

HOJA 1: ANILLOS

1. **Anillos booleanos.** Se dice que un anillo A es booleano si $\forall a \in A$ se cumple $a^2 = a$. En este ejercicio vamos a construir una familia de ejemplos importante de anillos booleanos. Durante todo el ejercicio consideramos $X \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de las partes de X , es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos de X . También consideramos la operación $B \uplus C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$ (se suele llamar diferencia simétrica de B y C y también es igual a $(B \cup C) \setminus (B \cap C)$).
 - a) Verifica si $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ es un anillo.
 - b) Verifica si $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ es un anillo.
 - c) Prueba que $(\mathcal{P}(X), \uplus, \cap)$ es un anillo conmutativo unitario.

Nota: La demostración de la propiedad asociativa de $\uplus$ y de la propiedad distributiva son pesadas, así que se dejan como opcionales. En caso de querer hacerlo puede ayudar escribir la pertenencia a los conjuntos como proposiciones y usar la lógica proposicional. También se puede intentar una demostración informal y visual utilizando diagramas de Venn.
 - d) Demuestra que el anillo del apartado anterior es booleano. Demuestra que todos sus elementos cumplen la ecuación $x + x = 0$ (esto es cierto en general en cualquier anillo booleano). ¿Cuáles son los elementos invertibles de este anillo?
2. Demuestra, a partir de la definición y de las propiedades ya vistas en teoría, que las siguientes propiedades son ciertas en cualquier anillo A dados elementos cualesquiera $a, b \in A$:
 - a) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$
 - b) $-(-a) = a$
 - c) $-(a + b) = -a - b$
 - d) $-(a - b) = b - a$
 - e) $(-a)(-b) = ab$
 - f) Si A es unitario, entonces $(-1)a = -a$
 - g) Si A es unitario y a es invertible, entonces a^{-1} también es invertible y $(a^{-1})^{-1} = a$