operatorname{sen}\mu + mV(\cancel{\dot\gamma\operatorname{sen}\mu - \dot\chi\cos\gamma\cos\mu}) = 0$$
$$-T\operatorname{sen}\varepsilon - L + mg\,\cancelto{1}{\cos\gamma}\cos\mu + mV(\cancel{\dot\gamma\cos\mu + \dot\chi\cos\gamma\operatorname{sen}\mu}) = 0$$

Ecs dinámicas en ejes viento
Vuelo horizontal $\Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \theta = \alpha = 0$
T según $x_s \Rightarrow \varepsilon = \alpha$; $\nu = \beta$

$$T - D = 0 \rightsquigarrow D = T$$
$$T\beta - Q + W\mu = 0 \rightsquigarrow Q = T\beta + W\mu$$
$$-T\alpha - L + W = 0 \rightsquigarrow L = W - T\alpha$$

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta & -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$\alpha = 0$
$\beta \ll 1$ Ejes estabilidad

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$$F_{Ax} = -D + \beta Q$$
$$F_{Ay} = -D\beta - Q = Y$$
$$F_{Az} = -L$$

$$-W\cancelto{0}{\operatorname{sen}\theta} + \cancelto{T}{F_{Tx}} + F_{Ax} = 0$$
$$W\cancelto{1}{\cos\theta}\operatorname{sen}\phi + \cancelto{0}{F_{Ty}} + F_{Ay} = 0$$
$$W\cancelto{1}{\cos\theta}\cos\phi + \cancelto{0}{F_{Tz}} + F_{Az} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{ll} T - D + \beta Q = 0 & L_A = 0 \\ W\phi - D\beta - Q = W\phi - Y = 0 & N_A = 0 \\ W - L = 0 & M_A = 0 \end{array}} \right.$$

2)
$$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[\cancelto{0}{C_{Y0}} + C_{Y\beta}\beta + \cancelto{0}{C_{Y\delta a}\delta a} + C_{Y\delta r}\delta r\right] = W\phi \quad (I)$$
$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[\cancelto{0}{C_{l0}} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r\right] = 0 \quad (II)$$
$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[\cancelto{0}{C_{n0}} + C_{n\beta}\beta + C_{n\delta a}\delta a + C_{n\delta r}\delta r\right] = 0 \quad (III)$$

(II)
$$\delta a = \frac{-C_{l\beta}C_{n\delta r} + C_{n\beta}C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\cdot\beta \quad ; \quad \boxed{\frac{d\delta a}{d\beta} = \frac{-C_{l\beta}C_{n\delta r} + C_{n\beta}C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}}$$

(III)
$$\delta r = \frac{C_{l\beta}C_{n\delta a} - C_{l\delta a}C_{n\beta}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\cdot\beta \quad ; \quad \boxed{\frac{d\delta r}{d\beta} = \frac{C_{l\beta}C_{n\delta a} - C_{l\delta a}C_{n\beta}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}}$$

$$(I) \longrightarrow \phi = \frac{\rho S V^2}{2W}\left[C_{Y\beta}\beta + C_{Y\delta r}\cdot\delta r\right] \quad ; \quad \frac{d\phi}{d\beta} = \frac{\rho S V^2}{2W}\left[C_{Y\beta} + C_{Y\delta r}\frac{C_{l\beta}C_{n\delta a} - C_{l\delta a}C_{n\beta}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\right]$$

$$C_{LS} = \frac{2W}{\rho S V^2}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{d\beta} = \frac{1}{C_{LS}}\left[C_{Y\beta} + C_{Y\delta r}\frac{C_{l\beta}C_{n\delta a} - C_{l\delta a}C_{n\beta}}{C_{l\delta a}C_{n\delta r} - C_{n\delta a}C_{l\delta r}}\right]}$$

3) Si $|C_{l\delta_r} C_{n\delta_a}| \ll C_{n\delta_r} C_{l\delta_a}$:

$$\boxed{\frac{d\delta_a}{d\beta} = \frac{C_{y\beta} C_{l\delta_r} - C_{l\beta} C_{n\delta_r}}{C_{l\delta_a} C_{n\delta_r}}}$$

$$\boxed{\frac{d\delta_r}{d\beta} = \frac{C_{l\beta} C_{n\delta_a} - C_{l\delta_a} C_{y\beta}}{C_{l\delta_a} C_{n\delta_r}}}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{d\beta} = \frac{1}{a_s}\left[C_{y\beta} + C_{y\delta_r} \frac{C_{l\beta} C_{n\delta_a} - C_{l\delta_a} C_{y\beta}}{C_{l\delta_a} C_{n\delta_r}}\right]}$$

4) DATOS
$$\begin{cases} \dfrac{C_{l\delta_r}}{C_{l\beta}} = A & \dfrac{C_{n\delta_a}}{C_{n\beta}} = B & \dfrac{C_{l\beta}}{C_{l\delta_a}} = X \\[2ex] \dfrac{d\delta_a}{d\beta} = D_1 & \dfrac{d\delta_r}{d\beta} = D_2 & \dfrac{C_{n\beta}}{C_{n\delta_r}} = Y \end{cases}$$

$$D_1 = YAX - X = X(AY - 1) \rightsquigarrow X = \frac{D_1}{(AY-1)}$$

$$D_2 = XBY - Y = Y(BX - 1)$$

$$D_2 = Y\left(\frac{BD_1}{(AY-1)} - 1\right) ; \quad D_2 = \frac{BD_1 Y}{AY-1} - Y ; \quad AYD_2 - D_2 = BD_1 Y - AY^2 + Y$$

$$AY^2 + Y(AD_2 - BD_1 - 1) - D_2 = 0$$

$$Y = \frac{-AD_2 + BD_1 + 1 \pm \sqrt{(AD_2 - BD_1 - 1)^2 + 4AD_2}}{2A}$$

$$X = \frac{D_1}{\left[\dfrac{-AD_2 + BD_1 + 1 \pm \sqrt{(AD_2 - BD_1 - 1)^2 + 4AD_2}}{2} - 1\right]}$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 21.09.11

E. Final Septiembre *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 2º

Un avión simétrico se encuentra en una condición de referencia de vuelo horizontal simétrico rectilíneo estacionario con las alas a nivel y con coeficiente de sustentación C_{LS} conocido. A partir de esa condición inicial de referencia y manteniendo la velocidad, se efectúan una serie de ensayos en vuelo horizontal rectilíneo estacionario con distintos ángulos de resbalamiento, para los que se registran los valores precisos de los ángulos de resbalamiento, β, y de las deflexiones de alerones, δ_a, y timón de dirección, δ_r.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (en particular, las características aerodinámicas se conocen en los ejes estabilidad del vuelo de referencia, $C_{Y\delta a} = 0$, etc.).

b) El empuje del grupo motopropulsor está dirigido según el eje x_s y los efectos del mismo sobre el equilibrio de momentos alrededor del centro de masas del avión son despreciables.

c) Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

Se pide:

1º) Plantear las ecuaciones dinámicas de fuerzas y momentos en ejes estabilidad.

2º) Para vuelo horizontal rectilíneo estacionario no simétrico, determinar $d\phi/d\beta$, $d\delta_a/d\beta$ y $d\delta_r/d\beta$ en función de C_{LS} y de los demás parámetros del problema.

3º) Simplificar las expresiones del apartado anterior suponiendo que $|C_{l\delta r}C_{n\delta a}| << C_{n\delta r}C_{l\delta a}$.

4º) Si a partir de los ensayos en vuelo mencionados se han obtenido los valores de $d\delta_a/d\beta$ y $d\delta_r/d\beta$, utilizando las expresiones simplificadas del apartado anterior determinar los valores de las relaciones $C_{l\beta}/C_{l\delta a}$ y $C_{n\beta}/C_{n\delta r}$, supuestas conocidas las relaciones $C_{l\delta r}/C_{l\beta}$ y $C_{n\delta a}/C_{n\beta}$.

TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

(10)

1) a) $\underline{\phi = 0}$

$$T\cancel{\cos\beta}^{\,1} - (D + D_H) = 0 \quad (I)$$
$$T\beta - Q = 0 \quad (II)$$
$$-L + (W + W_H) = 0 \quad (III)$$

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} \Rightarrow Y = -D\beta - Q$$

$$(II) \longrightarrow (D + D_H)\beta - \overbrace{Q}^{-(D+D_H)\beta - Y} = 0 \; ; \quad Y = 0$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(\cancel{C_{Y_0}}^{\,0} + C_{Y_\beta}\beta + \cancel{C_{Y_{\delta a}}\delta_a}^{\,0} + C_{Y_{\delta r}}\delta_r\right) = 0 \rightsquigarrow \beta = \frac{-C_{Y_{\delta r}}}{C_{Y_\beta}}\delta_r$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho S V^2 b\left(\cancel{C_{l_0}}^{\,0} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta a}}\delta_a + C_{l_{\delta r}}\delta_r\right) = -W_H \cdot y_H + D_H h_H \cancel{\sin\beta}^{\,\beta} \quad (II)$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho S V^2 b\left(\cancel{C_{n_0}}^{\,0} + C_{n_\beta}\beta + \cancel{C_{n_{\delta a}}\delta_a}^{\,0} + C_{n_{\delta r}}\delta_r\right) = -D_H \cdot y_H \cancel{\cos\beta}^{\,1} \quad (I)$$

$$D_H = \frac{1}{2}\rho S_H V^2 \left(C_{D_{0H}} + \cancel{K C_{L_H}^2}^{\,0}\right)$$

$$(I) \rightsquigarrow \cancel{\frac{1}{2}\rho} S V^2 b\left(\frac{-C_{n_\beta} C_{Y_{\delta r}}}{C_{Y_\beta}}\delta_r + C_{n_{\delta r}}\delta_r\right) = -\cancel{\frac{1}{2}\rho} S_H \cancel{V^2} C_{D_{0H}} y_H$$

$$\delta_r\left[C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{n_\beta} C_{Y_{\delta r}}}{C_{Y_\beta}}\right] = \frac{S_H}{S} \cdot \frac{C_{D_{0H}}}{b} y_H$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{\frac{S_H}{S} \cdot \frac{C_{D_{0H}}}{b} \cdot y_H}{C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{n_\beta} C_{Y_{\delta r}}}{C_{Y_\beta}}}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{-C_{Y_{\delta r}} \frac{S_H}{S} \cdot \frac{C_{D_{0H}}}{b} \cdot y_H}{C_{n_{\delta r}} C_{Y_\beta} - C_{n_\beta} C_{Y_{\delta r}}}}$$

$$(II) \rightsquigarrow C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta a}}\delta_a + C_{l_{\delta r}}\delta_r = \frac{-2W_H y_H}{\rho S V^2 b} + \frac{S_H}{S} \cdot \frac{C_{D_{0H}}}{b} h_H \cdot \beta$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{+1}{C_{l_{\delta a}}}\left\{\left[\frac{-2W_H y_H}{\rho S V^2 b} - \left(\frac{S_H}{S}\right)^2 \cdot \left(\frac{C_{D_{0H}}}{b}\right)^2 h_H y_H \frac{C_{Y_{\delta r}}}{C_{n_{\delta r}} C_{Y_\beta} - C_{n_\beta} C_{Y_{\delta r}}}\right] + \frac{C_{l_\beta} C_{Y_{\delta r}} \frac{S_H}{S} \frac{C_{D_{0H}}}{b} y_H}{C_{n_{\delta r}} C_{Y_\beta} - C_{n_\beta} C_{Y_{\delta r}}} - \frac{C_{l_{\delta r}} \frac{S_H}{S} \frac{C_{D_{0H}}}{b} y_H}{C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{n_\beta} C_{Y_{\delta r}}}{C_{Y_\beta}}}\right\}}$$

b) $\underline{\beta = 0}$

$$T - (D + D_H) = 0$$

$$-Q + (W + W_H)\phi = 0 \rightarrow Y = -(W + W_H)\phi$$

$$-L + (W_A + W) = 0$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho S V^2 (\cancel{C_{y_0}} + \cancel{C_{y_\beta}\beta} + \cancel{C_{y_{\delta a}}\delta_a} + C_{y_{\delta r}}\delta_r) = -(W + W_H)\phi \rightarrow \phi = \frac{-C_{y_{\delta r}}\delta_r}{W + W_H} \cdot \frac{\rho S V^2}{2}$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho S V^2 b (\cancel{C_{l_0}} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta a}}\delta_a + C_{l_{\delta r}}\delta_r) = -W_H y_H \cancel{\cos\phi} - W_H h_H \cancel{\sin\phi} \quad (I)$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho S V^2 b (\cancel{C_{n_0}} + \cancel{C_{n_\beta}\beta} + \cancel{C_{n_{\delta a}}\delta_a} + C_{n_{\delta r}}\delta_r) = -D_H y_H$$

$$D_H = \frac{1}{2}\rho S_H V^2 (C_{D_{0H}} + \cancel{K C_{L_H}})$$

$$\boxed{\delta_r = -\frac{S_H}{S} \cdot \frac{C_{D_{0H}}}{b} \cdot \frac{1}{C_{n_{\delta r}}}}$$

$$\boxed{\phi = \frac{S_H C_{D_{0H}} C_{y_{\delta r}}}{\cancel{S} \cdot b\, C_{n_{\delta r}}} \cdot \frac{\rho \cancel{S} V^2}{2(W + W_H)}}$$

$$(I) \rightarrow \frac{1}{2}\rho S V^2 b \left[C_{l_{\delta a}}\delta_a - \frac{S_H}{S} \cdot \frac{C_{D_{0H}}}{b} \frac{C_{l_{\delta r}}}{C_{n_{\delta r}}} \right] = -W_H y_H - W_H \cdot h_H \frac{S_H C_{D_{0H}} C_{y_{\delta r}}}{\cancel{S} \cdot b\, C_{n_{\delta r}}} \cdot \frac{\rho \cancel{S} V^2}{2(W + W_H)}$$

$$\delta_a \left[C_{l_{\delta a}} - \frac{S_H}{S} \cdot \frac{C_{D_{0H}}}{b} \cdot \frac{C_{l_{\delta r}}}{C_{n_{\delta r}}} \right] = \frac{-2 W_H y_H}{\rho S V^2 b} - \frac{\cancel{2} W_H h_H S_H C_{D_{0H}} C_{y_{\delta r}}}{\cancel{2} b^2 S (W + W_H)}$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{\dfrac{-2 W_H y_H}{\rho S V^2 b} - \dfrac{W_H h_H S_H C_{D_{0H}} C_{y_{\delta r}}}{b^2 S (W + W_H)}}{C_{l_{\delta a}} - \dfrac{S_H C_{D_{0H}} C_{l_{\delta r}}}{S b\, C_{n_{\delta r}}}}}$$

2) $\underline{\phi = 0}$:

$$(II) \rightarrow \boxed{y_{H_{MAX}} = \frac{C_{n_{\delta r}} - \dfrac{C_{n_\beta} C_{y_{\delta r}}}{C_{y_\beta}}}{\dfrac{S_H}{S} \cdot \dfrac{C_{D_{0H}}}{b}} \cdot \delta_{r_{MAX}}}$$

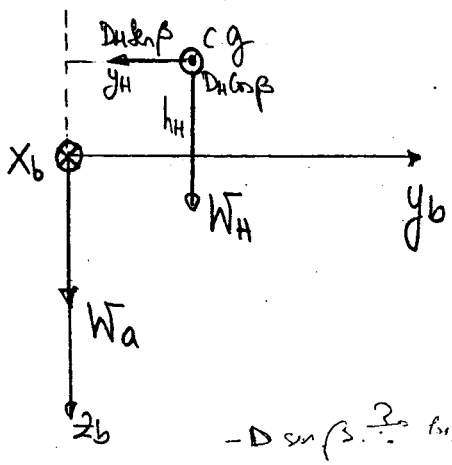
$\underline{\beta = 0}$

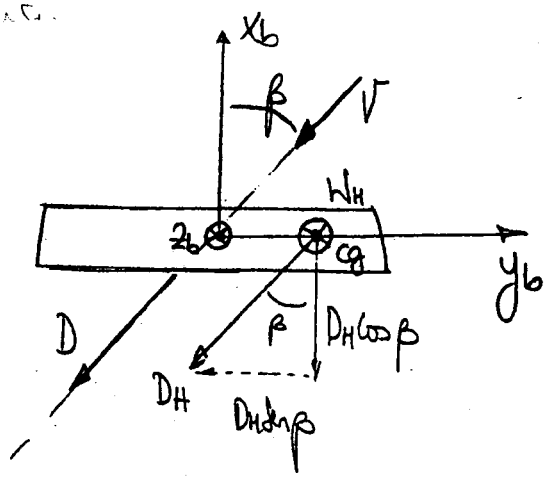
$$(I) \rightarrow \boxed{y_{H_{MAX}} = \frac{-\cancel{\rho} S \cancel{V^2} b}{\cancel{2} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{\rho} S_H \cancel{V^2} C_{D_{0H}}} C_{n_{\delta r}} \delta_{r_{MAX}} = \frac{-S b\, C_{n_{\delta r}}}{S_H C_{D_{0H}}} \delta_{r_{MAX}}}$$

PROBLEMA 31 (29-1-1991) problema 25

- VUELO HORIZONTAL RECTILÍNEO Y UNIFORME
- $C_{y\delta a} = C_{n\delta a} = 0$, Considerarse ángulos pequeños

1) a) ALAS A NIVEL ($\phi = 0$) con rebatimiento.





$-D \operatorname{sen}\beta$? Porque es una F. aerodinámica.

- $Y_{TOTAL} = Y - D_H \operatorname{sen}\beta = 0$

Sabemos que $\left\{ \begin{array}{l} Y = qS(\cancel{C_{y_0}} + C_{y\beta}\beta + \cancel{C_{y\delta a}\delta a} + C_{y\delta r}\delta_r) \\ \quad\quad 0 \text{ (Avión simétrico)} \\ D_H = qS_H C_{DH} \quad ; \quad \operatorname{sen}\beta \simeq \beta \quad ; \quad q = \frac{1}{2}\rho V^2 \end{array} \right.$

$$qS(C_{y\beta}\beta + C_{y\delta r}\delta_r) - qS_H C_{DH}\beta = 0 \qquad (1)$$

- $\mathcal{L}_{TOTAL} = \mathcal{L} + W_H \cdot y_H - D_H \operatorname{sen}\beta \cdot h_H = 0$

Sabemos que $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} = qSb(\cancel{C_{l_0}} + C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta_r) \\ \quad\quad 0 \text{ (Avión simétrico)} \end{array} \right.$

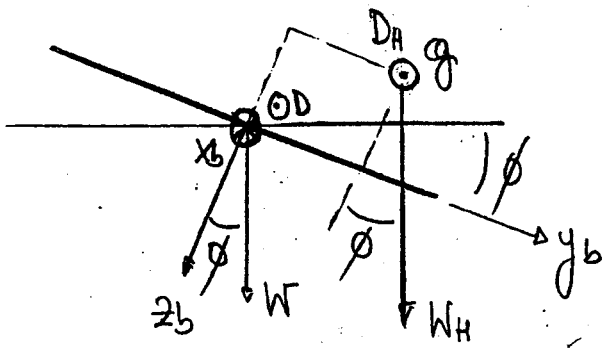
$$qSb(C_{l\beta}\beta + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta_r) + W_H y_H - qS_H C_{DH}\beta \cdot h_H = 0 \qquad (2)$$

• $N_{TOTAL} = N + D_H \cos\beta \, y_H$ $\quad (\cos\beta \simeq 1)$

Sabemos que $N = qSb\,(\underbrace{C_{n0}}_{0\ \text{(Avión simétrico)}} + C_{n\beta}\beta + \cancel{C_{n\delta a}\delta a} + C_{n\delta r}\delta r)$

$$qSb\,(C_{n\beta}\beta + C_{n\delta r}\delta r) + C_{DH} S_H q y_H = 0 \qquad (3)$$

b) <u>RESBALAMIENTO NULO</u> $(\beta = 0)$ (En principio $\phi \neq 0$)



• $Y_{TOTAL} = Y + (W + W_H)\,\text{sen}\,\phi = qS\,(\cancel{C_{y\beta}\beta} + C_{y\delta r}\delta r) + (W + W_H)\phi = 0$

• $L_{TOTAL} = L + W_H\,\text{sen}\,\phi\, h_H + W_H \cos\phi\, y_H = qSb\,(\cancel{C_{l\beta}\beta} + C_{l\delta a}\delta a + C_{l\delta r}\delta r) + W_H(y_H + h_H\phi) = 0$

• $N_{TOTAL} = N + D_H y_H = qSb\,(\cancel{C_{n\beta}\beta} + C_{n\delta r}\delta r) + qS_H C_{DH} y_H = 0$

Ahora vamos a resolver el sistema de ecuaciones

$\boxed{\text{ALAS A NIVEL}}$ $(\phi = 0) \longrightarrow$ (Vamos a despreciar $C_{D_H}\beta$)

$$(1)\quad (C_{y_\beta}\beta + C_{y_{\delta_r}}\delta_r)S - \underbrace{S_H C_{D_H}\beta}_{\text{Despreciable } (\beta \ll 1)} = 0 \longrightarrow C_{y_\beta}\beta + C_{y_{\delta_r}}\delta_r = 0 \quad (1^*)$$

$$(2)\quad qSb(C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta_a}}\delta_a + C_{l_{\delta_r}}\delta_r) + W_H y_H - \cancel{qS_H C_{D_H}\beta h_H} = 0 \quad (2^*)$$

($C_{D_H}\beta$ Despreciable)

$$(3)\quad Sb(C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta_r}}\delta_r) + C_{D_H}S_H y_H = 0 \quad (3^*)$$

De $(1^*) \longrightarrow$ $\delta_r = -\dfrac{C_{y_\beta}\beta}{C_{y_{\delta_r}}}$ (1^{**})

Sustituyendo en (3^*) queda: $Sb C_{n_\beta}\beta + Sb C_{n_{\delta_r}}\left(-\dfrac{C_{y_\beta}\beta}{C_{y_{\delta_r}}}\right) + C_{D_H}S_H y_H = 0$

$$\hookrightarrow \boxed{\beta = -\frac{\frac{S_H}{S}C_{D_H}\frac{y_H}{b}}{C_{n_\beta} - \frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}}C_{n_{\delta_r}}}}$$

Si sustituimos β en $(1^{**}) \longrightarrow$ $\boxed{\delta_r = \dfrac{\frac{S_H}{S}C_{D_H}\frac{y_H}{b}}{\frac{C_{y_{\delta_r}}}{C_{y_\beta}}C_{n_\beta} - C_{n_{\delta_r}}}}$

Con β y δ_r en (2^*)

$$\boxed{\delta_a = -\frac{W_H y_H}{qSbC_{l_{\delta_a}}} + \frac{\frac{S_H}{S}C_{D_H}\frac{y_H}{b}}{C_{l_{\delta_a}}}\left(\frac{C_{l_\beta}}{C_{n_\beta} - \frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}}C_{n_{\delta_r}}} - \frac{C_{l_{\delta_r}}}{\frac{C_{y_{\delta_r}}}{C_{y_\beta}}C_{n_\beta} - C_{n_{\delta_r}}}\right)}$$

RESBALAMIENTO NULO ($\beta=0$)

$$qSC_{y_{\delta_r}}\delta_r + (W+W_H)\phi = 0 \quad (1)$$

$$qSb\left(C_{l_{\delta_a}}\delta_a + C_{l_{\delta_r}}\delta_r\right) + W_H\left(y_H + h_H\phi\right) = 0 \quad (2)$$

$$Sb\,C_{n_{\delta_r}}\delta_r + S_H C_{D_H} y_H = 0 \quad (3)$$

De la ecuación (3) $\longrightarrow$ $\boxed{\delta_r = -\frac{S_H}{S}\frac{y_H}{b}\frac{C_{D_H}}{C_{n_{\delta_r}}}}$

Sustituyendo δ_r en (1) $\longrightarrow$ $\boxed{\phi = +\frac{qS_H y_H C_{D_H}}{(W+W_H)\,b\,C_{n_{\delta_r}}}C_{y_{\delta_r}}}$

Con δ_r y ϕ en la ecuación (2)

$$\delta_a = -\frac{W_H\left(y_H + h_H\phi\right)}{qSb\,C_{l_{\delta_a}}} - \frac{C_{l_{\delta_r}}}{C_{l_{\delta_a}}}\delta_r$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{S_H}{S}\frac{y_H}{b}\frac{C_{D_H}C_{l_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_r}}C_{l_{\delta_a}}} - \frac{W_H}{qSbC_{l_{\delta_a}}}\left(y_H + h_H\frac{qS_H y_H C_{D_H}}{(W+W_H)\,b\,C_{n_{\delta_r}}}C_{y_{\delta_r}}\right)}$$

2) ALAS A NIVEL

Con $\delta_{r_{MAX}} = \dfrac{\frac{S_H}{S}C_{D_H}\frac{y_H}{b}}{\frac{C_{y_{\delta_r}}}{C_{y_\beta}}C_{n_\beta} - C_{n_{\delta_r}}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\left.\frac{y_H}{b}\right)_{MAX} = \frac{S}{S_H}\frac{1}{C_{D_H}}\left(\frac{C_{y_{\delta_r}}}{C_{y_\beta}}C_{n_\beta} - C_{n_{\delta_r}}\right)\delta_{r_{MAX}}}$

RESBALAMIENTO NULO

Con $\delta_{r_{MAX}} = -\frac{S_H}{S}\frac{y_H}{b}\frac{C_{D_H}}{C_{n_{\delta_r}}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\left.\frac{y_H}{b}\right)_{MAX} = -\delta_{r_{MAX}}\cdot\frac{S}{S_H}\cdot\frac{C_{n_{\delta_r}}}{C_{D_H}}}$

PROBLEMA 25

Un avión biplano pretende realizar un vuelo de exhibición horizontal, rectilíneo y uniforme con un hombre encima de su ala superior.

* Se suponen conocidas todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas (en concreto, $C_{Y\delta a} = C_{n\delta a} = 0$).

* Se suponen conocidas W_H, h_H, ρ, C_{D_H}, S_H.

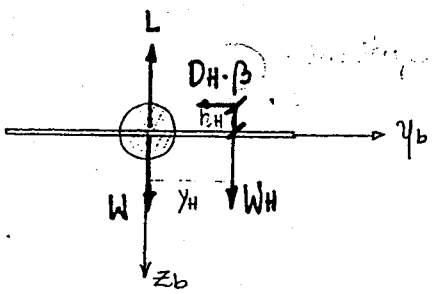
Se pide:

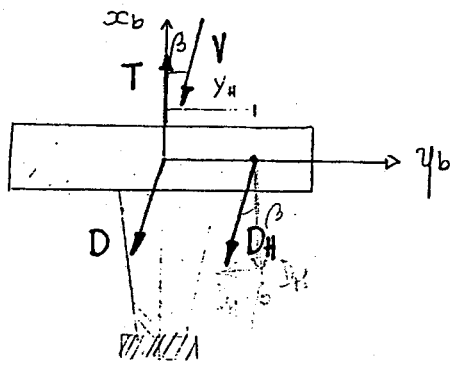
1º) Determinar las incógnitas lateral-direccionales del problema en función de y_H, para las dos situaciones siguientes:

ϕ = ángulo de balance

a) Alas a nivel.

Alas a nivel $\Rightarrow \phi = 0$ (suponemos $\beta > 0$, $\beta \ll 1$)





Las ecuaciones de equilibrio son:

Fuerza lateral

$$\Sigma Y = 0 \quad qS\left\{\overbrace{\underset{0}{\cancel{C_{Y_0}}} + C_{Y_\beta}\cdot\beta + \underset{\text{Dato}}{\cancel{C_{Y_{\delta a}}}}\cdot\delta_a + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta r}^{C_Y = \text{coef. fuerza lateral}}\right\} - D_H\cdot\beta = 0$$

← es un suma de fuerzas según Oy.

Momento de balance

$$\Sigma \mathcal{L} = 0 \quad qSb\left\{\underbrace{\underset{0}{\cancel{C_{\mathcal{L}_0}}} + C_{\mathcal{L}_\beta}\cdot\beta + C_{\mathcal{L}_{\delta a}}\cdot\delta_a + C_{\mathcal{L}_{\delta r}}\cdot\delta r}_{C_{\mathcal{L}} \leftarrow \text{coef. mom. balance.}}\right\} - D_H\beta h_H + W_H\cdot y_H = 0$$

!! ← Es un eq. de momentos alrededor de Oxa.

(x) av. visto desde atrás

Momento de guiñada

av. visto desde arriba.

$$\Sigma \mathcal{N} = 0 \quad qSb\left\{\underbrace{\underset{0}{\cancel{C_{n_0}}} + C_{n_\beta}\cdot\beta + \underset{\text{Dato}}{\cancel{C_{n_{\delta a}}}}\cdot\delta_a + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r}_{C_n \leftarrow \text{coef. mom. guiñada.}}\right\} + \overbrace{D_H\cdot y_H}^{q S_H y_h C_{DH}} = 0$$

!!

Incógn.: $\beta, \delta_a, \delta_r$

Suponemos avión simétrico respecto a Oxz $\Rightarrow C_{Y_0} = C_{L_0} = C_{n_0} = 0$

$$qS\left\{C_{Y_\beta}\cdot\beta + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta_r\right\} - D_H\cdot\beta = 0 \qquad (1)$$

$$qSb\left\{C_{L_\beta}\beta + C_{L_{\delta a}}\delta_a + C_{L_{\delta r}}\cdot\delta_r\right\} - D_H\beta h_H + W_H\cdot y_H = 0 \qquad (2)$$

$$qSb\left\{C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta_r\right\} + D_H y_H = 0 \qquad (3)$$

!! → $D_H = \frac{1}{2}\rho S_H V^2 C_{D_H}$ (4)

Buscamos $\beta = \beta(y_H, V)$; $\delta_a = \delta_a(y_H, V)$; $\delta_r = \delta_r(y_H, V)$.

$$\boxed{\beta = -\frac{S_H}{S}\cdot\frac{y_H}{b}\cdot\frac{C_{D_H}}{\left\{C_{n_\beta} - \frac{C_{n_{\delta r}}}{C_{Y_{\delta r}}}\left(C_{Y_\beta} - \frac{S_H}{S}C_{D_H}\right)\right\}}}$$

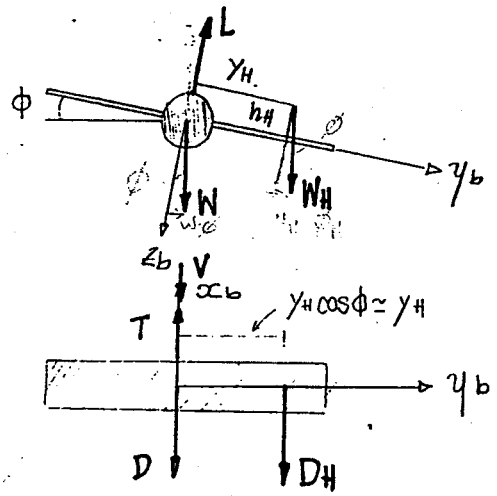
Cont. PROBLEMA 25

$$\boxed{\delta_r = \frac{S_H}{S}\cdot\frac{y_H}{b}\cdot\frac{C_{D_H}}{C_{y\delta_r}}\cdot\frac{\left\{C_{y\beta}-\frac{S_H}{S}C_{D_H}\right\}}{\left\{C_{n\beta}-\frac{C_{n\delta_r}}{C_{y\delta_r}}\left(C_{y\beta}-\frac{S_H}{S}C_{D_H}\right)\right\}}}$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{S_H}{S}\cdot\frac{h_H}{b}\cdot\frac{C_{D_H}}{C_{l\delta_a}} - \frac{W_H}{qS}\cdot\frac{y_H}{b}\cdot\frac{1}{C_{l\delta_a}} - \frac{C_{l\beta}}{C_{l\delta_a}}\beta - \frac{C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}}\delta_r}$$

b) Resbalamiento nulo

Resbalamiento nulo $\Longrightarrow \beta = 0$ (suponemos $\phi > 0$, $\phi \ll 1$).



◁ Ahora el propio peso del avión va a producir un momento!!

Las ecuaciones de equilibrio son:

Fuerza lateral:

$$qS\left\{C_{y\beta}\cdot\underbrace{\cancel{\beta}}_{0} + C_{y\delta_r}\cdot\delta_r\right\} + W_H\cdot\phi + W\cdot\phi = 0 \qquad (1)$$

Momento de balance:

$$qSb\left\{C_{l\beta}\cdot\underbrace{\cancel{\beta}}_{0} + C_{l\delta_a}\cdot\delta_a + C_{l\delta_r}\cdot\delta_r\right\} + W_H y_H + W_H\phi h_H = 0 \qquad (2)$$

Momento de guiñada:

$$qSb\left[C_{n\beta}\cdot\underset{0}{\cancel{\beta}} + C_{n\delta r}\cdot\delta r\right] + qS_H C_{DH}\, y_H = 0 \qquad (3)$$

Obtenemos:

$$\boxed{\delta r = -\frac{S_H}{S}\cdot\frac{y_H}{b}\cdot\frac{C_{DH}}{C_{n\delta r}}}$$

$$\boxed{\phi = \frac{S_H}{S}\cdot\frac{y_H}{b}\cdot\frac{qS}{(W+W_H)}\, C_{DH}\,\frac{C_{y\delta r}}{C_{n\delta r}}}$$

$$\boxed{\delta a = \frac{S_H}{S}\cdot\frac{y_H}{b}\cdot\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\cdot\frac{C_{DH}}{C_{n\delta r}} - \frac{W}{qS}\,\frac{(y_H+\phi h_H)}{b}\cdot\frac{1}{C_{l\delta a}}}$$

2º) Determinar, para las dos situaciones del apartado anterior, el máximo desplazamiento posible del acróbata, $y_{H\,máx}$, suponiendo conocidas las deflexiones máximas permitidas para los alerones, $\delta a_{máx}$, y el timón de dirección, $\delta r_{máx}$.

a) Alas a nivel

[illegible] $\beta = -\frac{C_{n\delta r}}{C_{n\beta}}\,\delta r$

a) Supuestos $\delta a < 0$, $\delta r < 0$, $\beta > 0$ por [illegible]

$\delta r_{máx} = k_1\, y_{H\,máx_1}$ $\quad (\delta a_{máx} = -\delta a_{máx_1})$

$\delta r_{máx} = k_2\, y_{H\,máx_2}$ $\quad (\delta a_{máx} = -\delta a_{máx_2})$

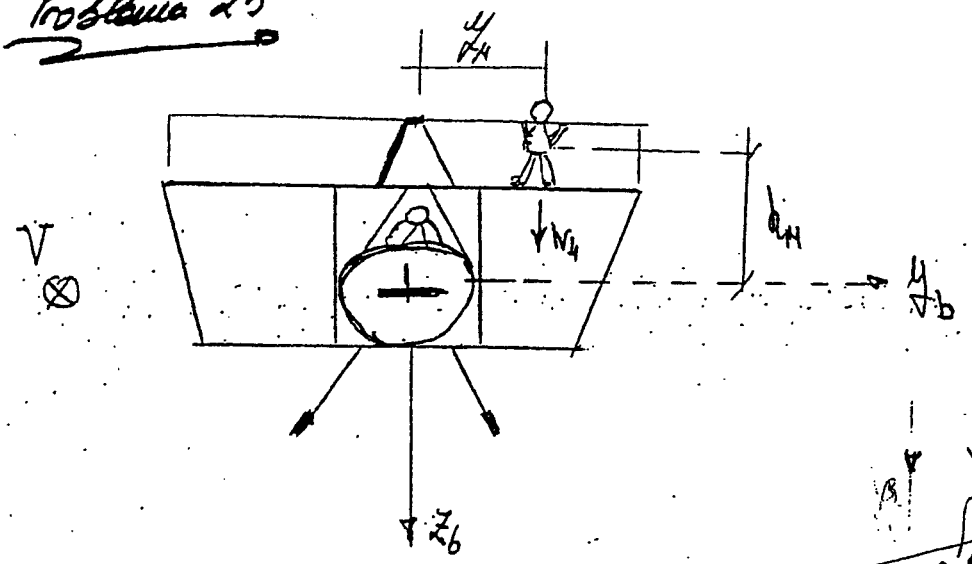
$y_{H\,máx} = \min(y_{H\,máx_1}, y_{H\,máx_2})$

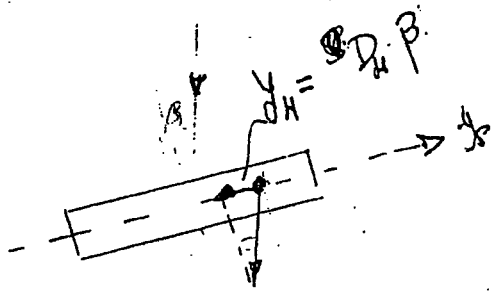
b) Supuestos $C_{n\delta r} > 0$, $C_{l\delta r} < 0$, $C_{l\delta a} > 0$

$\delta r < 0$, $\delta a < 0$, $\phi < 0$

$\delta r_{máx} = k_1\, y_{H\,máx_1}$ $\qquad y_{H\,máx}$

Problema 25





1) a) Alas a nivel

$$\sum M_{x_s} = 0 \Rightarrow \mathcal{L} + W_H \cdot y_H = 0 \Rightarrow C_l = \frac{-W_H \, y_H}{q S b}$$

$$* \quad C_{l_\beta} \cdot \beta + C_{l_{\delta_a}} \cdot \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \cdot \delta_r = -\frac{W_H \cdot y_H}{q S b}$$

$$\sum M_{z_s} = 0 \Rightarrow N + D_H \cdot y_H = 0. \qquad D_H = \frac{1}{2} \rho V^2 S_H \cdot C_{D_H} = q S_H \cdot C_{D_H}$$

$$* \quad C_{n_\beta} \cdot \beta + C_{n_{\delta_r}} \delta_r = -\frac{S_H}{S} \cdot C_{D_H} \cdot \frac{y_H}{b}$$

$$* \quad C_Y = C_{Y_\beta} \cdot \beta + C_{Y_{\delta_r}} \cdot \delta_r = \frac{S_H}{S} \cdot C_{D_H} \beta \Rightarrow \delta_r = \left(-\frac{C_{Y_{\delta_r}}}{C_{Y_{\delta_r}}} \cdot \beta + \frac{S_H}{S} C_{D_H} \right) \beta$$

$$\cancel{\beta = -\frac{S_H}{S} \cdot \frac{C_{D_H}}{C_{n_\beta}} \cdot \frac{y_H}{b} + \frac{C_{n_{\delta_r}}}{C_{n_\beta}} \cdot \frac{C_{Y_{\delta_r}}}{C_{Y_\beta}} \beta}$$

$$\beta \left\{ C_{n\beta} - C_{n\delta_r} \frac{C_{y\beta}}{C_{y\delta_r}} \right\} = - \frac{S_H}{S} C_{D_H} \frac{y_H}{b}$$

$$\boxed{\beta = \frac{S_H/S \cdot C_{D_H} \cdot 1/b \cdot y_H}{C_{n\delta_r} \cdot \frac{C_{y\beta}}{C_{y\delta_r}} - C_{n\beta}}}$$

$$\boxed{\delta_r = - \frac{C_{y\beta}}{C_{y\delta_r}} \cdot \frac{S_H/S \cdot C_{D_H} \cdot 1/b \cdot y_H}{C_{n\delta_r} \cdot \frac{C_{y\beta}}{C_{y\delta_r}} - C_{n\beta}}}$$

$$\boxed{\delta_a = - \frac{W_H y_H}{q S b \cdot C_{l\delta}} - \frac{C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}} \cdot \delta_r - \frac{C_{l\beta}}{C_{l\delta_a}} \cdot \beta}$$

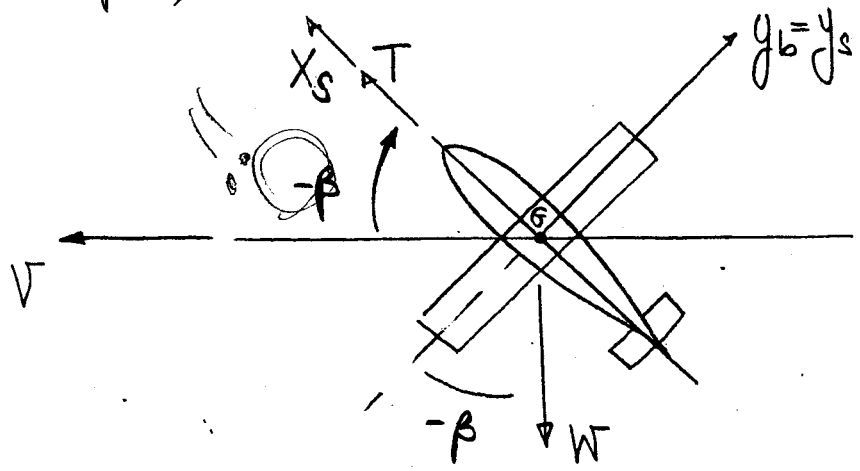
2) <u>Resbalamiento nulo</u>

$$C_{l\delta_a} \delta_a + C_{l\delta_r} \delta_r = - \frac{W_H \cdot y_H}{q S b} \Rightarrow \delta_a = \left(- \frac{W_H}{q S b C_{l\delta_a}} + \frac{C_{l\delta_r}}{C_{n\delta_r}} \frac{S_H}{S} C_{D_H} \right) y_H$$

$$C_{n\delta_r} \delta_r = - \frac{S_H}{S} C_{D_H} \frac{y_H}{b} \Rightarrow \delta_r = - \frac{S_H}{S} \frac{C_{D_H}}{C_{n\delta_r}} \cdot \frac{y_H}{b}$$

PROBLEMA 32 (29-1-1991) problema 26

(Tomando $\beta > 0$)



- $C_{y_{\delta a}} = C_{n_{\delta a}} = 0$
- Ángulos pequeños

- $Y_{TOTAL} = Y - W\cos(-\beta) = Y - W\cos\beta = qS(C_{y_\beta}\beta + C_{y_{\delta r}}\delta_r) - \underbrace{W\cos\beta}_{\simeq W} = 0$

Sabemos que $Y = qS(\underbrace{\cancel{C_{y_0}}}_{0\ (\text{Avión simétrico})} + C_{y_\beta}\beta + \cancel{C_{y_{\delta a}}\delta_a} + C_{y_{\delta r}}\delta_r)$ (1)

- $\mathcal{L}_{TOTAL} = \mathcal{L} = qSb(\underbrace{\cancel{C_{\ell_0}}}_{0\ (\text{Avión simétrico})} + C_{\ell_\beta}\beta + C_{\ell_{\delta a}}\delta_a + C_{\ell_{\delta r}}\delta_r) = qSb(C_{\ell_\beta}\beta + C_{\ell_{\delta a}}\delta_a + C_{\ell_{\delta r}}\delta_r) = 0$ (2)

- $N_{TOTAL} = N = qSb(\underbrace{\cancel{C_{n_0}}}_{0\ (\text{Avión simétrico})} + C_{n_\beta}\beta + \cancel{C_{n_{\delta a}}\delta_a} + C_{n_{\delta r}}\delta_r) = qSb(C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta r}}\delta_r) = 0$ (3)

- $L = 0 \longrightarrow C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\alpha_{wb} + \cancel{C_{L_{\delta e}}} = 0$ (4)

- $M_{TOTAL} = qSc\,C_{m_{cg}} = qSc(C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha_{wb} + C_{m_{\delta e}}\delta_e) = 0$ (5)

Resolvemos el sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas:

De (4) $\longrightarrow$ $\boxed{\alpha_{wb} = -\dfrac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}}}$

Con α_{wb} en (5) : $\boxed{\delta_e = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta}} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\left(-\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}\right) = -\frac{C_{m0}}{C_{m\delta}} + \frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}}$

De (3) : $C_{n\beta}\beta + C_{n\delta_r}\delta_r = 0 \rightarrow \beta = -\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\beta}}\delta_r \quad (3^*)$

Sustituyendo en (1) $\left(C_{y\beta}\left(-\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\beta}}\delta_r\right) + C_{y\delta_r}\delta_r\right)qS - W = 0$

$$\delta_r\left(C_{y\delta_r} - C_{y\beta}\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\beta}}\right) = \frac{W}{qS} \rightarrow \boxed{\delta_r = \frac{W}{qS}\cdot\frac{1}{\left(C_{y\delta_r} - C_{y\beta}\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\beta}}\right)}}$$

Sustituyendo δ_r en (3*) :

$$\rightarrow \boxed{\beta = -\frac{W}{qS}\frac{C_{n\delta_r}}{\left(C_{y\delta_r}C_{n\beta} - C_{y\beta}C_{n\delta_r}\right)}}$$

Si ahora introducimos β y δ_r en la ecuación (2)

$$\delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta_a}}\left(C_{l\beta}\beta + C_{l\delta_r}\delta_r\right)$$

$$\delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta_a}}\cdot\frac{W}{qS}\left(\frac{C_{l\delta_r}}{\left(C_{y\delta_r} - C_{y\beta}\frac{C_{n\delta_r}}{C_{n\beta}}\right)} - \frac{C_{l\beta}C_{n\delta_r}}{\left(C_{y\delta_r}C_{n\beta} - C_{y\beta}C_{n\delta_r}\right)}\right)$$

$$\boxed{\delta_a = -\frac{1}{C_{l\delta_a}}\frac{W}{qS}\left(\frac{C_{l\delta_r}C_{n\beta} - C_{l\beta}C_{n\delta_r}}{C_{y\delta_r}C_{n\beta} - C_{y\beta}C_{n\delta_r}}\right)}$$

(11)

1) $T\cancel{\cos\varepsilon}^{1}\cancel{\cos\delta}^{\beta}{}^{1} - D - W\cancel{\sin\gamma}^{0} = 0$; $T = D$

$T\cancel{\cos\varepsilon}^{1}\cancel{\sin\delta}^{\beta} - Q + W\cancel{\cos\gamma}^{1}\cancel{\sin\mu}^{\frac{\pi}{2}} = 0$; $T\beta - Q + W = 0$

$-T\cancel{\sin\varepsilon}^{0} - L + W\cancel{\cos\gamma}^{1}\cancel{\cos\mu}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \rightarrow L = 0$

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ Y \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_{Ax} = -D + \beta Q \\ Y = -D\beta - Q \\ F_{Az} = -L \end{cases}$$

$-W\cancel{\sin\theta}^{0} + \cancel{F_{Tx}}^{T} + F_{Ax} = 0 \rightarrow T - D + \beta Q = 0$

$W\cancel{\cos\theta}^{1}\cancel{\sin\phi}^{1} + \cancel{F_{Ty}}^{0} + F_{Ay} = 0 \rightarrow W - D\beta - Q = 0$; $-W = Y$

$W\cancel{\cos\theta}^{1}\cancel{\cos\phi}^{0} + \cancel{F_{Tz}}^{0} + F_{Az} = 0 \rightarrow L = 0$

$Y = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_y = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\cancel{C_{y_0}}^{0} + C_{y_\beta}\beta + \cancel{C_{y_{\delta a}}}^{0}\delta_a + C_{y_{\delta r}}\delta_r\right) = -W$ (I)

$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_l = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\cancel{C_{l_0}}^{0} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta a}}\delta_a + C_{l_{\delta r}}\delta_r\right) = 0 \rightarrow \delta_a = -\frac{1}{C_{l_{\delta a}}}\left[C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta r}}\delta_r\right]$

$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_n = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\cancel{C_{n_0}}^{0} + C_{n_\beta}\beta + \cancel{C_{n_{\delta a}}}^{0}\delta_a + C_{n_{\delta r}}\delta_r\right) = 0 \rightarrow \beta = -\frac{C_{n_{\delta r}}}{C_{n_\beta}}\delta_r$

(I) $\rightarrow C_{y_\beta}\beta + C_{y_{\delta r}}\delta_r = \frac{-2W}{\rho S V^2}$; $-\frac{C_{n_{\delta r}}C_{y_\beta}}{C_{n_\beta}}\delta_r + C_{y_{\delta r}}\delta_r = -\frac{2W}{\rho S V^2}$

$$\boxed{\delta_r = \frac{-2W}{\rho S V^2\left(C_{y_{\delta r}} - \frac{C_{n_{\delta r}}C_{y_\beta}}{C_{n_\beta}}\right)}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{2W C_{n_{\delta r}}}{\rho S V^2\left(C_{y_{\delta r}}C_{n_\beta} - C_{n_{\delta r}}C_{y_\beta}\right)}}$$

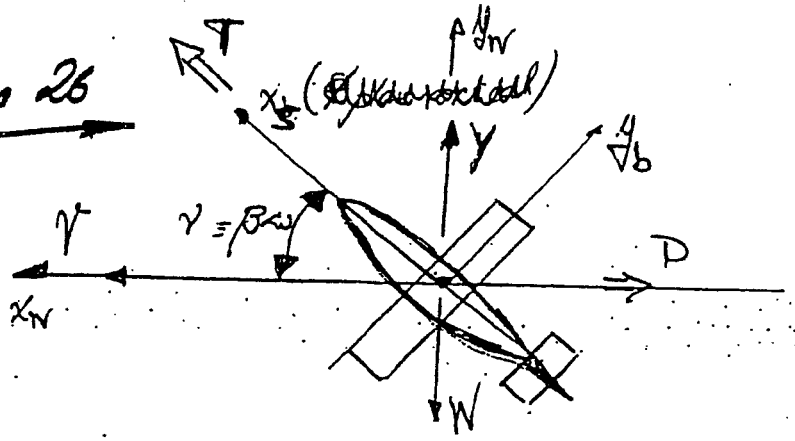
$$\boxed{\delta_a = \frac{-2W}{\rho S V^2 C_{l_{\delta a}}}\left[\frac{C_{n_{\delta r}}C_{l_\beta} - C_{n_\beta}C_{l_{\delta r}}}{C_{y_{\delta r}}C_{n_\beta} - C_{n_{\delta r}}C_{y_\beta}}\right]}$$

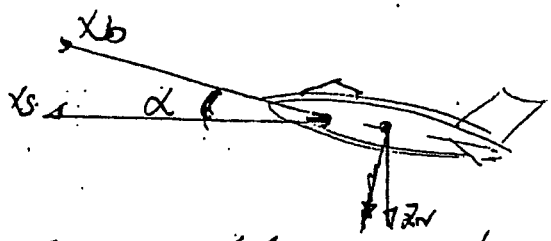
$$C_z = 0 = C_{z0} + C_{z\alpha}\,\alpha \rightsquigarrow \boxed{\alpha = \frac{-C_{z0}}{C_{z\alpha}}}$$

$$C_{mA} = C_{m0} + C_{m\alpha}\,\alpha + C_{m\delta e}.\delta e = 0$$

$$\boxed{\delta e = \frac{-1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} - C_{m\alpha}\,\frac{C_{z0}}{C_{z\alpha}}\right]}$$

Problema 26





Ecuaciones del movimiento.

$$\begin{cases} T\cos\beta - D = 0 \Rightarrow T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{D_0} + k C_L^2\right) \\ T\sin\beta + Y - W = 0 \quad Y = W - T\beta \\ L = 0 \Rightarrow C_L = 0 \quad C_L = C_{L_0} + C_{L_\alpha}\cdot\alpha + C_{L_\delta}\cdot\delta_e = 0 \end{cases}$$

xq aquí no metemos D

$$\alpha = -\frac{C_{L_0}}{C_{L_\alpha}} - \frac{C_{L_\delta}}{C_{L_\alpha}}\delta_e = \alpha_0 - \frac{C_{L_\delta}}{C_{L_\alpha}}\delta_e$$

{Volaremos según la L.N.S. del avión.}

$$\sum M = 0 \Rightarrow C_{m_{cg}} = 0 \Rightarrow C_{m_0} + C_{m_\alpha}\alpha + C_{m_\delta}\cdot\delta_e = 0$$

$$\delta_e = -\frac{C_{m_0}}{C_{m_\delta}} - \frac{C_{m_\alpha}}{C_{m_\delta}}\left\{\alpha_0 - \frac{C_{L_\delta}}{C_{L_\alpha}}\cdot\delta_e\right\}$$

$$\delta_e\left(1 - \frac{C_{m_\alpha}}{C_{m_\delta}}\cdot\frac{C_{L_\delta}}{C_{L_\alpha}}\right) = -\frac{C_{m_0}}{C_{m_\delta}} - \frac{C_{m_\alpha}}{C_{m_\delta}}\alpha_0$$

$$\boxed{\delta_e = \delta_{e_0} - \frac{C_{m_\alpha}\cdot C_{L_\alpha}}{C_{m_\delta}C_{L_\alpha} - C_{m_\alpha}C_{L_\delta}}\alpha_0} \qquad \delta_{e_0} = -\frac{C_{m_0}\cdot C_{L_\alpha}}{C_{m_\delta}C_{L_\alpha} - C_{m_\alpha}C_{L_\delta}}$$

$\Sigma \mathcal{L} = 0$

$$C_\ell = \cancel{C_{\ell_0}}^{\,0} + C_{\ell_\beta}\cdot\beta + C_{\ell_{\delta_r}}\delta_r + C_{\ell_{\delta_a}}\cdot\delta_a = 0. \qquad (1)$$

$\Sigma N = 0$

$$C_n = C_{n_\beta}\cdot\beta + C_{n_{\delta_r}}\cdot\delta_r + C_{n_{\delta_a}}\cdot\delta_a = 0. \qquad (2)$$

$$C_Y = C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_{\delta_r}}\cdot\delta_r \qquad (C_{Y_{\delta_a}} \simeq 0)$$

$$Y = W - D\cdot\beta \Rightarrow C_Y = \frac{W}{qS} - C_{D_0}\cdot\beta = C_{Y_\beta}\cdot\beta + C_{Y_{\delta_r}}\cdot\delta_r \qquad (3)$$

3 equações com 3 incognitas $(\delta_a, \delta_r, \beta)$

$$(3) \quad C_{Y_{\delta_r}}\cdot\delta_r + (C_{Y_\beta} + C_{D_0})\beta = \frac{W}{qS} \Rightarrow \boxed{\delta_r = \frac{W}{qSC_{Y_{\delta_r}}} - \left(\frac{C_{Y_\beta} + C_{D_0}}{C_{Y_{\delta_r}}}\right)\beta}$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{\delta_a = -\frac{C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta_a}}}\beta - \frac{C_{n_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_a}}}\left\{\frac{W}{qSC_{Y_{\delta_r}}} - \frac{C_{Y_\beta} + C_{D_0}}{C_{Y_{\delta_r}}}\beta\right\}}$$

$$(1) \quad \beta\left\{C_{\ell_\beta} - C_{\ell_{\delta_r}}\cdot\frac{C_{Y_\beta} + C_{D_0}}{C_{Y_{\delta_r}}} - C_{\ell_{\delta_a}}\left(\frac{C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta_a}}} - \frac{C_{n_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_a}}}\frac{C_{Y_\beta} + C_{D_0}}{C_{Y_{\delta_r}}}\right)\right\} =$$

$$= -C_{\ell_{\delta_r}}\, W/qSC_{Y_{\delta_r}} + C_{\ell_{\delta_a}}\cdot\frac{C_{n_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_a}}}\frac{W}{qSC_{Y_{\delta_r}}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{W/qSC_{Y_{\delta_r}}\left\{C_{\ell_{\delta_a}}\cdot\frac{C_{n_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_a}}} - C_{\ell_{\delta_r}}\right\}}{C_{\ell_\beta} - C_{\ell_{\delta_r}}\cdot\frac{C_{Y_\beta} + C_{D_0}}{C_{Y_{\delta_r}}} - C_{\ell_{\delta_a}}\left(\frac{C_{n_\beta}}{C_{n_{\delta_a}}} - \frac{C_{n_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_a}}}\frac{C_{Y_\beta} + C_{D_0}}{C_{Y_{\delta_r}}}\right)}}$$

$$C_l = \frac{-mg\, b/4\,(t)}{q S b} = C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \cdot \delta_r$$

$$C_n = -\frac{m V_0\, b/4}{q S b} = C_{n_{\delta_r}} \cdot \delta_r + C_{n_{\delta_a}} \delta_a$$

$$\boxed{\delta_r(t) = -\frac{m V_0\, b/4}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b\, C_{n_{\delta_r}}} - \frac{C_{n_{\delta_a}}}{C_{n_{\delta_r}}} \delta_a}$$

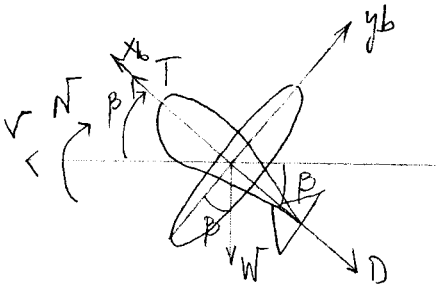
$$\cancel{\delta_a(t) = \frac{C_{l_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_r}}} \cdot \frac{m V_0\, b/4}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} - \frac{1}{C_{l_{\delta_a}}} \cdot \frac{m g\, b/4}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}\, t}$$

$$\cancel{\boxed{\delta_a(t) = \frac{m}{4 q S}\left(V_0 \frac{C_{l_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_r}}} - \frac{g}{C_{l_{\delta_a}}}\, t\right)}}$$

$$\delta_r = \frac{m}{4 q S} \cdot \frac{-g C_{n_{\delta_a}} t + V_0 C_{l_{\delta_a}}}{C_{l_{\delta_r}} C_{n_{\delta_a}} - C_{l_{\delta_a}} C_{n_{\delta_r}}}$$

$$t_{max} = \frac{M/2}{m}$$

(11)



$$C_L = C_{L0} + C_{L\alpha}\alpha_{wb} + \cancel{C_{L\delta e}\delta_e}^{\,0} = 0 \rightsquigarrow \boxed{\alpha_{wb} = -\frac{C_{L0}}{C_{L\alpha}}}$$

$$C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_{wb} + C_{m\delta e}\delta_e = 0 \rightsquigarrow \boxed{\delta_e = -\frac{1}{C_{m\delta e}}\left[C_{m0} - \frac{C_{m\alpha}}{C_{L\alpha}}C_{L0}\right]}$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{l0}}^{\,0} + C_{lp}\beta + C_{l\delta a}\delta_a + C_{l\delta r}\delta_r\right) = 0 \rightsquigarrow \delta_a = -\frac{C_{lp}}{C_{l\delta a}}\beta - \frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\delta_r$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S b\left(\cancel{C_{n0}}^{\,0} + C_{np}\beta + \cancel{C_{n\delta a}\delta_a}^{\,0} + C_{n\delta r}\delta_r\right) = 0 \rightsquigarrow \beta = -\frac{C_{n\delta r}}{C_{np}}\delta_r$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(\cancel{C_{y0}}^{\,0} + C_{y\beta}\beta + \cancel{C_{y\delta a}\delta_a}^{\,0} + C_{y\delta r}\delta_r\right) - \overset{\simeq W}{\cancel{W\cos\beta}} = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(-\frac{C_{n\delta r}}{C_{np}}C_{y\beta}\delta_r + C_{y\delta r}\delta_r\right) = W; \quad \delta_r\left[\frac{1}{2}\rho V^2 S\left(C_{y\delta r} - \frac{C_{n\delta r}}{C_{np}}C_{y\beta}\right)\right] = W$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{2W}{\rho S V^2\left(C_{y\delta r} - \frac{C_{n\delta r}}{C_{np}}C_{y\beta}\right)}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{-2W}{\rho S V^2\left(C_{y\delta r}C_{np} - C_{n\delta r}C_{y\beta}\right)}\cdot C_{n\delta r}}$$

$$\boxed{\delta_a = \frac{2W}{\rho S V^2}\left[\frac{C_{n\delta r}}{\left(C_{y\delta r}C_{np} - C_{n\delta r}C_{y\beta}\right)}\cdot\frac{C_{lp}}{C_{l\delta a}} - \frac{1}{\left(C_{y\delta r} - \frac{C_{n\delta r}}{C_{np}}C_{y\beta}\right)}\cdot\frac{C_{l\delta r}}{C_{l\delta a}}\right]}$$

12

Material diacanal.

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

CÁTEDRA DE MECÁNICA DEL VUELO 27.06.02

E. Final Junio

PROBLEMA 3º

442

En la definición de la Velocidad Mínima de Control Direccional, V_{MC}, las Normas FAR-25 establecen en su sección 25.149 que es la velocidad mínima a la que, cuando el motor crítico se hace inoperativo, es posible controlar el avión y continuar el vuelo rectilíneo estacionario con un ángulo de balance, ϕ, no superior a 5º.

Suponiendo además que:

a) Se conocen todas las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, $C_{n\delta a} = C_{Y\delta a} = 0$).

b) Los momentos de guiñada, N_T, y de balance, L_T, alrededor del centro de masas del avión, producidos cuando el motor crítico se hace inoperativo, son constantes conocidas.

c) La limitación de V_{MC} siempre se produce por deflexión máxima del timón de dirección ($\delta_r = \delta_{r\,max}$).

d) Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños y ρ es una constante conocida.

Se pide:

1º) Determinar ϕ_1, V_{MC1} y la deflexión de alerones, δ_{a1}, para el caso de ángulo de resbalamiento, β, nulo (supóngase que se cumple $\phi_1 < 5º$).

2º) Determinar β_2, V_{MC2} y δ_{a2}, para el caso de $\phi = 0º$.

3º) Determinar β_3, V_{MC3} y δ_{a3}, para el caso de $\phi = 5º$.

4º) Ordenar de mayor a menor, si ello es posible, las tres velocidades V_{MC1}, V_{MC2} y V_{MC3}. Explicar de forma razonada cuál elegiría como V_{MC} para la certificación del avión.

TIEMPO CONCEDIDO: 1^h

(12)

1)

$$T\cancel{\cos\varepsilon}\cos\psi - D - W\cancel{\sin\gamma} = 0 \quad ; \quad T = D$$

$$T\cancel{\sin\varepsilon}\sin\psi - Q + W\cancel{\sin\mu}\cos\gamma = 0 \quad ; \quad -Q + W\phi = 0 \qquad Y = -D\beta - Q \quad ; \quad Y = -Q$$

$$-T\cancel{\sin\varepsilon} - L + W\cos\mu\cos\gamma = 0 \quad ; \quad -L + W = 0$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_Y = \frac{1}{2}\rho \overset{V_{MC_1}^2}{V^2} S\left(C_{Y_0} + C_{Y_\beta}\beta + C_{Y_{\delta a}}\delta a + C_{Y_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right) = -W\phi_1$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_l = \frac{1}{2}\rho \overset{V_{MC_1}^2}{V^2} S\left(C_{l_0} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta a}}\delta a_1 + C_{l_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right) = +L_T \rightsquigarrow \delta a_1 = \frac{+2L_T}{\rho S V_{MC_1}^2 C_{l_{\delta a}}} - C_{l_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_n = \frac{1}{2}\rho \overset{V_{MC_1}^2}{V^2} S\left(C_{n_0} + C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta a}}\delta a_1 + C_{n_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right) = +N_T$$

$$\boxed{V_{MC_1} = \sqrt{\frac{+2N_T}{\rho S C_{n_{\delta r}}} \cdot \frac{1}{\delta_{r_{MAX}}}}}$$

$$\boxed{\delta a_1 = \frac{2L_T}{\rho S \frac{2N_T}{\rho S C_{n_{\delta r}}} \cdot \frac{1}{\delta_{r_{MAX}}}} \cdot \frac{1}{C_{l_{\delta a}}} - \frac{C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}}\delta_{r_{MAX}} = \frac{\delta_{r_{MAX}}}{C_{l_{\delta a}}}\left[C_{n_{\delta r}}\frac{L_T}{N_T} - C_{l_{\delta r}}\right]}$$

$$\boxed{\phi_1 = \frac{-\rho S}{2W}\,\frac{2N_T}{\rho S C_{n_{\delta r}}} \cdot \frac{1}{\delta_{r_{MAX}}} \cdot C_{Y_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}} = \frac{-N_T}{W}\,\frac{C_{Y_{\delta r}}}{C_{n_{\delta r}}}}$$

2)

$$T = D$$

$$T\beta - Q + W\phi = 0 \quad ; \quad Y = -D\beta - Q \rightsquigarrow Y = -W\phi = 0$$

$$-L + W = 0$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_Y = \frac{1}{2}\rho S V_{MC_2}^2 \cdot \left(C_{Y_0} + C_{Y_\beta}\beta_2 + C_{Y_{\delta a}}\delta a_2 + C_{Y_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right) = 0 \rightsquigarrow \boxed{\beta_2 = -\frac{C_{Y_{\delta r}}}{C_{Y_\beta}}\delta_{r_{MAX}}}$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_l = \frac{1}{2}\rho S V_{MC_2}^2 \cdot \left(C_{l_0} + C_{l_\beta}\beta_2 + C_{l_{\delta a}}\delta a_2 + C_{l_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right) = L_T$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_n = \frac{1}{2}\rho S V_{MC_2}^2 \cdot \left(C_{n_0} + C_{n_\beta}\beta_2 + C_{n_{\delta a}}\delta a_2 + C_{n_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right) = N_T$$

$$V_{MC_2}^2 = \frac{2N_T}{\rho S} \cdot \frac{1}{-\frac{C_{n_\beta}C_{Y_{\delta r}}}{C_{Y_\beta}}\delta_{r_{MAX}} + C_{n_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}} \quad ; \quad \boxed{V_{MC_2} = \sqrt{\frac{2N_T}{\rho S} \cdot \frac{1}{\delta_{r_{MAX}}\left(C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{n_\beta}C_{Y_{\delta r}}}{C_{Y_\beta}}\right)}}}$$

$$\boxed{\delta a_2 = \frac{2L_T}{\rho S \frac{2N_T}{\rho S} \cdot \frac{1}{\delta_{r_{MAX}}\left(C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{n_\beta}C_{Y_{\delta r}}}{C_{Y_\beta}}\right)}} \cdot \frac{1}{C_{l_{\delta a}}} - \frac{C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}}\delta_{r_{MAX}} = \frac{\delta_{r_{MAX}}}{C_{l_{\delta a}}}\left[\frac{L_T}{N_T}\left(C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{n_\beta}C_{Y_{\delta r}}}{C_{Y_\beta}}\right) - C_{l_{\delta r}}\right]}$$

3) $$Y = \frac{1}{2}\rho S V_{MC_3}^2 \left(\cancel{C_{y_0}}^{0} + C_{y_\beta}\beta_3 + \cancel{C_{y_{\delta a}}\delta_{a_3}}^{0} + C_{y_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right) = -W\phi_3 \quad (I)$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho S V_{MC_3}^2 \left(\cancel{C_{l_0}}^{0} + C_{l_\beta}\beta_3 + C_{l_{\delta a}}\delta_{a_3} + C_{l_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right) = L_T$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho S V_{MC_3}^2 \left(\cancel{C_{n_0}}^{0} + C_{n_\beta}\beta_3 + \cancel{C_{n_{\delta a}}\delta_{a_3}}^{0} + C_{n_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right) = N_T \quad (II)$$

$$\frac{(I)}{(II)} \rightarrow \frac{C_{y_\beta}\beta_3 + C_{y_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}}{C_{n_\beta}\beta_3 + C_{n_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}} = \frac{-W\phi_3}{N_T} \; ; \quad N_T\left(C_{y_\beta}\beta_3 + C_{y_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right) = -W\phi_3\left(C_{n_\beta}\beta_3 + C_{n_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right)$$

$$\beta_3\left[N_T C_{y_\beta} + W\phi_3 C_{n_\beta}\right] = \delta_{r_{MAX}}\left[-N_T C_{y_{\delta r}} - W\phi_3 C_{n_{\delta r}}\right]$$

$$\boxed{\beta_3 = \delta_{r_{MAX}} \cdot \frac{-W\phi_3 C_{n_{\delta r}} - N_T C_{y_{\delta r}}}{W\phi_3 C_{n_\beta} - N_T C_{y_\beta}}}$$

$$\boxed{V_{MC_3} = \sqrt{\frac{2N_T}{\rho S\left(C_{n_\beta}\beta_3 + C_{n_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right)}}}$$

$$\boxed{\delta_{a_3} = \frac{2L_T}{\rho S V_{MC_3}^2 C_{l_{\delta a}}} - \frac{C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}}\delta_{r_{MAX}} = \frac{2L_T}{\cancel{\rho S}\,\frac{2N_T}{\cancel{\rho S}\left(C_{n_\beta}\beta_3 + C_{n_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right)}} \cdot \frac{1}{C_{l_{\delta a}}} - \frac{C_{l_{\delta r}}}{C_{l_{\delta a}}}\delta_{r_{MAX}} = \frac{1}{C_{l_{\delta a}}}\left[\frac{L_T}{N_T}\left(C_{n_\beta}\beta_3 + C_{n_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right) - C_{l_{\delta r}}\delta_{r_{MAX}}\right]}$$

4) $$\boxed{V_{MC_2} > V_{MC_1} > V_{MC_3}}$$

Elegiría V_{MC_3} ya que le corresponde con el caso más crítico $\phi = 5°$

VMC = Velocidad mínima de control para $\phi \leq 5°$

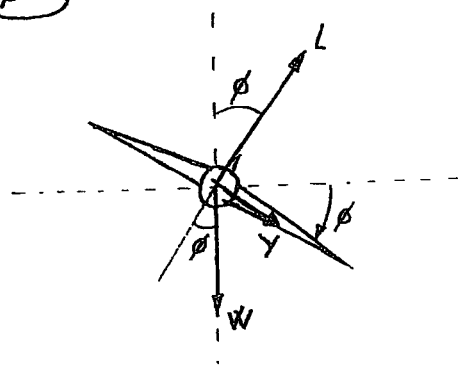
PROBLEMA | 3º Ex - Junio 02 |

En la definición de la Velocidad Mínima de Control Direccional, V_{MC}, las Normas FAR-25 establecen en su sección 25.149 que es la velocidad mínima a la que, cuando el motor crítico se hace inoperativo, es posible controlar el avión y continuar el vuelo rectilíneo estacionario con un ángulo de balance, ϕ, no superior a 5°.

Se pide:

1º) Determinar ϕ_1, V_{MC_1} y la deflexión de alerones, δ_{a_1}, para el caso de ángulo de resbalamiento, β, nulo. (supóngase que se cumple $\phi_1 < 5°$) Limitación de V_{MC} por $\delta_r = \delta_{r_{máx}}$

$\beta = 0$



$$\begin{cases} L = W \cdot \overbrace{\cos\phi}^{\simeq 1} \\ Y + W \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\phi}_{\simeq \phi} = 0 \end{cases}$$

$$Y = q \cdot S \left(C_{Y_0} + \cancel{C_{Y_\beta} \cdot \beta}^{\,0} + C_{Y_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{Y_{\delta r}} \cdot \delta_r \right)$$

$$q \cdot S \left(C_{Y_0} + \cancel{C_{Y_{\delta a}}}^{\,0\ \text{(enunciado)}} \cdot \delta_a + C_{Y_{\delta r}} \cdot \delta_r \right) + W \cdot \phi = 0$$

(1) $\frac{1}{2} \rho V_{MC_1}^2 \cdot S \left(C_{Y_0} + C_{Y_{\delta r}} \cdot \delta_{r_{máx}} \right) + W \cdot \phi_1 = 0$

Balance: $q \cdot S \cdot b \left(\cancel{C_{l_\beta} \cdot \beta}^{\,0} + C_{l_{\delta a}} \cdot \delta_a + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta_r \right) = L_T \longrightarrow$ (2) $\frac{1}{2} \rho V_{MC_1}^2 \cdot S \cdot b \left(C_{l_{\delta a}} \cdot \delta_{a_1} + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta_{r_{máx}} \right) = L_T$

Guiñada: $q \cdot S \cdot b \left(\cancel{C_{n_\beta} \cdot \beta}^{\,0} + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta_r + \cancel{C_{n_{\delta a}}}^{\,0\ \text{(enunciado)}} \cdot \delta_a \right) = N_T \longrightarrow$ (3) $\frac{1}{2} \rho V_{MC_1}^2 \cdot S \cdot b \left(C_{n_{\delta r}} \cdot \delta_{r_{máx}} \right) = N_T$

Tengo 3 ecs. y 3 incógnitas: V_{MC_1}, δ_a, ϕ

De (3) $\Rightarrow$ $\boxed{V_{MC_1} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot N_T}{\rho S \cdot b \cdot C_{n_{\delta r}} \cdot \delta_{r_{máx}}}}}$

∴ Con (3) entro en (2) $\Rightarrow$ $\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{\rho} \cdot \dfrac{\cancel{2} \cdot N_T}{\cancel{\rho} \cancel{S} \cancel{b} \cdot C_{n_{\delta r}} \cdot \delta_{r_{máx}}} \cdot \cancel{S} \cancel{b} \left(C_{l_{\delta a}} \cdot \delta_{a_1} + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta_{r_{máx}} \right) = L_T$

$$\boxed{\delta_{a_1} = \frac{\left(\frac{L_T}{N_T} \cdot C_{n_{\delta r}} - C_{l_{\delta r}} \right) \cdot \delta_{r_{máx}}}{C_{l_{\delta a}}}}$$

∴ Con (3) entro en (1) $\Rightarrow$ $\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{\rho} \dfrac{\cancel{2} \cdot N_T}{\cancel{\rho} \cancel{S} b \cdot C_{n_{\delta r}} \cdot \delta_{r_{máx}}} \cdot \cancel{S} \left(C_{Y_0} + C_{Y_{\delta r}} \cdot \delta_{r_{máx}} \right) + W \cdot \phi_1 = 0$

$$\boxed{\phi_1 = \frac{-N_T \left(C_{Y_0} + C_{Y_{\delta r}} \cdot \delta_{r_{máx}} \right)}{W \cdot b \cdot C_{n_{\delta r}} \cdot \delta_{r_{máx}}}}$$

2º) Determinar β_2, V_{MC_2} y δ_{a_2} para el caso $\phi = 0°$

Si no, tendríamos 3 ecs. con 2 incógnitas

Alas a nivel $\Rightarrow \phi = 0 \longrightarrow \beta \neq 0$ ¡Hay resbalamiento!

$$\begin{cases} L = W \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{1}{2}\rho V_{MC_2}^2 \cdot S\left(C_{Y_0} + C_{Y_\beta}\cdot\beta_2 + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta_{r_{máx}}\right) = 0$$

cte. y conocido, pero ¿igual al apartado 1º?

Balance: $q\cdot S\cdot b\left(C_{l_\beta}\cdot\beta + C_{l_{\delta a}}\cdot\delta_a + C_{l_{\delta r}}\cdot\delta_r\right) = L_T \longrightarrow (2) \quad \frac{1}{2}\rho V_{MC_2}^2 \cdot S\cdot b\left(C_{l_\beta}\cdot\beta_2 + C_{l_{\delta a}}\cdot\delta_{a_2} + C_{l_{\delta r}}\cdot\delta_{r_{máx}}\right) = L_T$

Guiñada: $q\cdot S\cdot b\left(C_{n_\beta}\cdot\beta + \cancel{C_{n_{\delta a}}\cdot\delta_a}^{\,0} + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta_r\right) = N_T \longrightarrow (3) \quad \frac{1}{2}\rho V_{MC_2}^2 \cdot S\cdot b\cdot\left(C_{n_\beta}\cdot\beta_2 + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta_{r_{máx}}\right) = N_T$

Vuelvo a tener 3 ecs. con 3 incógnitas:

De (1) $\Rightarrow$ $$\boxed{\beta_2 = -\frac{\left(C_{Y_0} + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta_{r_{máx}}\right)}{C_{Y_\beta}}}$$

Con (1) en (3) $\Longrightarrow$ $$\frac{1}{2}\rho V_{MC_2}^2 \cdot S\cdot b\left(-\frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}}\cdot\left(C_{Y_0} + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta_{r_{máx}}\right) + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta_{r_{máx}}\right) = N_T$$

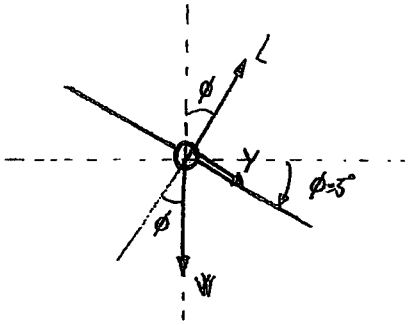
$$\longrightarrow \boxed{V_{MC_2} = \sqrt{\frac{2\cdot N_T}{\rho S\cdot b\left[\left(C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}}\cdot C_{Y_{\delta r}}\right)\cdot\delta_{r_{máx}} - C_{Y_0}\frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}}\right]}}}$$

Con β_2 y V_{MC_2} entro en (2) $\Longrightarrow$ $$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\rho}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot N_T}{\cancel{\rho S b}\left[\left(C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}}\cdot C_{Y_{\delta r}}\right)\cdot\delta_{r_{máx}} - C_{Y_0}\frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}}\right]}\cdot\cancel{S b}\left(-C_{n_\beta}\cdot\frac{\left(C_{Y_0} + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta_{r_{máx}}\right)}{C_{Y_\beta}} + C_{l_{\delta a}}\cdot\delta_{a_2} + C_{l_{\delta r}}\cdot\delta_{r_{máx}}\right) = L_T$$

$$\longrightarrow \boxed{\delta_{a_2} = \frac{1}{C_{l_{\delta a}}}\cdot\left[\frac{L_T}{N_T}\left[\left(C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}}\cdot C_{Y_{\delta r}}\right)\cdot\delta_{r_{máx}} - C_{Y_0}\cdot\frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}}\right] + \left(\frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}}\cdot C_{Y_{\delta r}} - C_{l_{\delta r}}\right)\delta_{r_{máx}} + \frac{C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}}\cdot C_{Y_0}\right]}$$

3º Ex - Junio 02 (Continuación)

3º) Determinar β_3, V_{MC_3} y δa_3, para el caso de $\phi = 5°$ $\rightarrow \phi = \frac{5 \cdot \pi}{180}$ rad $= \frac{\pi}{36}$ rad



$$\begin{cases} L = W \cdot \overbrace{\cos\phi}^{\simeq 1} \\ Y + W \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\phi}_{\simeq \phi} = 0 \end{cases}$$

$\phi = \frac{\pi}{36}$ rad

(1) $\frac{1}{2}\rho V_{MC_3}^2 \cdot S\left(C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \cdot \beta_3 + C_{Y_{\delta r}} \cdot \delta r_{máx}\right) + W(\phi) = 0$

¿igual al apartado 1º)?

Balance: $qS \cdot b\left(C_{l_\beta} \cdot \beta + C_{l_{\delta a}} \cdot \delta a + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta r\right) = L_T \longrightarrow$ (2) $\frac{1}{2}\rho V_{MC_3}^2 \cdot S \cdot b\left(C_{l_\beta} \cdot \beta_3 + C_{l_{\delta a}} \cdot \delta a_3 + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta r_{máx}\right) = L_T$

Guiñada: $qSb\left(C_{n_\beta} \cdot \beta + \cancel{C_{n_{\delta a}}}^{0} \cdot \delta a + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta r\right) = N_T \longrightarrow$ (3) $\frac{1}{2}\rho V_{MC_3}^2 \cdot S \cdot b\left(C_{n_\beta} \cdot \beta_3 + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta r_{máx}\right) = N_T$

Otra vez tenemos las 3 ecs. con las 3 incógnitas!: β_3, V_{MC_3} y δa_3.

Dividiendo $\frac{(1)}{(3)} \Rightarrow \frac{\cancel{\frac{1}{2}\rho V_{MC_3}^2} \cdot S\left(C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \cdot \beta_3 + C_{Y_{\delta r}} \cdot \delta r_{máx}\right)}{\cancel{\frac{1}{2}\rho V_{MC_3}^2} \cdot S \cdot b\left(C_{n_\beta} \cdot \beta_3 + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta r_{máx}\right)} = \frac{-W \cdot \frac{\pi}{36}}{N_T}$

$$C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \cdot \beta_3 + C_{Y_{\delta r}} \cdot \delta r_{máx} = -\frac{W}{N_T} \cdot \frac{\pi}{36} \cdot b\left(C_{n_\beta} \cdot \beta_3 + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta r_{máx}\right)$$

$$\boxed{\beta_3 = \frac{-\left[C_{Y_0} + \left(C_{Y_{\delta r}} + \frac{W}{N_T} \cdot \frac{\pi}{36} \cdot b \cdot C_{n_{\delta r}}\right) \cdot \delta r_{máx}\right]}{C_{Y_\beta} + \frac{W}{N_T} \cdot \frac{\pi}{36} \cdot b \cdot C_{n_\beta}}}$$

∴ Con β_3 entrando en (3) $\Rightarrow \frac{1}{2}\rho V_{MC_3}^2 \cdot S \cdot b\left(C_{n_\beta} \cdot \beta_3 + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta r_{máx}\right) = N_T$

$$\boxed{V_{MC_3} = \sqrt{\frac{2 \cdot N_T}{\rho S b\left(C_{n_\beta} \cdot \beta_3 + C_{n_{\delta r}} \cdot \delta r_{máx}\right)}}}$$

$\beta_3 = \ldots$

∴ Con β_3 y V_{MC_3} entrando en (2) $\Rightarrow \frac{1}{2}\rho V_{MC_3}^2 S b\left(C_{l_\beta} \cdot \beta_3 + C_{l_{\delta a}} \cdot \delta a_3 + C_{l_{\delta r}} \cdot \delta r_{máx}\right) = L_T$

$$\boxed{\delta a_3 = \frac{1}{C_{l_{\delta a}}} \cdot \left[\frac{2 \cdot L_T}{\rho V_{MC_3}^2 \cdot S b} - C_{l_\beta} \cdot \beta_3 - C_{l_{\delta r}} \cdot \delta r_{máx}\right]}$$

$V_{MC_3} = \ldots$ $\quad \beta_3 = \ldots$

4º) Ordenar de mayor a menor, si ello es posible, las tres velocidades V_{MC_1}, V_{MC_2} y V_{MC_3}. Explicar de forma razonada cuál elegiría como V_{MC} para la certificación del avión.

- $$V_{MC_1} = \sqrt{\frac{2 \cdot N_T}{\rho S b \cdot \underbrace{C_{n_{\delta_r}}}_{>0} \cdot \delta_{r_{máx}}}}$$

- $$V_{MC_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot N_T}{\rho S b \left[\left(\underbrace{C_{n_{\delta_r}}}_{>0} - \frac{\overbrace{C_{n_\beta}}^{>0}}{\underbrace{C_{y_\beta}}_{<0}} \cdot \underbrace{C_{y_{\delta_r}}}_{<0} \right) \delta_{r_{máx}} - C_{y_a} \frac{\overbrace{C_{n_\beta}}^{>0}}{\underbrace{C_{y_\beta}}_{<0}} \right.}}$$

- $$V_{MC_3} = \sqrt{\frac{2 \cdot N_T}{\rho S b \left[\left(\underbrace{C_{n_{\delta_r}}}_{>0} - \frac{\overbrace{C_{n_\beta}}^{>0} \left(\overbrace{C_{y_{\delta_r}}}^{<0} + \frac{W}{N_T} \frac{\pi}{36} b \cdot \overbrace{C_{n_{\delta_r}}}^{>0} \right)}{\underbrace{C_{y_\beta}}_{<0} + \frac{W}{N_T} \cdot \frac{\pi}{36} \cdot b \cdot \underbrace{C_{n_\beta}}_{>0}} \right) \cdot \delta_{r_{máx}} - \frac{\overbrace{C_{n_\beta}}^{>0} \cdot C_{y_a}}{\underbrace{C_{y_\beta}}_{<0} + \frac{W}{N_T} \frac{\pi}{36} b \cdot \underbrace{C_{n_\beta}}_{>0}} \right]}}$$

$$V_{MC_1} > V_{MC_2} \overset{?}{\lesseqgtr} V_{MC_3}$$

No se puede decir.

Elegiría como $V_{MC} \Rightarrow V_{MC_3}$ por ser la que contempla el caso más general $\begin{cases} \phi = 5^\circ \text{ (límite de la Normas)} \\ \beta \neq 0 \end{cases}$

13

Ingenieros Aeronáuticos
MECÁNICA DEL VUELO I
Javier Crespo

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2º A - 91 543 45 12

12-02-1996

Para un avión bimotor de transporte dotado de turborreactores, las Normas de Aeronavegabilidad (FAR 25.107 (b)) establecen que la velocidad de despegue seguro, V_2, no puede ser inferior a $1{,}2 \cdot V_s$ (V_s, velocidad de pérdida en vuelo horizontal rectilíneo estacionario) ni a $1{,}1 \cdot V_{MC}$ (V_{MC}, velocidad mínima a la que es posible controlar el avión en el aire y mantener vuelo horizontal rectilíneo estacionario, con el motor crítico inoperativo). En la fase de diseño preliminar se utiliza un peso W_d dado comprendido entre el peso mínimo operativo y el peso máximo al despegue, seleccionando de forma que se obtenga la misma V_2 mínima utilizando ambos criterios.

Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (por ejemplo, el avión es simétrico, lo primero que entra en pérdida es el conjunto ala-fuselaje y su coeficiente de sustentación máximo, $(C_{Lmax})_{wb}$, es conocido, $C_{Y\delta_a} = C_{n\delta_a} = 0$, etc) .
- El empuje de cada motor T y ρ son constantes conocidas.

Para el peso de diseño W_d, se pide:

1. Determinar el valor de V_{MC} y discutir la influencia de la posición del centro de gravedad.
2. Determinar la deflexión del timón de dirección δ_r necesaria para vuelo horizontal rectilíneo estacionario a V_{MC} con un motor parado y con resbalamiento nulo.
3. Determinar la deflexión del timón de dirección δ_r necesaria para vuelo horizontal rectilíneo estacionario a V_{MC} con un motor parado y con ángulo de balance nulo.
4. ¿Cuál de las dos deflexiones de timón es mayor?. Razonar la respuesta.

1)

$$V_s = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{Lmax}}} \quad ; \quad 1'2\, V_s = 1'1\, V_{MC} \Rightarrow V_{MC} = \frac{1'2}{1'1}\sqrt{\frac{2W_d}{\rho S C_{Lmax}}}$$

$$C_L = C_{Lwb} + \eta_t \frac{S_t}{S} C_{Lt}$$

$$C_{mcg} = 0 = C_{Lwb}\left(\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ac}\right) + C_{macwb} - C_{Lt}\,\eta_t \frac{S_t\, c_t}{S\, c}$$ distancia

$$C_L = C_{Lwb} + \eta_t \frac{S_t}{S}\left\{\frac{1}{\eta_t}\frac{S\cdot c}{S_t c_t}\left[C_{Lwb}\left(\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ca}\right) + C_{mac}\right]\right\}$$

$$C_L = C_{Lwb}\left[1 + \frac{c}{c_t}\left(\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ca}\right)\right] + \frac{c}{c_t} C_{mac}$$

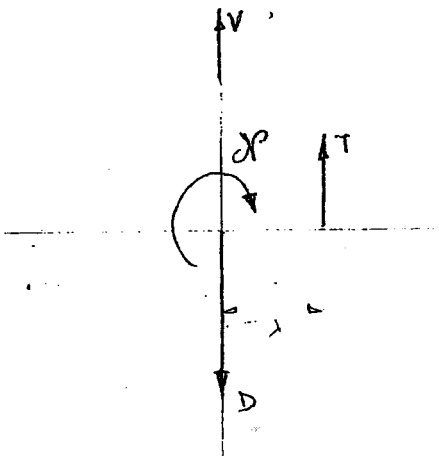
$$\boxed{C_{Lmax} = (C_{Lwb})_{max}\left[1 + \frac{c}{c_t}\left(\bar{x}_{cg} - \bar{x}_{ca}\right)\right] + \frac{c}{c_t} C_{mac}}$$

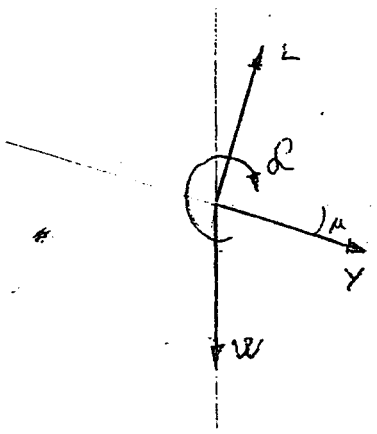
$$\boxed{V_{MC} = \frac{1'2}{1'1}\sqrt{\frac{2W_d}{\rho S C_{Lmax}}}}$$

$$(\bar{x}_{cg} - x_{ca}) \nearrow \Rightarrow C_{Lmax} \nearrow \Rightarrow V_{MC} \searrow$$

2)

Resbalamiento nulo

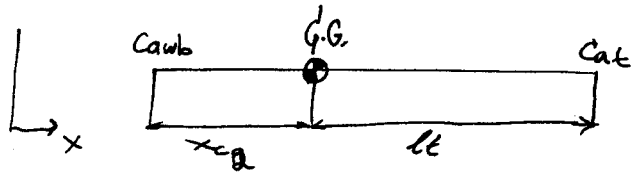




(13)

$V_2 \geq 1'2 \cdot V_s$

$V_2 \geq 1'1\, V_{MC}$



1) $V_{MC} = \dfrac{1'2}{1'1} V_s$

$$V_s = \sqrt{\frac{2 W_d}{\rho S C_{L_{MAX}}}}$$

$$C_L = C_{Lwb} + C_{Lt}\, \eta_t \cdot \frac{S_t}{S}$$

$$M_A = L_{wb} \cdot x_{cg} + M_{aawb} + \cancel{M_{act}}^{\,0} - L_t \cdot l_t$$

$$C_{MA} = C_{Lwb} \cdot \hat{x}_{cg} + C_{maawb} - C_{Lt} \cdot \underbrace{\hat{V}_t}_{\frac{S_t \cdot l_t}{S \cdot c}} \cancel{\eta_t}^{\,1} = C_{Lwb}(\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}) + C_{maawb} - C_{Lt} \cdot \frac{S_t}{S} \cdot \hat{l}_t = 0$$

$$C_{Lt} = C_{Lwb}(\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}) \cdot \frac{S}{S_t \hat{l}_t} + \frac{S}{S_t} \cdot \frac{1}{\hat{l}_t} C_{maawb}$$

$$C_L = C_{Lwb} + \frac{\cancel{S_t}}{\cancel{S}} \cdot \cancel{\eta_t}^{\,1} \left[C_{Lwb}(\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}) \cdot \frac{\cancel{S}}{\cancel{S_t} \cdot \hat{l}_t} + \frac{\cancel{S}}{\cancel{S_t}} \cdot \frac{1}{\hat{l}_t} C_{maawb} \right] ;$$

$$C_L = C_{Lwb} + C_{Lwb} \frac{\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}}{\hat{l}_t} + \frac{C_{maawb}}{\hat{l}_t}$$

$$C_{L_{MAX}} = C_{Lwb_{MAX}} \left(1 + \frac{\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}}{\hat{l}_t} \right) + \frac{C_{maawb}}{\hat{l}_t}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{2 \cdot W_d}{\rho S C_{Lwb_{MAX}} \left(1 + \frac{\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}}{\hat{l}_t} + \frac{C_{maawb}}{\hat{l}_t} \right)}} \Rightarrow \boxed{V_{MC} = \frac{1'2}{1'1} \cdot \sqrt{\frac{2 W_d}{\rho S C_{Lwb_{MAX}} \left(1 + \frac{\hat{x}_{cg} - \hat{x}_{acwb}}{\hat{l}_t} + \frac{C_{maawb}}{\hat{l}_t} \right)}}}$$

Si $\uparrow \hat{x}_{cg} \Rightarrow \downarrow V_{MC}$

Se acerca $\hat{x}_{cg}$ a la cola

Si $\downarrow \hat{x}_{cg} \Rightarrow \uparrow V_{MC}$

Se aleja $\hat{x}_{cg}$ a la posición del ala

2) $\underline{\beta = 0}$

$$T - D = 0$$
$$-Q + W \operatorname{sen}\phi = 0$$
$$-L + W \cos\phi = 0$$

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ Y \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix}$$

$$Y = -Q$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S \left[\cancelto{0}{C_{Y_0}} + \cancelto{0}{C_{Y_\beta}\beta} + \cancelto{0}{C_{Y_{\delta a}}\delta a} + C_{Y_{\delta r}}\delta r \right] = -W \operatorname{sen}\phi$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S b \left[\cancelto{0}{C_{l_0}} + \cancelto{0}{C_{l_\beta}\beta} + C_{l_{\delta a}}\delta a + C_{l_{\delta r}}\delta r \right] = 0$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S b \left[\cancelto{0}{C_{n_0}} + \cancelto{0}{C_{n_\beta}\beta} + \cancelto{0}{C_{n_{\delta a}}\delta a} + C_{n_{\delta r}}\delta r \right] = T \cdot d$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{2Td}{\rho V_{MC}^2 S b C_{n_{\delta r}}}}$$

3) $\underline{\phi = 0}$

$$T - D = 0$$
$$-Q = 0$$
$$-L + W = 0$$

$$Y = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S \left[\cancelto{0}{C_{Y_0}} + \cancelto{\neq 0}{C_{Y_\beta}\beta} + \cancelto{0}{C_{Y_{\delta a}}\delta a} + C_{Y_{\delta r}}\delta r \right] = 0 \rightsquigarrow \beta = \frac{-C_{Y_{\delta r}}}{C_{Y_\beta}} \cdot \delta r$$

$$L_A = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S b \left[\cancelto{0}{C_{l_0}} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta a}}\delta a + C_{l_{\delta r}}\delta r \right] = 0$$

$$N_A = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S b \left[\cancelto{0}{C_{n_0}} + C_{n_\beta}\beta + \cancelto{0}{C_{n_{\delta a}}\delta a} + C_{n_{\delta r}}\delta r \right] = T \cdot d \;;$$

$$T \cdot d = \frac{1}{2}\rho V_{MC}^2 S b \left[C_{n_\beta} \cdot \frac{-C_{Y_{\delta r}}}{C_{Y_\beta}}\delta r + C_{n_{\delta r}}\delta r \right] ; \quad \delta r \left[C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{Y_{\delta r}} C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}} \right] = \frac{2Td}{\rho S b V_{MC}^2}$$

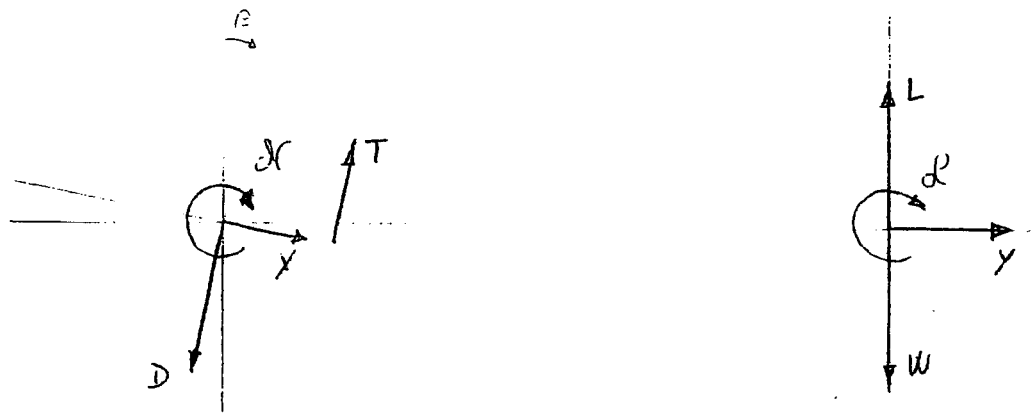
$$\boxed{\delta_r = \frac{2Td}{\rho S b V_{MC}^2 \left[C_{n_{\delta r}} - \frac{C_{Y_{\delta r}} C_{n_\beta}}{C_{Y_\beta}} \right]}}$$

4) $\delta_r \Big|_{\beta=0} > \delta_r \Big|_{\phi=0}$

$$\mathcal{N} = T.\lambda \Rightarrow \underbrace{C_{N0}}_{=0} + \underbrace{C_{N\beta}\beta}_{=0} + \underbrace{C_{N\delta a}\delta_a}_{=0} + C_{N\delta r}\delta_r = \frac{2T\lambda}{\rho S b V_{MC}^2}$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{2T\lambda}{\rho S b V_{MC}^2 C_{N\delta r}}}$$

3) Balance nulo



$$\mathcal{L} = 0 = \cancel{C_{L0}} + C_{L\beta}\beta + C_{L\delta a}\delta_a + C_{L\delta r}$$

$$\mathcal{N} = T\lambda \Rightarrow \cancel{C_{N0}} + C_{N\beta}\beta + \cancel{C_{N\delta a}}\delta_a + C_{N\delta r}\delta_r = \frac{2T\lambda}{\rho S b V_{MC}^2}$$

$$Y = 0 = \cancel{C_{Y0}} + C_{Y\beta}\beta + \underbrace{\cancel{C_{Y\delta a}}}_{=0}\delta_a + C_{Y\delta r}\delta_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{\cancel{C_{Y0}}}{\cancel{C_{Y\beta}}} - \frac{C_{Y\delta r}}{C_{Y\beta}}\delta_r \; ; \quad \beta = -\frac{C_{Y\delta r}}{C_{Y\beta}}\delta_r$$

$$\left(C_{N\delta r} - C_{N\beta}\frac{C_{Y\delta r}}{C_{Y\beta}}\right)\delta_r = \frac{2T\lambda}{\rho S b V_{MC}^2}$$

$$\boxed{\delta_r = \frac{2T\lambda C_{Y\beta}}{\rho S b V_{MC}^2 \left(C_{N\delta r} C_{Y\beta} - C_{Y\delta r} C_{N\beta}\right)}}$$

4)

$$(\delta_r)_{3^\circ} > (\delta_r)_{2^\circ}$$

$$(\delta_r)_{3^\circ} = \frac{2T\lambda\, C_{Y\beta}}{\rho S b V_{MC}^2\, C_{N\delta_r} C_{Y\beta}\left(1 - \frac{C_{Y\delta_r} C_{N\beta}}{C_{N\delta_r} C_{Y\beta}}\right)} = (\delta_r)_{2^\circ} \frac{1}{\left(1 - \frac{C_{Y\delta_r} C_{N\beta}}{C_{N\delta_r} C_{Y\beta}}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_{Y\delta_r} < 0 \\ C_{N\beta} > 0 \\ C_{N\delta_r} > 0 \\ C_{Y\beta} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{C_{Y\delta_r} C_{N\beta}}{C_{N\delta_r} C_{Y\beta}} > 0 \Rightarrow (\delta_r)_{3^\circ} > (\delta_r)_{2^\circ}$$

14

Ingenieros Aeronáuticos Lateral-Direccional
MECÁNICA DEL VUELO I
Javier Crespo

ACADEMIA NEWTON
Hilarión Eslava 12, 2ºA - 91 543 45 12

[H.23] **16-02-1998** Visto

Un modelo de avión no motorizado se encuentra montado en un túnel aerodinámico con las alas a nivel y de forma que sólo puede girar en guiñada alrededor de su eje z. El modelo no dispone de alerones y tiene un timón de dirección sin tab que gira libremente alrededor de su charnela.

Suponiendo además que:

- Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del modelo necesarias para la resolución del problema. Por ejemplo, la polar es parabólica de coeficientes constantes y conocidos, el coeficiente de sustentación sólo es función del ángulo de ataque, etc.
- El punto O de apoyo coincide con el centro de masas del modelo.
- Todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.
- La velocidad del túnel V, ρ y g son constantes conocidas.

Si en cierto instante inicial ($t = 0$) se da al modelo un ángulo de guiñada Ψ_0 y una velocidad angular de guiñada $\dot{\Psi}_0$, se pide:

1. Determinar el ángulo de guiñada en función del tiempo.
2. Determinar las componentes de la fuerza de reacción del apoyo.

(14)

1) $\delta_a = 0$

$\phi = \mu = 0 = \gamma = \theta = \alpha$

$T = 0$

Timón de dirección "flotando" $\Rightarrow H_r = 0 \Rightarrow \delta_{r_f} = \frac{-1}{Ch_{\delta_r}}\left[Ch_{r\beta}\cdot\beta + \cancel{Ch_{r\delta_{tr}}}^{0}\,\delta_{tr}\right]$

$T\cancel{\cos\varepsilon\cos\nu}^{0} - D - W\cancel{\operatorname{sen}\gamma}^{0} + R_x = 0 \;;\; D = R_x \quad (1)$

$T\cancel{\cos\varepsilon\operatorname{sen}\nu}^{0} - Q + W\cancel{\cos\gamma\operatorname{sen}\mu}^{0} = \frac{W}{g}\cdot V\cdot\dot{\chi} \;;\; R_y + Q = \frac{W}{g}V\dot{\chi} \quad (2)$

$-T\cancel{\operatorname{sen}\varepsilon}^{0} - L + W\cancel{\cos\gamma\cos\mu}^{1} = 0 \;;\; R_z - L + W = 0 \quad (3)$

$$\begin{bmatrix} F_{Ax} \\ Y \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ \cancel{\alpha}^{0} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -Q \\ -L \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} F_{Ax} = +\beta Q - D \;;\; D = \beta Q - F_{Ax} \\ Y = -\beta D - Q \;;\; Q = -Y + \beta D \\ F_{Az} = -L \end{array}$$

$$\begin{cases} F_{Ax} + R_x = 0 \\ Y + R_y = -D \\ -L + W + R_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_A + M_x = 0 \\ M_A + M_y = 0 \\ N_A = \frac{1}{2}\rho V^2 S b\left[\cancel{C_{n0}}^{0\,(\text{avión simétrico})} + C_{n\beta}\beta + \cancel{C_{n\delta a}\delta_a}^{0\,(\text{no tiene alerón})} + C_{n\delta_r}\delta_{r_f}\right] = I_z\dot{r} - \cancel{J_{xz}\dot{p}}^{0} - (I_x - \cancel{I_y})^{0}pq + \cancel{J_{xz}qr}^{0} \quad (I) \end{cases}$$

$p = \cancel{\dot{\phi}}^{0} - \cancel{\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta}^{0} = 0$

$q = \cancel{\dot{\theta}\cos\phi}^{0} + \cancel{\dot{\psi}\cos\theta\operatorname{sen}\phi}^{0} = 0$

$r = -\cancel{\dot{\theta}\operatorname{sen}\phi}^{0} + \cancel{\dot{\psi}\cos\theta\cos\phi}^{1} = \dot{\psi}$

$(I) \rightsquigarrow \ddot{\psi} = \frac{\rho V^2 S b}{I_z}\cdot\left[C_{n\beta} - \frac{Ch_{r\beta}}{Ch_{r\delta_r}}\right]\beta \Rightarrow r^2 - A = 0 \;;\; r = \pm\sqrt{A}$

<u>$A > 0$:</u> $\psi(t) = Be^{\sqrt{A}\cdot t} + Ce^{-\sqrt{A}\cdot t}$

Solución no válida pues $e^{\sqrt{A}\cdot t}$ es divergente

$\underline{A<0:}$ $\psi(t) = B\cos\sqrt{A}\cdot t + C\,\mathrm{sen}\sqrt{A}\cdot t$

$$\psi(0) = \psi_0 = B$$

$$\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0 = -\sqrt{A}\cdot B\,\mathrm{sen}\sqrt{A}\cdot t + \sqrt{A}C\cos\sqrt{A}\cdot t \rightsquigarrow C = \frac{\dot{\psi}_0}{\sqrt{A}\cdot\cos\sqrt{A}t} + \psi_0\,\mathrm{tg}\sqrt{A}t$$

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(t) &= \psi_0\cos\sqrt{A}t + \frac{\dot{\psi}_0}{\sqrt{A}}\,\mathrm{tg}\sqrt{A}t + \psi_0\,\mathrm{tg}\sqrt{A}t\cdot\mathrm{sen}\sqrt{A}t \\ A &= \frac{\rho V^2 S b}{J_{x_z}}\cdot\beta\left(C_{l_\beta} - \frac{C_{hr\beta}}{C_{hr\delta r}}\right) \end{aligned}}$$

2)

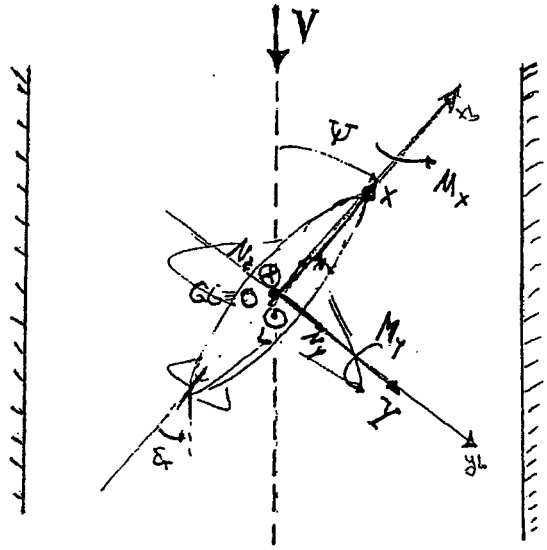
$$\begin{cases} \boxed{R_x = D = \frac{1}{2}\rho S V^2\left[C_{D0} + K C_L^2\right] = \frac{1}{2}\rho S V^2\left[C_{D0} + K C_{L\alpha}^2\cdot\alpha^2\right]} \\ R_z + L = W \rightsquigarrow \boxed{R_z = W - \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L\alpha}\cdot\alpha} \\ R_y + Y = 0 \rightsquigarrow \boxed{R_y = -\frac{1}{2}\rho S V^2\left[\cancel{C_{y0}}^{0} + \cancel{C_{y\delta a}\delta a}^{0} + C_{y\beta}\beta + C_{y\delta r}\cdot -\frac{C_{hr\beta}}{C_{hr\delta r}}\beta\right]} = -\beta\cdot\left[C_{y\beta} - \frac{C_{y\delta r}C_{hr\beta}}{C_{hr\delta r}}\right]\cdot\frac{1}{2}\rho V^2 S \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L\alpha}\cdot\alpha$$

$$C_L = C_{L\alpha}\cdot\alpha$$

$$\begin{cases} L_A + M_x = 0 \rightsquigarrow \boxed{M_x = -\frac{1}{2}\rho S V^2 b\left[\cancel{C_{l0}}^{0} + C_{l\beta}\beta + \cancel{C_{l\delta a}\delta a}^{0} + C_{l\delta r}\cdot -\frac{C_{hr\beta}}{C_{hr\delta r}}\beta\right]} = -\beta\left[C_{l\beta} - \frac{C_{l\delta r}C_{hr\beta}}{C_{hr\delta r}}\right]\cdot\frac{1}{2}\rho V^2 S b \\ M_A + M_y = 0 \rightsquigarrow \boxed{M_y = -\frac{1}{2}\rho S V^2 b\left[C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha + C_{m\delta e}\cdot\delta_e\right]b} \end{cases}$$

H.23/16-02-1998



- N_x, N_y, N_z } son las reacciones del ge
- M_x, M_y

Suponemos que $\theta = 0$

1 CÁLCULO DE $\psi = \psi(t)$

- Avión con alas a nivel ($\phi = 0$)
- Ángulos pequeños

* Ecnes de Fuerzas:

Reacción según eje "X".

$$X + N_x = 0 \quad (1)$$

no tiene alerones

$$Y + N_y = qS\left(\cancel{C_{Y_0}} + C_{Y_\beta}\cdot\beta + \cancel{C_{Y_{\delta a}}}\cdot\delta a + C_{Y_{\delta r}}\cdot\delta r\right) + N_y = 0 \quad (2)$$

$$-L + W + N_z = 0 \quad (3)$$

* Ecnes de Momentos:

$$\mathcal{L}_A + M_x = 0 \quad (4)$$

(no tiene timón de profundidad)

$$M_A + M_y = qSc\left(C_{m_0} + C_{m_\alpha}\cdot\alpha_{w_0} + \cancel{C_{m_\delta}}\cdot\delta e\right) + M_y = 0 \quad (5)$$

$$N_A = qSb\left(\cancel{C_{n_0}} + C_{n_\beta}\cdot\beta + \cancel{C_{n_{\delta a}}}\cdot\delta a + C_{n_{\delta r}}\cdot\delta r\right) = I_z\dot{r} - \cancel{I_{xz}\dot{p}} - (I_x - I_y)\,p\,\cancel{q} + \cancel{I_{xz}\,q\,r}$$

(no tiene alerones)

$$= I_z\cdot\ddot{\psi} \quad (6)$$

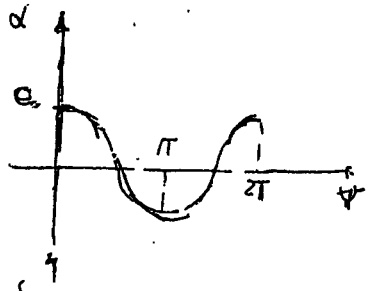
$$p = \cancel{\dot{\phi}} - \dot{\psi}\,\cancel{\operatorname{sen}\theta}$$

$$q = \cancel{\dot{\theta}}\cos\phi + \dot{\psi}\cos\theta\,\cancel{\operatorname{sen}\phi}$$

$$r = \cancel{-\dot{\theta}\operatorname{sen}\phi} + \dot{\psi}\underbrace{\cos\theta}_{1}\underbrace{\cos\phi}_{1}$$

$r = \dot{\psi}$

NOTA. Si no hiciésemos la hipótesis de $\theta=0$ sino de $\theta=\theta_0=cte$, se tendría que poner en función de ψ, ya que al girar ψ el ángulo de ataque varía; o la vista de la configuración:



$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \theta_0 \cos\psi}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \psi=0 \rightarrow \theta=\alpha=\theta_0 \\ \psi=\frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha=0 \\ \psi=\pi \rightarrow \alpha=-\theta=-\theta_0 \end{array}\right\}$$

- δ_r es libre $\longrightarrow$ Ahora la charnela del timón de dirección es nula:

$$C_h = \cancel{C_{h_0}}^{\,0\ (\text{el timón dirección es simétrico})} + C_{h_\beta}\cdot\beta + C_{h_{\delta_r}}\cdot\delta_r + \cancel{C_{h_{\delta_a}}}^{\,0\ (\text{no hay alerones})}\cdot\delta_a = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \delta_r = -\cancel{\frac{C_{h_0}}{C_{h_{\delta_r}}}}^{\,0} - \frac{C_{h_\beta}}{C_{h_{\delta_r}}}\beta$$

- Luego:

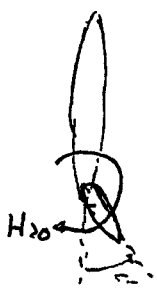
$$I_z\ddot{\psi} = qSb\left(C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta_r}}\cdot\delta_r\right) \underset{\{\psi=-\beta\}}{=} qSb\left[C_{n_\beta}(-\psi) + C_{n_{\delta_r}}\left(0-\frac{C_{n_\beta}}{C_{h_{\delta_r}}}(-\psi)\right)\right]$$

$$\longrightarrow \boxed{\ddot{\psi} = A\,\psi}$$

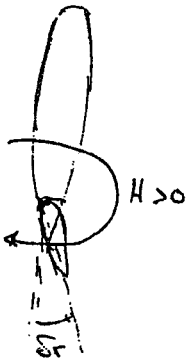
$$\text{donde } A = \frac{qSb}{I_z}\cdot\left(-\underbrace{C_{n_\beta}}_{>0} + \underbrace{C_{n_{\delta_r}}}_{>0}\underbrace{\frac{\overbrace{C_{h_\beta}}^{>0}}{\underbrace{C_{h_{\delta_r}}}_{>0}}}\right)$$

$\Updownarrow$ Motor estable lateral-direccionalmente

¿signo? $\downarrow$ depende de los valores de cada coeficiente.



NOTA: signos de los coeficientes del momento de charnela.



$$C_h = \cancel{C_{h_0}}^{\,0\ (\text{timón simétrico})} + \underbrace{C_{h_\beta}}_{>0}\beta + \underbrace{C_{h_{\delta_r}}}_{>0}\cdot\delta_r + \cancel{C_{h_{\delta_t}}\cdot\delta_t}^{\,0\ (\text{no hay tab})}$$

· Resolución de $\ddot{\psi} = A\psi$

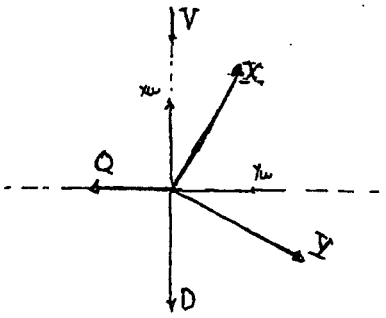
* ec. característica: $r^2 - A = 0 \longrightarrow r = \pm\sqrt{A}$

* $A > 0$:
  - $\psi(t) = a_1 e^{\sqrt{A}t} + b_1 e^{-\sqrt{A}t} \longrightarrow$ esta solución no es válida pq $e^{\sqrt{A}t}$ es divergente
  - a_1, b_1 se determinan sabiendo que $\psi(0) = \psi_0$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$

* $A < 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} &\psi(t) = a_2\cos\sqrt{A}\,t + b_2\,\text{sen}\sqrt{A}\,t \\ &\psi(0) = \psi_0\ ,\ \dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0 \end{aligned}}$$

2 CÁLCULO DE LAS COMPONENTES DE REACCIÓN



- $D = -X\cos\psi + Y\,\text{sen}\,\psi \longrightarrow \boxed{X}$
- Y sale de la ec. (2)
- Por tanto, con Y, X ya se pueden sacar las reacciones

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

CATEDRA DE MECANICA DEL VUELO – 2ª E. Parcial – B+C+D

A1

02.02.88

PROBLEMA 1º

El avión representado en la figura adjunta se ha obtenido añadiendo dos aletas delanteras verticales a una configuración básica. Sobre estas aletas actúa el piloto deflectándolas simultáneamente el mismo ángulo δ_c.

Este avión está aterrizando horizontal, rectilínea y estacionariamente con velocidad respecto a tierra V_g conocida en presencia de un viento cruzado de velocidad V_w ($V_w \ll V_g$) también conocida.

Suponiendo además que todas las características geométricas, aerodinámicas (en concreto las derivadas de los coeficientes de fuerza y momentos lateral-direccionales del avión completo (incluyendo las aletas) respecto de $\beta, \delta_a, \delta_r$; C_y entre éstas $C_{y\delta_a} = C_{n\delta_a} = 0$) y másicas del avión son conocidas, se pide:

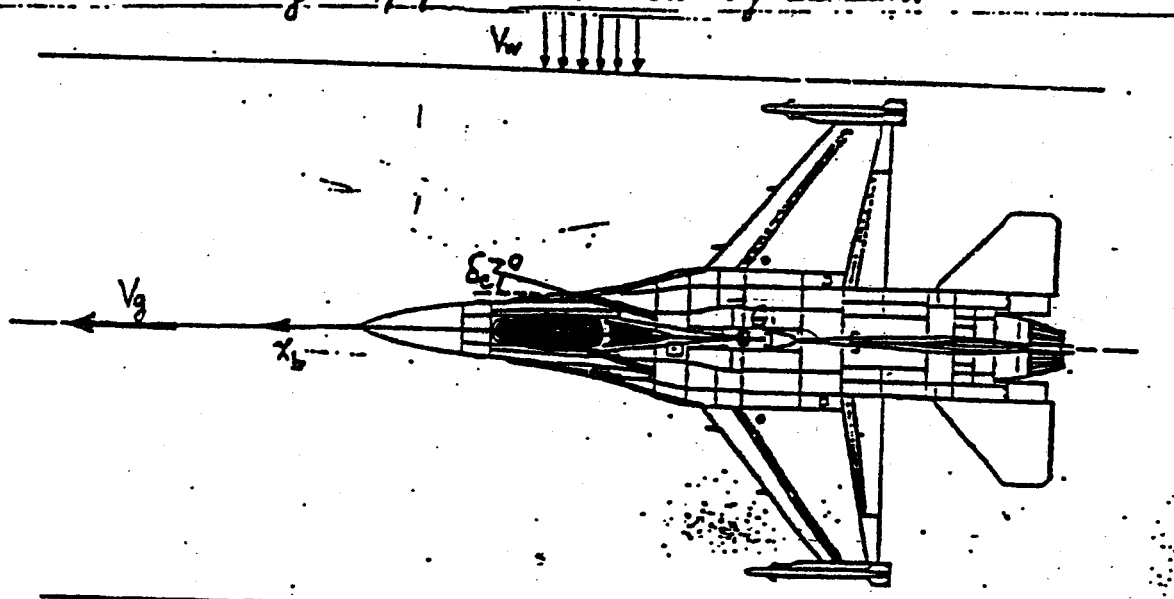
1º) Estimar las derivadas de estabilidad $C_{y\delta_c}$, $C_{l\delta_c}$, $C_{n\delta_c}$ en función de datos geométricos y aerodinámicos más simples.

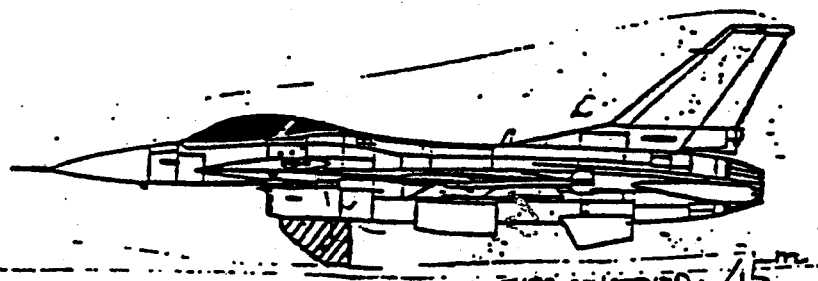
2º) Para cada uno de los dos casos siguientes, razonar si podría aterrizar este avión en las condiciones mencionadas y con $\phi = 0$:

a) el piloto actúa independientemente sobre las aletas y el timón de dirección.

b) las aletas y el timón de dirección están interconectados y siguen la ley $\delta_c = A\delta_r$, donde A es una constante conocida.

Si las respuestas son afirmativas, determinar las deflexiones necesarias de los mandos. Si son negativas, proponer un método de aterrizaje alternativo.





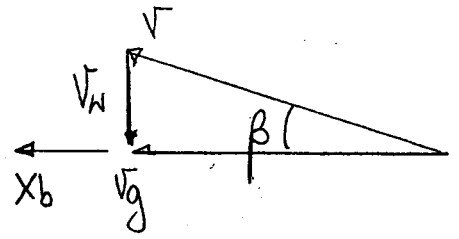
TIEMPO CONCEDIDO: 45 m

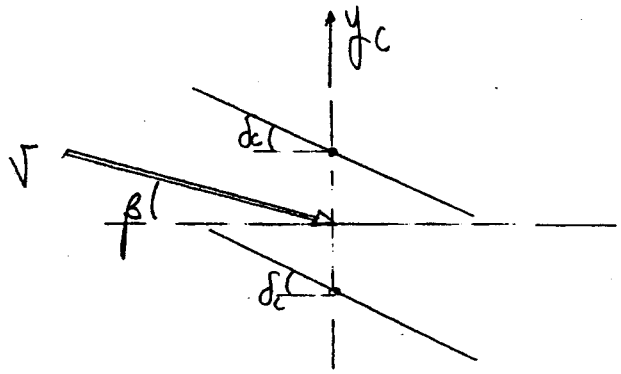
$\boxed{2\text{-}02\text{-}1988}$ (PROBLEMA 1/2º E. PARCIAL B+C+D)

- ATERRIZAJE HORIZONTAL, RECTILÍNEA Y ESTACIONARIA NENTE (a velocidad V_g)
- Con viento cruzado. ($V_W \ll V_g$)

1) $\vec{V_g} = \vec{V} + \vec{V_W} \longrightarrow \vec{V} = \vec{V_g} - \vec{V_W}$

PERFILES SIMÉTRICOS $\rightarrow C_{mac_c} = 0$





COEFICIENTE $C_{y\delta_c}$

- Vamos a suponer conocidas, la superficie de cada aleta vertical S_c, y el coeficiente de sustentación a_c.

$$C_{L_c} = a_c \alpha_c + \cancel{C_{L_{0_c}}} \quad ; \quad \text{Donde } \alpha_c = \delta_c - \beta$$

0 (Perfiles simétricos) ← no lo dice en ningún sitio

- La parte de fuselaje por delante de las aletas no interviene ni sobre la velocidad de la corriente incidente ($q_c = q$), ni sobre la posible deflexión debido a este ($\varepsilon_f = 0$)

$$Y_c = 2 q S_c a_c \alpha_c \quad ?$$

Nos falta considerar una posible deflexión de estela de una aleta sobre la otra (Vamos a englobar los dos efectos en un solo término)

$\alpha_c = \delta_c - \beta - \varepsilon$

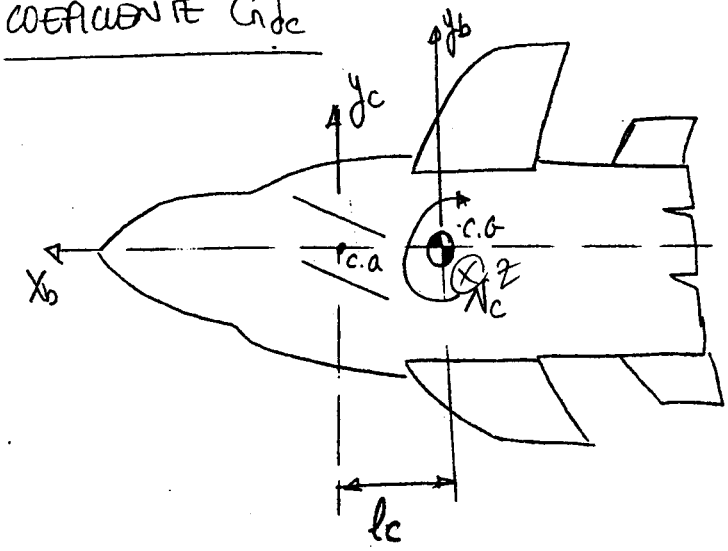
$$\varepsilon = \cancel{\varepsilon_0} + \frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}\alpha_c \longrightarrow \alpha_c = \delta_c - \beta - \frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}(\delta_c - \beta) = (\delta_c - \beta)\left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}\right)$$

0 (Sin torsión)

$$Y_c = 2 q S_c a_c (\delta_c - \beta)\left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}\right) \longrightarrow C_{y_c} = \frac{Y_c}{qS} = 2\frac{S_c}{S} a_c (\delta_c - \beta)\left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}\right)$$

$$\boxed{C_{y\delta_c} = 2\frac{S_c}{S} a_c \left(1 - \frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}\right)}$$

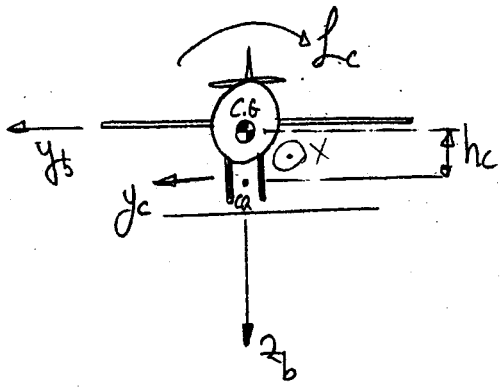
COEFICIENTE $C_{n\delta_c}$



l_c = Distancia entre el centro aerodinámico de las aletas y el eje z_s

$$\boxed{C_{n\delta_c} = +(C_{y\delta_c})\frac{l_c}{b} = +2\cdot\frac{S_c}{S}\cdot a_c\left(1-\frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}\right)\cdot\frac{l_c}{b}}$$

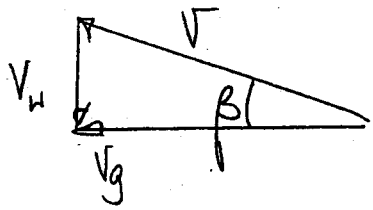
COEFICIENTE $C_{\ell\delta_c}$



h_c = distancia entre el centro aerodinámico de las aletas y el eje x_s

$$\boxed{C_{\ell\delta_c} = -C_{y\delta_c}\frac{h_c}{b} = -2\,\frac{S_c}{S}\,a_c\left(1-\frac{d\varepsilon}{d\alpha_c}\right)\frac{h_c}{b}}$$

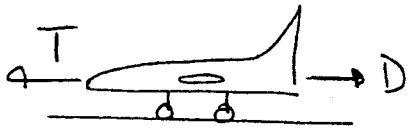
2)



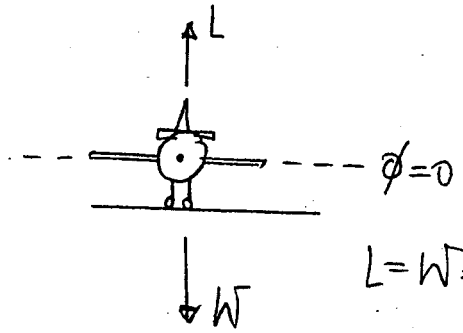
$Tg\beta = \frac{V_w}{V_g}$ Como $\frac{V_w}{V_g} \ll 1 \rightarrow \beta \ll 1$

Por tanto $Tg\beta \simeq \beta = \frac{V_w}{V_g}$

a) Aterrizaje horizontal, rectilíneo y estacionario
Con $\phi = 0$



$T = D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D$



$L = W = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L$

Por tanto

(AVIÓN SIMÉTRICO $\downarrow$ $C_{y_0} = C_{n_0} = C_{l_0} = 0$)

$$Y = 0 = qS(\cancel{C_{y_0}}^{0} + C_{y_\beta}\beta + C_{y_{\delta_r}}\delta_r + \cancel{C_{y_{\delta_a}}}^{0}\delta_a + C_{y_{\delta_c}}\delta_c) \quad (1)$$

$$\mathcal{L} = 0 = qSb(\cancel{C_{l_0}}^{0} + C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta_r}}\delta_r + C_{l_{\delta_a}}\delta_a + C_{l_{\delta_c}}\delta_c) \quad (2)$$

$$N = 0 = qSb(\cancel{C_{n_0}}^{0} + C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta_r}}\delta_r + \cancel{C_{n_{\delta_a}}}^{0}\delta_a + C_{n_{\delta_c}}\delta_c) \quad (3)$$

a) Tenemos tres ecuaciones con 3 incógnitas: δ_r, δ_c y δ_a (β conocido)

$$(1) \rightarrow \quad \delta_r = \left(-C_{y_\beta}\beta - C_{y_{\delta_c}}\delta_c\right)\cdot\frac{1}{C_{y_{\delta_r}}} \quad (1^*)$$

Sustituyendo en (3) $\quad C_{n_\beta}\beta + C_{n_{\delta_r}}\frac{1}{C_{y_{\delta_r}}}\left(-C_{y_\beta}\beta - C_{y_{\delta_c}}\delta_c\right) + C_{n_{\delta_c}}\delta_c = 0$

$$\left(C_{n_\beta} - \frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}}C_{n_{\delta_r}}\right)\beta = \left(\frac{C_{y_{\delta_c}}}{C_{y_{\delta_r}}}C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_c}}\right)\delta_c$$

$$\boxed{\delta_c = \frac{\left(C_{n_\beta} - \frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}}C_{n_{\delta_r}}\right)\beta}{\left(\frac{C_{y_{\delta_c}}}{C_{y_{\delta_r}}}C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_c}}\right)} = \frac{\left(C_{n_\beta}C_{y_{\delta_r}} - C_{y_\beta}C_{n_{\delta_r}}\right)}{\left(C_{y_{\delta_c}}C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_c}}C_{y_{\delta_r}}\right)}\cdot\frac{V_W}{V}}$$

Sustituyendo en (1*)

$$\boxed{\delta_r = -\frac{C_{y_\beta}}{C_{y_{\delta_r}}}\frac{V_W}{V} - \frac{C_{y_{\delta_c}}}{C_{y_{\delta_r}}}\left(\frac{C_{n_\beta}C_{y_{\delta_r}} - C_{y_\beta}C_{n_{\delta_r}}}{C_{y_{\delta_c}}C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_c}}C_{y_{\delta_r}}}\right)\frac{V_W}{V} = \frac{V_W}{V}\left(\frac{C_{n_{\delta_c}}C_{y_\beta} - C_{n_\beta}C_{y_{\delta_c}}}{C_{y_{\delta_c}}C_{n_{\delta_r}} - C_{n_{\delta_c}}C_{y_{\delta_r}}}\right)}$$

Con δ_c y δ_r en (2)

$$C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta_r}}\delta_r + C_{l_{\delta_c}}\delta_c + C_{l_{\delta_a}}\delta_a = 0$$

$$\delta_a = -\frac{1}{C_{l_{\delta_a}}}\left(C_{l_\beta}\beta + C_{l_{\delta_r}}\delta_r + C_{l_{\delta_c}}\delta_c\right)$$

$$\boxed{\delta_a = -\frac{1}{C_{l_{\delta_a}}}\frac{V_N}{V}\left(C_{l_\beta} + \frac{C_{l_{\delta_r}}\left(C_{n_{\delta_c}}C_{y_\beta} - C_{n_\beta}C_{y_{\delta_c}}\right) + C_{l_{\delta_c}}\left(C_{n_\beta}C_{y_{\delta_r}} - C_{y_\beta}C_{n_{\delta_r}}\right)}{\left(C_{y_{\delta_c}}C_{n_{\delta_r}} - C_{y_{\delta_r}}C_{n_{\delta_c}}\right)}\right)}$$

2) $\delta_c = A\delta_r$ se añade una ecuación más al sistema sin añadir ninguna incógnita $\longrightarrow$ Sistema indeterminado.

Para que pudiera ser compatible esta nueva ecuación debería ser una combinación lineal de las anteriores con:

$$\boxed{A = \frac{\delta_c}{\delta_r} = \frac{C_{n_\beta}C_{y_{\delta_r}} - C_{y_\beta}C_{n_{\delta_r}}}{C_{n_{\delta_c}}C_{y_\beta} - C_{n_\beta}C_{y_{\delta_c}}}}$$

(Este es el valor que debería tomar la constante A)

1L

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 25.06.10

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 2º

La Figura 1 adjunta representa un avión con cola en "V". El control longitudinal y direccional en este tipo de aviones se realiza mediante la parte móvil de la cola de la forma siguiente:

- Control longitudinal: las superficies móviles izquierda y derecha se deflectan simétricamente (ver Figura 2 (a)). Puede definirse la deflexión longitudinal de mando, δ_e, en función de las deflexiones de la superficie izquierda, δ_{Vi}, y la superficie derecha, δ_{Vd}, mediante:

$$\delta_e = \frac{\delta_{Vd} + \delta_{Vi}}{2}$$

- Control direccional: las superficies móviles izquierda y derecha se deflectan asimétricamente (ver Figura 2 (b)). Puede definirse la deflexión direccional de mando, δ_r, mediante:

$$\delta_r = \frac{\delta_{Vd} - \delta_{Vi}}{2}$$

Suponiendo además que se conocen todas las características geométricas (entre otras, la superficie de toda la cola en V, S_H), aerodinámicas (entre otras, las eficiencias aerodinámicas de todas las superficies de cola son la unidad) y másicas del avión necesarias para la resolución del problema y que el ángulo λ no es pequeño ($0 < \lambda < \pi/2$), se pide:

1º) Determinar la potencia de control longitudinal, $C_{m\delta_e}$, para este avión.

2º) Determinar la potencia de control direccional, $C_{n\delta_r}$, para este avión.

3º) Si por requerimientos de potencias de control un avión con cola convencional debe tener unos valores especificados para las superficies de sus colas horizontal y vertical, S_t y S_v, sustituir esa cola convencional por una cola en V que tenga las mismas potencias de control. Particularizar los resultados obtenidos para el caso de que la cola convencional y la cola en V sólo se diferencien en sus superficies respectivas, comparando los valores de las superficies mojadas de ambas colas.

TIEMPO CONCEDIDO: 45^m

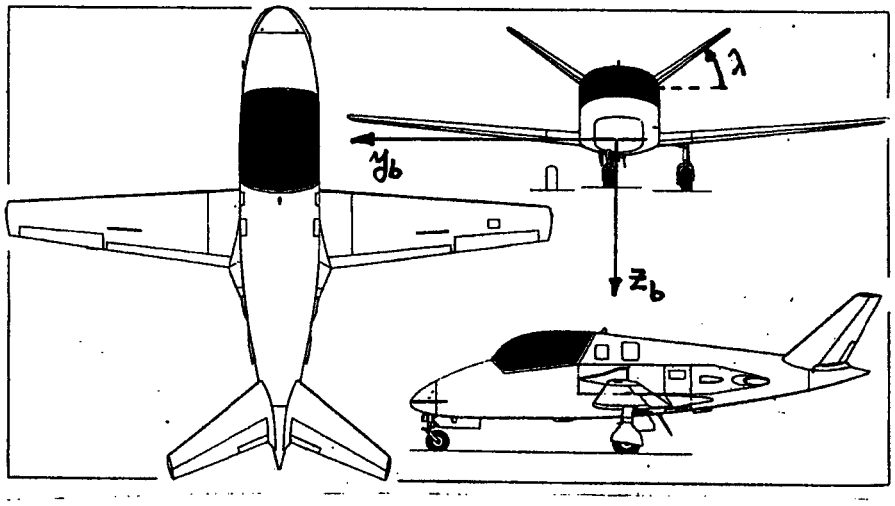


FIGURA 1

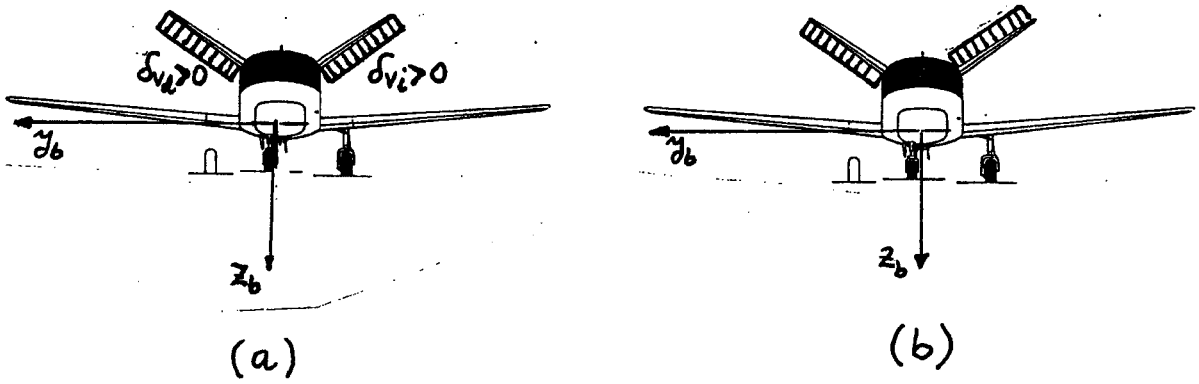
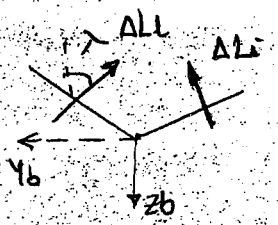


FIGURA 2

PROBLEMA 2 junio 2010

(1)



$$\Delta Ll = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{S_H}{2} a_H (\tau_H \delta V_d)$$

$$\Delta Li = \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{S_H}{2} a_H (\tau_H \delta V_i)$$

$$\Delta Mcg = -(\Delta Ld + \Delta Li)\cos\lambda \, l_H = -\frac{1}{2}\rho V^2 S_H l_H a_H \tau_H \left(\frac{\delta V_d + \delta V_i}{2}\right)\cos\lambda$$

$$\Delta Cmcg = \frac{\Delta Mcg}{\frac{1}{2}\rho V^2 S c} = -\frac{S_H l_H}{S c} a_H \tau_H \cos\lambda \, \delta e$$

$$\boxed{C_{m\delta e} = \frac{-S_H l_H}{S c} a_H \tau_H \cos\lambda}$$

(2)

$$\Delta Ncg = (\Delta Ld \sin\lambda - \Delta Li \sin\lambda) l_H = \frac{1}{2}\rho V^2 S_H l_H a_H \tau_H \left(\frac{\delta V_d - \delta V_i}{2}\right)\sin\lambda$$

$$\Delta Cncg = \frac{\Delta Ncg}{\frac{1}{2}\rho V^2 S b} = \frac{S_H l_H}{S b} a_H \tau_H \sin\lambda \, \delta r$$

$$\boxed{C_{n\delta r} = \frac{S_H l_H}{S b} a_H \tau_H \sin\lambda}$$

(3)

$$S_t l_t a_t \tau_t = S_H l_H a_H \tau_H \cos\lambda$$

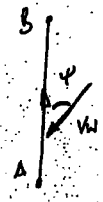
$$S_v l_v a_v \tau_v = S_H l_H a_H \tau_H \sin\lambda$$

depende sólo en superficie $\rightarrow$ $S_t = S_H \cos\lambda$, $S_v = S_H \sin\lambda$

$$\left.\begin{array}{l} S_{HCONV} = 2(S_t + S_v) \\ S_{HV} = 2 S_H \end{array}\right\} \frac{S_{HV}}{S_{HCONV}} = \frac{S_H}{S_t + S_v} = \frac{1}{\underbrace{\cos\lambda + \sin\lambda}_{A}} < 1$$

$$A^2 = \cos^2\lambda + \sin^2\lambda + 2\cos\lambda\sin\lambda = 1 + 2\cos\lambda\sin\lambda > 1$$

PROBLEMA 1 junio 2010



① A–B

$V_{T1} = V\cos\varphi - V_w\cos\psi$

$V\operatorname{sen}\varphi - V_w\operatorname{sen}\psi = 0 \rightarrow \operatorname{sen}\varphi = \frac{V_w}{V}\operatorname{sen}\psi$

$V_{T1} = V\sqrt{1-\left(\frac{V_w}{V}\right)^2\operatorname{sen}^2\psi} - V_w\cos\psi$

B–A

$V_{T2} = V\cos\varphi' + V_w\cos\psi$

$V\operatorname{sen}\varphi' - V_w\operatorname{sen}\psi = 0 \rightarrow \operatorname{sen}\varphi' = \frac{V_w}{V}\cdot\operatorname{sen}\psi$

$V_{T2} = V\sqrt{1-\left(\frac{V_w}{V}\right)^2\operatorname{sen}^2\psi} + V_w\cos\psi$

② $t_{AB} = \frac{d}{V_{T1}} = \frac{d}{V\sqrt{1-\left(\frac{V_w}{V}\right)^2\operatorname{sen}^2\psi} - V_w\cos\psi}$

$t_{BA} = \frac{d}{V_{T2}} = \frac{d}{V\sqrt{1-\left(\frac{V_w}{V}\right)^2\operatorname{sen}^2\psi} + V_w\cos\psi}$

③ $\boxed{\beta = 0}$

RUMBO A→B $\varphi = \operatorname{arcsen}\left(\frac{V_w}{V}\cdot\operatorname{sen}\psi\right)$

RUMBO B→A $\varphi' = 180 - \varphi = 180^\circ - \operatorname{arcsen}\left(\frac{V_w}{V}\operatorname{sen}\psi\right)$

④ COMBUSTIBLE A–B:

$dW = -C\,P_m\,dt \longrightarrow dt = -\frac{\eta}{C}\frac{dW}{D\cdot V}$; $D\cdot V = \frac{\rho S C_{D0}}{2}V^3 + \frac{2K}{\rho S V}W^2 = A + BW^2$

$T\cdot V = P_m\cdot\eta = D\cdot V$; $dx = V_{Ti}\cdot dt$

$L = W$

$$d = \int_{W_0}^{W_1} -\frac{\eta\cdot V_T}{C}\cdot\frac{dW}{A+BW^2} = -\eta\cdot\frac{V_T}{C}\left[\frac{1}{\sqrt{AB}}\operatorname{arctg}\frac{W\sqrt{AB}}{A}\right]_{W_0}^{W_1}$$

$$d = \frac{\eta}{C}\cdot\frac{V_T}{V}\cdot\frac{1}{\sqrt{KC_{D0}}}\left[\operatorname{arctg}\frac{2W_0}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}} - \operatorname{arctg}\frac{2W_1}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}\right]$$

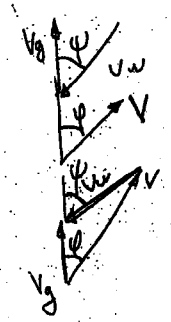
$$W_1 = \frac{2W_0/\rho S V^2 - \sqrt{K/C_{D0}}}{\operatorname{tg}\left(\frac{dC\sqrt{KC_{D0}}}{\eta V_T}\right)\frac{4K}{C_{D0}}\frac{1}{(\rho S V^2)^2}\cdot W_0 + \frac{2}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}}$$

combustible A→B = $W_0 - W_1$

Combustible B–A

$$d = \int_{W_1}^{W_2} -\frac{\eta V_{T2}}{C}\cdot\frac{dW}{A+BW^2}$$

$$W_2 = \frac{2W_1/\rho S V^2 - \sqrt{K/C_{D0}}}{\operatorname{tg}\left(\frac{dC\sqrt{KC_{D0}}}{\eta V_{T2}}\right)\frac{4K}{C_{D0}}\frac{1}{(\rho S V^2)^2}W_1 + \frac{2}{\rho S V^2}\sqrt{\frac{K}{C_{D0}}}}$$



$V\cos\varphi = V_w\cos\psi$

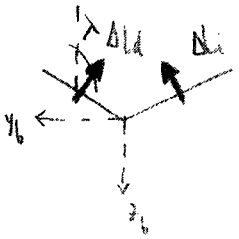
$V\operatorname{sen}\varphi = V_w\operatorname{sen}\psi$

$\operatorname{sen}\varphi = \frac{V_w}{V}\operatorname{sen}\psi$

$\cos\varphi = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{V_w}{V}\right)^2\operatorname{sen}^2\psi}$

PROBLEMA 2 (25.06.10)

1)



$$\left.\begin{aligned} \Delta L_d &= \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{S_H}{2} a_H (C_H \delta_{vd}) \\ \Delta L_i &= \frac{1}{2}\rho V^2 \frac{S_H}{2} a_H (C_H \delta_{vi}) \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta M_{cg} = -(\Delta L_d + \Delta L_i)\cos\lambda\, l_H = -\frac{1}{2}\rho V^2 S_H l_H a_H C_H \left(\frac{\delta_{vd}+\delta_{vi}}{2}\right)\cos\lambda$$

$$\Delta C_{mcg} = \frac{\Delta M_{cg}}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_c} = -\frac{S_H l_H}{S_c} a_H C_H \cos\lambda\, \delta_e$$

$$\boxed{C_{m\delta e} = -\frac{S_H l_H}{S_c} a_H C_H \cos\lambda}$$

2) $$\Delta N_{cg} = (\Delta L_d \operatorname{sen}\lambda - \Delta L_i \operatorname{sen}\lambda)\, l_H = \frac{1}{2}\rho V^2 S_H l_H a_H C_H \left(\frac{\delta_{vd}+\delta_{vi}}{2}\right)\operatorname{sen}\lambda$$

$$\Delta C_{ncg} = \frac{\Delta N_{cg}}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_c} = \frac{S_H l_H}{S_c} a_H C_H \operatorname{sen}\lambda\, \delta_r$$

$$\boxed{C_{n\delta r} = \frac{S_H l_H}{S_c} a_H C_H \operatorname{sen}\lambda}$$

3)

$$\left.\begin{aligned} S_H l_H a_H C_H &= S_V l_V a_V C_V \cos\lambda \\ S_V l_V a_V C_V &= S_V l_V a_V C_V \operatorname{sen}\lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Diferencia sólo en superficies}$$

$$\left.\begin{aligned} S_H &= S_V \cos\lambda \\ S_V &= S_V \operatorname{sen}\lambda \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} S_{mon} &= 2(S_H + S_V) \\ S_{mv} &= 2 S_H \end{aligned}\right\} \frac{S_{mv}}{S_{mon}} = \frac{S_V}{S_H + S_V} = \frac{1}{\underbrace{\cos\lambda + \operatorname{sen}\lambda}_{A}} \leq 1$$

$$A^2 = \cos^2\lambda + \operatorname{sen}^2\lambda + 2\cos\lambda\operatorname{sen}\lambda = 1 + 2\cos\lambda\operatorname{sen}\lambda > 1$$

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

UNIDAD DOCENTE DE MECÁNICA DEL VUELO 11.06.12

E. Final Junio *"Mecánica del Vuelo I"*

PROBLEMA 2º

Un avión turbohélice de dos motores, tal y como el mostrado en la figura, efectúa una subida rectilínea simétrica estacionaria con el motor izquierdo parado y con potencia en el motor derecho, P_m, constante y conocida.

Suponiendo además que:

a) Se conocen las características geométricas, aerodinámicas y másicas del avión necesarias para la resolución del problema (por ejemplo: la distancia d ; el peso del avión W constante; los coeficientes constantes de la polar parabólica, C_{D0}, k; las características aerodinámicas expresadas en los ejes estabilidad de la subida; $C_{Y\delta_a} = 0$, $C_{n\delta_a} < 0$; etc.).

b) La hélice gira a derechas (vista desde atrás), con velocidad angular ω y con rendimiento propulsivo η_p constantes y conocidos; la tracción que genera la hélice es paralela al eje x_s y está contenida en el plano x_s-y_s; el efecto del par motor del turbohélice "vivo" sobre el equilibrio de momentos de balance del avión no es despreciable.

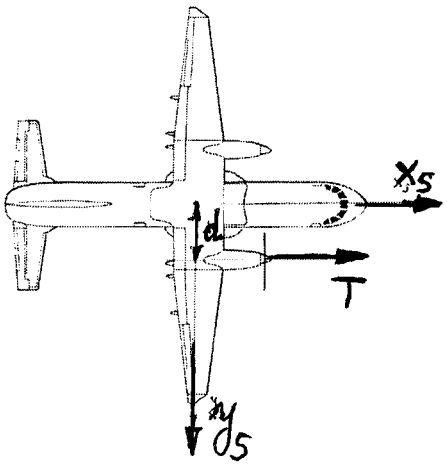
c) La densidad del aire es una constante conocida y todos los ángulos que intervienen en el problema son pequeños.

Se pide:

1º) Plantear el sistema dinámico de ecuaciones de fuerzas y momentos, en ejes estabilidad de la subida.

2º) Obtener una ecuación que permita calcular la velocidad de vuelo, $V_{\gamma_{max}}$, a imponer por el piloto para maximizar el ángulo de asiento de velocidad.

3º) Para la velocidad de vuelo calculada en el apartado anterior, determinar la deflexión de alerones, δ_a, la deflexión del timón de profundidad, δ_e, la deflexión del timón de dirección, δ_r, y el ángulo de balance, ϕ. Indicar el signo de estas variables.



TIEMPO CONCEDIDO: 1^h