

HOJA 9: ANILLOS (CUERPO DE FRACCIONES)

1. **Cuerpo de fracciones de un dominio de integridad.** Sea A un dominio de integridad.

a) Consideramos el conjunto

$$S = \{(a, b) / a, b \in A, b \neq 0_A\}$$

junto con la relación $(a, b) \sim (c, d)$ si y solo si $ad = bc$. Demuestra que esta relación es de equivalencia.

b) Consideramos el conjunto cociente $K = S / \sim$. Para la clase de equivalencia de un elemento, utilizaremos la notación

$$[(a, b)]_{\sim} = \frac{a}{b}$$

Definimos en K las siguientes dos operaciones:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$$

Demuestra que estas operaciones están bien definidas (no dependen de la elección de representantes).

- c) Demuestra que K dotado de las dos operaciones anteriores es un anillo.
d) Demuestra que K dotado de las dos operaciones anteriores es un cuerpo.
e) Demuestra que K contiene un subanillo isomorfo a A .

El conjunto K recibe el nombre de cuerpo de fracciones de A .