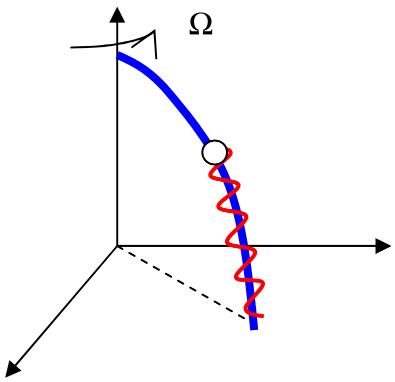
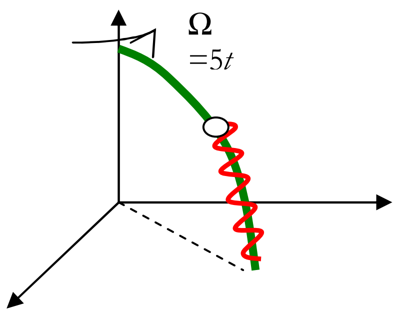
Mecánica Racional y Analítica (GAE)

Tema 2: Dinámica de la partícula (Problemas)

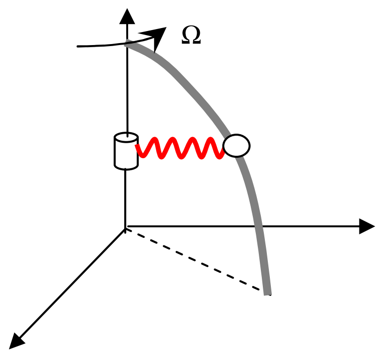
RELATIVO MÁS ARRASTRE



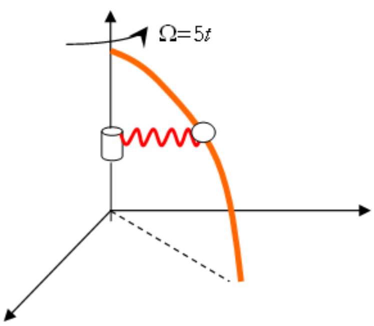
2.1. Una partícula de masa m desliza sobre una varilla lisa de radio a, sometida a su peso y a la acción de un muelle de constante k, ensartado a lo largo de la varilla, tal y como se ve en la figura.
La varilla gira alrededor de la vertical con Ω constante alrededor del eje vertical, con su extremo fijo a una altura a. Calcular:
1) Ecuaciones del movimiento de la partícula
2) Reacción normal de la varilla sobre la partícula



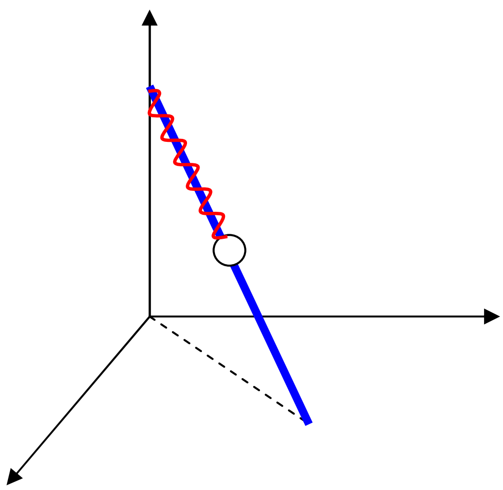
2.2. Una partícula de masa m desliza sobre una varilla lisa de radio a, con velocidad constante de valor v_0 , sometida a su peso y a la acción de un muelle de constante k, ensartado a lo largo de la varilla, tal y como se ve en la figura. La varilla gira alrededor de la vertical con $\Omega = 5t$, alrededor del eje vertical, con su extremo fijo a una altura a. Calcular:
1) Ecuaciones del movimiento de la partícula
2) Reacción normal de la varilla sobre la partícula



2.3. Una partícula de masa m desliza sobre una varilla lisa de radio a, sometida a su peso y a la acción de un muelle de constante k, enganchado al eje vertical mediante una deslizadera lisa, tal y como se ve en la figura. La varilla gira alrededor de la vertical con Ω constante alrededor del eje vertical, con su extremo fijo a una altura a. Calcular:
1) Ecuaciones del movimiento de la partícula
2) Reacción normal de la varilla sobre la partícula



2.4. Una partícula de masa m desliza sobre una varilla lisa de radio a, con velocidad constante v_0, sometida a su peso y a la acción de un muelle de constante k, enganchado al eje vertical mediante una deslizadera lisa, tal y como se ve en la figura. La varilla gira alrededor de la vertical con $\Omega= 5t$ alrededor del eje vertical, con su extremo fijo a una altura a. Calcular:
1) Ecuaciones del movimiento de la partícula
2) Reacción normal de la varilla sobre la partícula

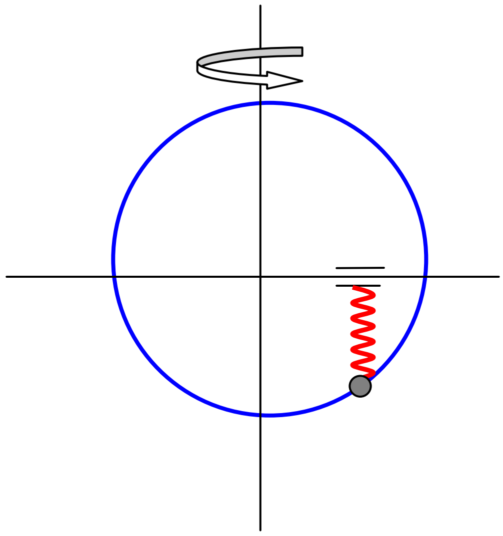


2.5. Una partícula de masa m desliza sobre una varilla lisa de longitud $2a$, sometida a su peso y a la acción de un muelle de constante k, tal y como se ve en la figura. La varilla gira alrededor de la vertical con Ω constante alrededor del eje vertical, con su extremo fijo a una altura a. Calcular:

1) Ecuaciones del movimiento de la partícula
2) Reacción normal de la varilla sobre la partícula

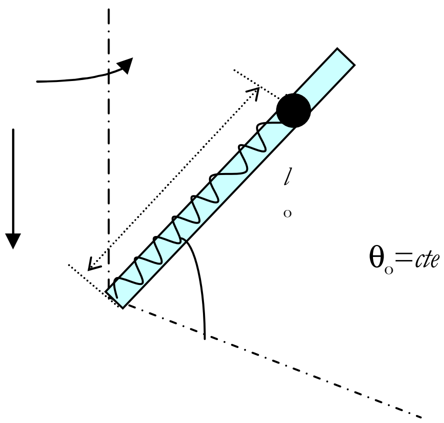
2.6. Una partícula de masa m se mueve libremente sobre un aro rígido, circular, liso, de radio R, que tiene un movimiento de rotación impuesto con velocidad angular ω constante alrededor de un diámetro vertical fijo. Además del peso, sobre la partícula actúa un resorte lineal de constante k y longitud natural nula, cuyo otro extremo desliza libremente sobre el diámetro horizontal del aro. Se pide:

1) Componentes de la aceleración (absoluta) de la partícula en las direcciones tangencial al aro y perpendicular al plano del mismo, en función de ω y sus derivadas.
2) Ecuación diferencial del movimiento.
3) Expresión general de la reacción del aro sobre la partícula, así como el momento que se necesita aplicar al aro para obtener el movimiento impuesto (se supondrá masa nula para el aro).

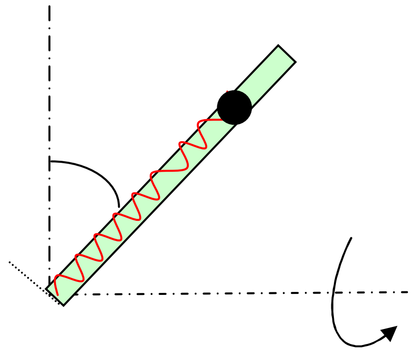


2.7. Un tubo hueco con un extremo fijo gira con velocidad angular constante ω alrededor de la vertical, formando siempre un ángulo θ_o con la horizontal. En el interior del tubo, a una distancia r_o del origen O, se abandona una partícula de masa m que inicialmente se encuentra en reposo respecto al tubo, pero que puede deslizar sin rozamiento a lo largo del mismo. Se halla además unida al punto O por un muelle de constante k y longitud natural l_o.

1) Dar la condición que debe cumplir ω para que se de un movimiento de tipo armónico
2) Reacción normal del tubo sobre la bola



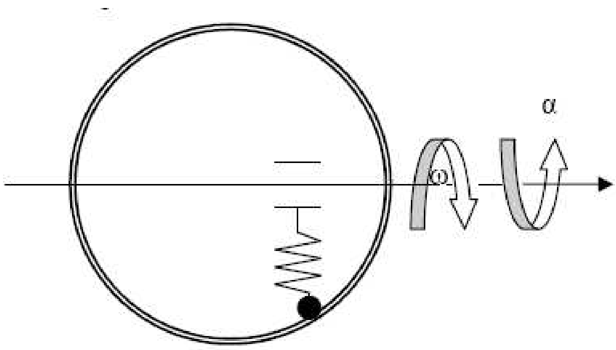
Datos del problema, m, θ_o k, l_o ,g, ω, r_o



2.8. Una partícula de masa m desliza sobre una varilla lisa de longitud L, sometida a su peso y a la acción de un muelle de constante k unido al origen como se muestra en la figura. La varilla gira alrededor de la horizontal, con la que forma un ángulo constante, con un extremo fijo en el origen siendo su velocidad angular $\omega = 5t^2$ (rad/s).

1) Calcular las ecuaciones diferenciales de movimiento
2) Calcular las componentes de la reacción normal de la varilla sobre la partícula

2.9. Una partícula está ensartada en un aro de radio R= 1m que gira alrededor de su diámetro horizontal con ω= 2 rad/s y a = 0,5 rad/s². La partícula está unida también a un resorte elástico de constante k=100 N/m y cuyo extremo opuesto está unido a una deslizadera que puede moverse libremente a lo largo del diámetro horizontal del aro. Calcular:



1) La velocidad absoluta de la partícula
2) La aceleración absoluta de la partícula
3) La reacción normal que ejerce el aro sobre la partícula

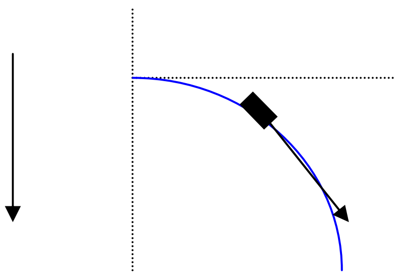
2.10. Un punto P se mueve sobre la superficie terrestre de modo que su latitud λ y su longitud φ vienen dadas por las expresiones

$$\lambda = 10^{-6}\frac{t}{3}, \quad \varphi = 10^{-6}\frac{t}{6} \text{ en unidades del SI}$$

Considerando la Tierra como una esfera de 6400 km de radio, determínense, para $\lambda = \frac{\pi}{3}$ y $\varphi = \frac{\pi}{6}$:

1) la velocidad relativa a la Tierra y la velocidad absoluta
3) la aceleración de Coriolis y las ecuaciones diferenciales de movimiento

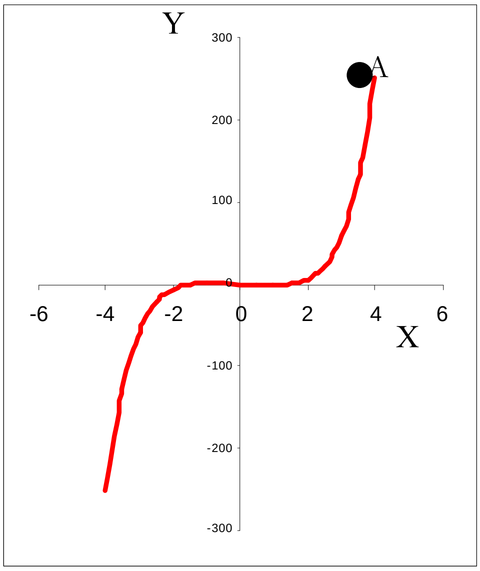
CURVAS CARTESIANAS



2.11. Una partícula de masa m desliza sin rozamiento sobre la parábola $y = -bx^2$, b constante positiva. Parte de x=0, con velocidad v_o.

1) ¿Se conserva la energía mecánica?, ¿por qué?
2) Encontrar la expresión de la velocidad de la partícula en función de la coordenada x, $v(x)$
3) Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, hallar la expresión de la fuerza normal que la curva ejerce sobre la partícula en función de su coordenada x teniendo en cuenta que $b<g/2v_o^2$, ¿llegará la partícula a peder el contacto con la curva?

Datos: g, v_o, $b<g/2v_o^2$, Ayuda: $\cos\theta = 1/\sqrt{1+tg^2\theta}$, Radio de curvatura $R = \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}$



2.12. Una partícula de masa m=1 kg está ensartada en una curva rígida de ecuación cartesiana: $y = \frac{x^5}{4} - x$

Actúan sobre ella **dos fuerzas conservativas**

$\vec{F} = 4\vec{i}$

$\vec{P} = -10\vec{j}$ (su peso tomando g=10 m/s²)

La partícula se deja **inicialmente en reposo** en el punto A de coordenadas (4,252). No hay rozamiento

Se pide:

1) Expresión de $v(x)$ que da el módulo de la velocidad de la partícula en función de x

2) Velocidad en el punto O (0,0) y en el (-2,-6)

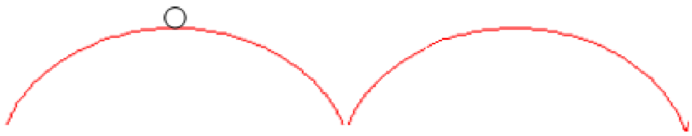
3) Radio de curvatura en el punto O (0,0)0

4) $\vec{N}$ (reacción normal) en el punto O (0,0)

2.13. Un punto pesado de masa m se mueve sin rozamiento por la cicloide: $\left.\begin{array}{l} x = R\varphi - Rsen\varphi \\ y = R - R\cos\varphi \end{array}\right\}$ Sabiendo que el eje OY es vertical ascendente se lanza el punto desde la posición más alta de la cicloide con velocidad inicial v_o. Se pide:

1) Ecuaciones del movimiento

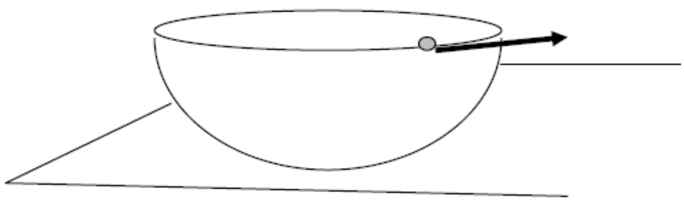
2) Reacción normal



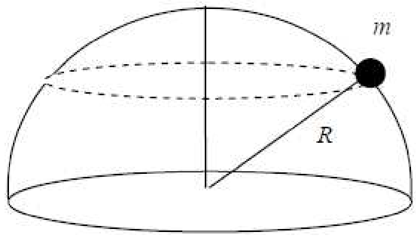
CUENCOS Y CONOS

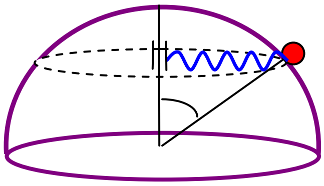
2.14. Una partícula de masa m se mueve sin rozamiento por el interior de un cuenco semiesférico fijo de radio R cuyo borde está horizontal. Inicialmente se lanza la partícula desde una posición situada en un punto (h,r) sobre el fondo del cuenco, con una velocidad horizontal v. Se pide calcular h (altura del cuenco) para que el máximo valor que pueda tener v sin que la partícula abandone el cuenco, sea doble que el mínimo valor necesario para que la partícula no descienda de nivel.

2.15. Desde el borde horizontal de un cuenco de forma semiesférica se lanza una partícula con velocidad horizontal v_o. ¿Es posible dar un valor a la velocidad para que la partícula no descienda? si es posible calcularla y si no , calcular hasta que altura descenderá la partícula.

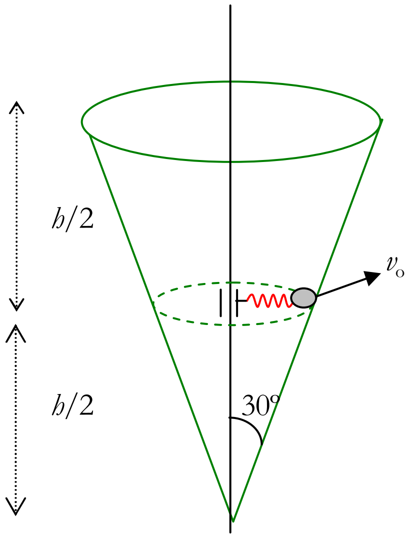


2.16. La partícula de masa *m*, se lanza con velocidad $v_o = \sqrt{gR}$ desde la posición representada en la figura. ¿Es posible que se mantenga describiendo circunferencias horizontales en esa posición? Si esto no fuera posible, explicar razonadamente qué es lo que sucede con la partícula





2.17. La partícula de masa *m*, se lanza con velocidad $v_o = \sqrt{\dfrac{3Rg}{4}}$ horizontal desde la posición representada en la figura. Esta unida a un muelle de constante *k*, unido a su vez a una deslizadera. Calcular el valor de la constante del muelle para que se mantenga describiendo circunferencias horizontales en esa posición?

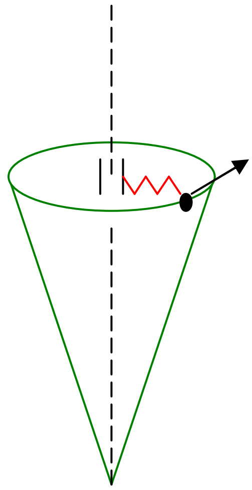


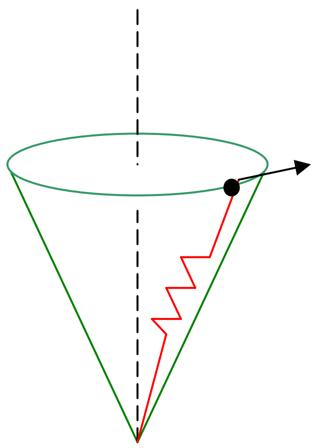
2.18. Se lanza una partícula desde una altura $h/2$ en el interior de una superficie cónica con velocidad inicial horizontal v_o. La partícula se encuentra unida a un muelle de constante $k=2mg/h$, cuyo extremo opuesto se encuentra unido a una deslizadera que puede moverse libremente sobre el eje vertical

1) Calcular la velocidad de lanzamiento para que la partícula no se salga del cono.

2) ¿Es posible que lanzando desde el punto anterior, con velocidad horizontal, la partícula pase por el vértice del cono? En caso afirmativo calcular la velocidad necesaria.

2.19. Se lanza una partícula con velocidad v_0 desde una altura *h*, sobre el vértice de un cono de semiángulo cónico 30º. La velocidad es la mitad de la necesaria para mantener la partícula en un plano horizontal ¿Hasta que altura llegará?

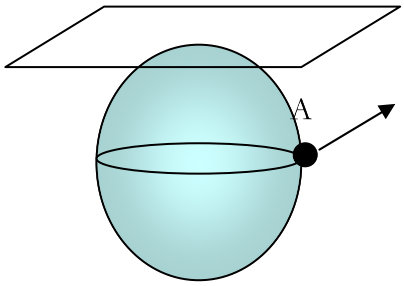




2.20. Se lanza una partícula con velocidad v_0 desde una altura *h*, sobre el vértice de un cono de semiángulo cónico 30º.La velocidad es la doble de la necesaria para mantener la partícula en un plano horizontal. ¿Hasta que altura llegará?

PARABOLOIDES Y ESFERAS

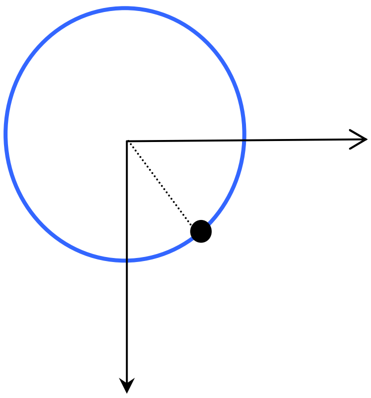
2.21. Un punto material de masa m se mueve sin rozamiento por el interior del paraboloide $r^2 = az$. Se pide:
1) Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2) Suponiendo que el punto se lanza con una velocidad horizontal v_0, determinar dicho valor para que el punto describa una circunferencia horizontal de radio r.
3) En el caso anterior determinar la reacción del paraboloide sobre el punto.
4) Suponiendo que el punto se coloca a una altura $z_0 = a$, con velocidad horizontal $v_0 = \sqrt{8ga}$ hallar la cota más alta que alcanza la trayectoria del punto.



2.22. Un punto material pesado y de masa m, está obligado a moverse sobre una superficie esférica de radio a y con una ligadura bilateral. Además del peso sobre el punto M actúa una fuerza atractiva hacia el plano π (tangente a la esfera en su punto más elevado) proporcional a la distancia, siendo $k = 2mg/a$ la constante de proporcionalidad. En el instante inicial el punto material se sitúa en A, sobre el ecuador de la esfera, y se le comunica una velocidad $v_o = \sqrt{2ga}$ según la tangente al mismo.

Se pide:
1) Plantear las ecuaciones del movimiento.
2) Reducir dichas ecuaciones a integrales.
3) Determinar la reacción de la esfera en función de la posición.
4) Determinar los paralelos entre los que se desarrolle el movimiento.

VARIOS



2.23. Una partícula de 2 kg de masa describe una circunferencia **horizontal** de 1 m de radio con velocidad variable $v=5t$. La circunferencia es un alambre y en él está insertada la partícula.
1) Calcular las fuerzas que actúan sobre la partícula
2) Comprobar que se cumple el teorema del momento cinético

2.24. Una partícula de 3 kg de masa se encuentra sometida a una fuerza en la forma: $\vec{F} = -6x\vec{i} + 9y\vec{j}$. En t=0 se encuentra en el punto de coordenadas (1,1,1)
1) Estudiar si la fuerza es conservativa
2) Calcular el potencial asociado
3) Calcular el vector de posición en todo instante
4) Calcular el vector velocidad en todo instante
5) Comprobar el teorema de las fuerzas vivas

Autor: Dra Laura Abad Toribio

Asignatura: Mecánica Racional y Analítica

Titulación: Grado en Ingeniería Aeroespacial

Curso: 2013-2014