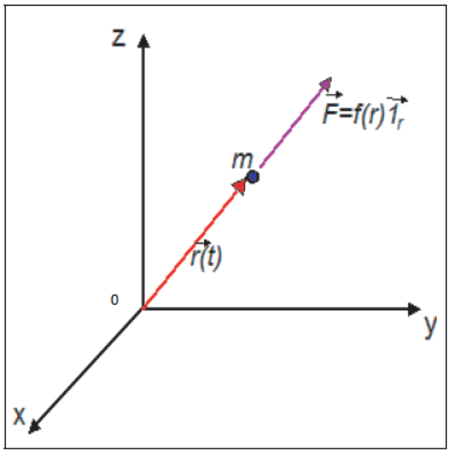
ÓRBITAS: FUERZAS CENTRAES Y MOVIMIENTO PLANETARIO. Primer parte

1. FUERZAS CENTRALES

Supongamos que tenemos una fuerza sobre una partícula de masa *m*, de forma que:

a) siempre (ver dibujo) está dirigida desde *m* hacia O
b) su magnitud depende sólo (salvo constantes) de la distancia *r* desde O.



Matemáticamente una fuerza es central si:

$$\mathbf{F} = F(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido radialmente desde el origen.

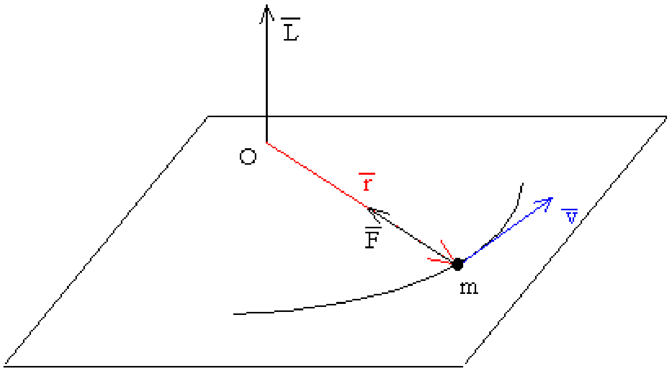
El vector fuerza es siempre paralelo al vector posición. El origen creador de la fuerza se denomina *centro del movimiento*

Propiedades

1) Una fuerza central es siempre una fuerza conservativa. Las fuerzas conservativas no dependen del tiempo y cumplen que su rotacional es nulo y que se pueden expresar como el gradiente de su potencial con el signo cambiado:
$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$$
2) En los campos de fuerzas centrales el momento angular se conserva:
L=constante

Esto es debido a que el momento de fuerzas es nulo ($\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$), ya que el vector fuerza es siempre paralelo al vector posición.

3) Como consecuencia de lo anterior, el cuerpo sometido a la fuerza central se mueve en un plano, la trayectoria de la partícula se llama entonces ÓRBITA.

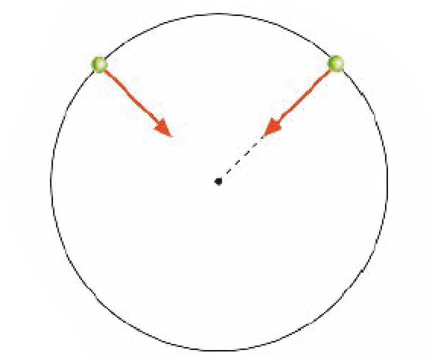


Un cambio en el plano del movimiento implicaría un cambio en la *dirección* del momento angular, lo cual, como hemos visto no es posible

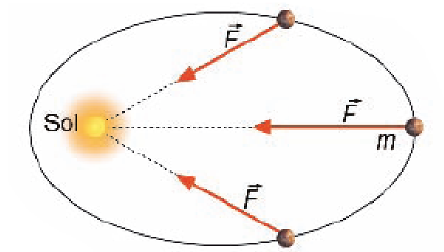
4) Además, si el momento angular es cero, el cuerpo describe un movimiento rectilíneo a través de la recta que lo une con el origen, cuya aceleración no es constante

Ejemplos de fuerzas centrales

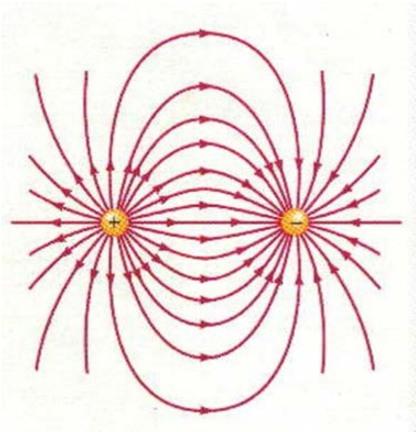
Los casos más familiares de fuerzas centrales son las fuerzas de la gravedad y la electrostática, ambos ejemplos de fuerzas proporcionales a la inversa del cuadrado de la distancia: $F(r) \propto 1/r^2$. Otro ejemplo es el del oscilador armónico, con $F(r) \propto r$ y con signo negativo.



La fuerza centrípeta es una fuerza central.

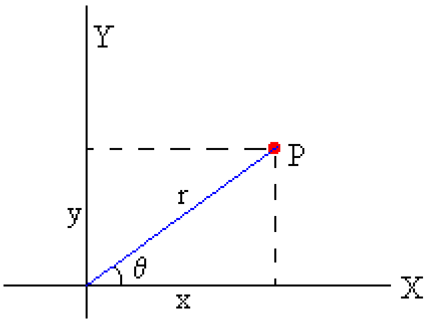


La fuerza que actúa sobre un planeta está dirigida siempre hacia el Sol.



2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Para describir este movimiento usaremos coordenadas polares que son las más apropiadas, ya que, según hemos dicho anteriormente, el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas central tiene lugar en un plano.



Utilizando la definición de fuerza central, y expresando la aceleración en coordenadas polares obtenemos que:

$$\vec{F} = F(r)\,\hat{u}_r$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{u}_r + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\hat{u}_\theta$$

Utilizando la segunda ley de Newton, las ecuaciones del movimiento para una partícula de masa *m* bajo la acción de una fuerza central se expresan entonces en la forma:

$$M(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$$

$$M(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

Siendo *M* la masa de la partícula

Sabemos que estas son ecuaciones diferenciales que una vez integradas nos permiten conocer la posición de la partícula en función del tiempo, es decir, las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$.
De la última ecuación es fácil demostrar que:

$$Mr^2\dot{\theta} = \ell = constante.$$

(ver el problema 1 de la colección de ejercicios).

En primer lugar debemos recalcar que la constancia de *l* no implica que la distancia al origen de coordenadas (*r*) o la velocidad angular sean constantes. Lo que es constante es el producto de ambas cantidades.

Si el campo de fuerza central se conoce, es decir si f(r) está dado, es posible determinar la órbita o trayectoria de la partícula , r(θ) , o bien en su forma paramétrica (r(t), $\theta(t)$.) De la misma forma, dado r(θ) se puede determinar f(r)

3. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La expresión de la energía cinética en coordenadas polares es

$$T = \frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\perp^2\right) = \frac{1}{2}\left(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2\right)$$

Luego, la ecuación que expresa la constancia[2] de la energía del sistema es,

$$E = \frac{1}{2}\left(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2\right) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)$$

Se puede interpretar esta última ecuación como si la partícula se moviera en un *potencial efectivo* $U_{eff} = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$. El término en l^2 se denomina *potencial centrífugo* debido a que al ser derivado respecto de r da origen a la fuerza centrífuga mencionada anteriormente.

La ecuación de la energía nos permite obtener la ley horaria de un movimiento central de energía E y cantidad de movimiento angular *l*. En efecto, despejando la velocidad radial de la ley de conservación obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm\left(\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)\right)^{1/2}$$

reordenando e integrando,

$$\pm\int_{r_0}^{r(t)}\left(\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)\right)^{-1/2} dr' = \int_{t_0}^{t} dt' = t - t_0$$

obtenemos una expresión que permite hallar la ley horaria $r(t)$ para cualquier potencial central. Sólo para algunos potenciales el integral admite una expresión en términos de funciones elementales. El signo a elegir dependerá de las condiciones iniciales que deseamos ajustar. (Según la velocidad radial sea inicialmente entrante o saliente).

Frecuentemente en los movimientos centrales es de interés hallar la *trayectoria* del móvil más que su ley horaria. Un camino posible es eliminar el tiempo en términos del ángulo θ usando para ello la conservación de *l*.

La expresión para la velocidad radial puede descomponerse en

$$dr = \pm\left(\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)\right)^{1/2} dt\ .$$

a) Use la conservación de $l = mr^2\dot{\theta}$ para eliminar el tiempo de la última ecuación en términos de la variable angular θ.

b) Integrando ambos lados de la ecuación obtenida, muestre que la trayectoria puede obtenerse de

$$\theta(r) = \theta_0 \pm l\int_{r_0}^{r}\frac{dr/r^2}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)}}$$

4. FÓRMULA DE BINET

Existe una forma alternativa de obtener la trayectoria del móvil y para algunos campos centrales es mucho más efectiva que la descrita en el apartado anterior. Consideramos la variable *auxiliar* $\frac{1}{r} = u$. Usando la conservación de la cantidad de movimiento angular podemos obtener expresiones para la velocidad y aceleración radiales en términos de u y sus derivadas angulares. En efecto, éstas derivadas son

$$u' = \frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{m}{l}\dot{r}$$

$$u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{m}{l}\dot{r}\right) = -\frac{m}{l}\frac{dt}{d\theta}\frac{d}{dt}\dot{r} = -\frac{m}{l}\frac{1}{\dot{\theta}}\ddot{r} = -\frac{m^2r^2}{l^2}\ddot{r}$$

De estas expresiones obtenemos fácilmente,

$$m\ddot{r} = -\frac{l^2}{m}u^2u''$$

y la ecuación radial se transforma en

$$\boxed{u'' + u + \frac{m}{l^2}\frac{F(u)}{u^2} = 0}$$

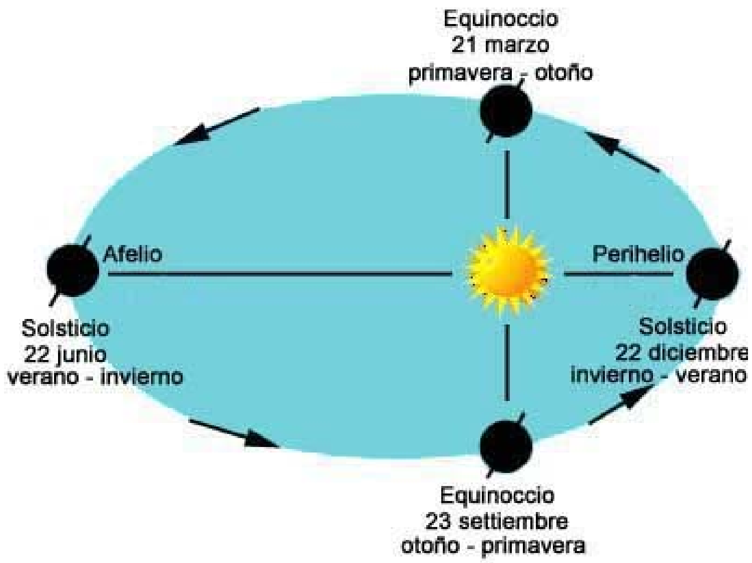
donde la función F esta definida por $F(u) = \mathrm{f}[r(u)] = \mathrm{f}(1/u)$. Esta ecuación es especialmente fácil de resolver para el movimiento Kepleriano (a ser discutido más adelante).

5. ALGUNAS DEFINICIONES

Un sistema solar está formado por una estrella (como nuestro Sol) y objetos llamados planetas que se mueven alrededor de él. La estrella es un cuerpo que emite luz, mientras que los planetas no la emiten pero sí pueden reflejarla. Además hay objetos que se mueven alrededor de los planetas que se llaman satélites.

En nuestro sistema solar, la Luna es un satélite de la Tierra, y la Tierra es uno de los planetas que se mueve alrededor del Sol. Además existen satélites artificiales hechos por el hombre que pueden moverse alrededor de los planetas o de sus lunas.

La trayectoria de un planeta o satélite se llama órbita. La máxima y mínima distancia de un planeta con respecto al Sol en su movimiento alrededor de éste se llama **AFELIO** Y **PERIHELIO**, respectivamente.



La máxima y mínima distancia de un satélite con respecto al planeta alrededor del cual se mueven se llama **APOGEO** Y **PERIGEO**, respectivamente.

Se llama período al tiempo que el cuerpo tarda en completar una vuelta sobre su órbita. A veces se llama período sideral para distinguirlo de otros períodos, como el movimiento de la Tierra alrededor de su eje.

El Año luz o año-luz es una unidad de longitud empleada en astronomía para medir grandes distancias. Es igual a la distancia recorrida por la luz en un año solar medio, o más específicamente, la distancia que recorrería un fotón en el vacío a una distancia infinita de cualquier campo gravitacional o campo magnético, en un año Juliano (365.25 días de 86400 segundos).

El año luz no es una unidad de tiempo, sino de distancia. La luz tarda 8 minutos en viajar desde el Sol hasta la Tierra. Nuestra galaxia, la Vía Láctea, tiene 100 000 años luz de diámetro.

Tomando para la velocidad de la luz un valor de 300.000 km/s, un año luz equivale en

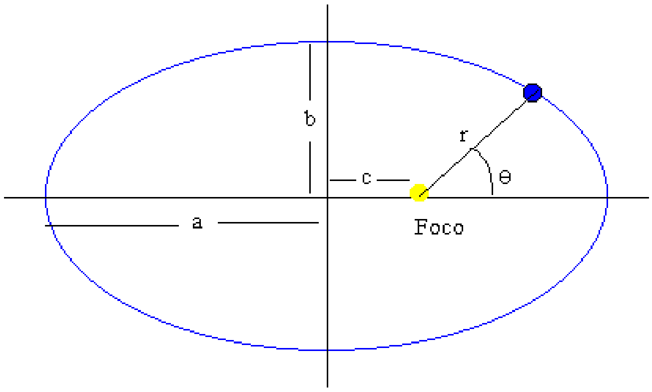
números redondos a 9.461.000.000.000 km, o bien a 63.240 Unidades Astronómicas (UA), o también a 0,3066 parsecs.

Ningún objeto material puede viajar más rápido que la luz.

6. LEYES DE KEPLER DEL MOVIMIENTO PLANETARIO

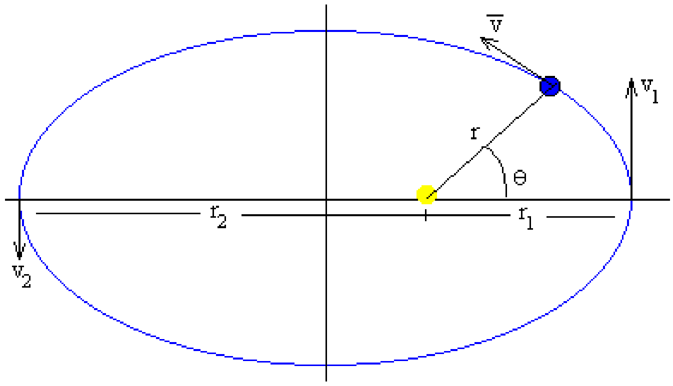
Antes de que Newton enunciará sus famosas leyes del movimiento, Kepler, usando datos recogidos por Tycho Brahe, formuló tres leyes relativas al movimiento de lo planetas alrededor del Sol

1) Cada planeta se mueve en una órbita elíptica con el Sol en uno de los focos (1609)



- Semieje mayor $a=(r_2+r_1)/2$
- Semieje menor b
- Semidistancia focal c
- La relación entre los semiejes es $a^2=b^2+c^2$
- La excentricidad se define como el cociente $\varepsilon=c/a=(r_2-r_1)/(r_2+r_1)$

1) El radio vector desde el Sol a cualquier planeta barre áreas iguales en tiempos iguales



La ley de las áreas es equivalente a la constancia del momento angular, es decir, cuando el planeta está más alejado del Sol (afelio) su velocidad es menor que cuando está más cercano al Sol (perihelio). En el afelio y en el perihelio, el momento angular L es el producto de la masa del planeta, su velocidad y su distancia al centro del Sol.

$$L = m \cdot r_1 \cdot v_1 = m \cdot r_2 \cdot v_2$$

2) Los cuadrados de los períodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas (1618)

$$\frac{T^2}{L^3} = K = \text{constante}$$

7. LEYES DE NEWTON DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL

Usando las leyes de Kepler, Newton pudo deducir la ley de Gravitación universal entre el Sol y los planetas, aunque luego la postuló como válida para todo el universo.

La fuerza gravitacional crea la aceleración centrípeta necesaria para el movimiento circular:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Al reemplazar la velocidad *v* por $\left(\frac{2\pi r}{T}\right)$(el tiempo de una órbita completa) obtenemos

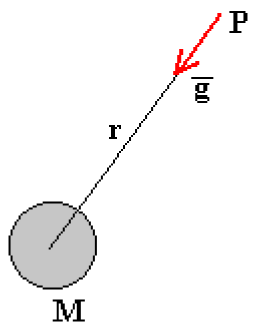
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

Donde, T es el periodo orbital, r el semieje mayor de la órbita, M es la masa del cuerpo central y G una constante denominada Constante de gravitación universal cuyo valor marca la intensidad de la interacción gravitatoria y el sistema de unidades a utilizar para las otras variables de esta expresión.

a interacción entre dos cuerpos de masa M y m se describe en término de una fuerza atractiva, cuya dirección es la recta que pasa por el centro de los dos cuerpos y cuyo módulo viene dado por la expresión

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

G es la constante de la gravitación universal G=6.67·10^{-11} Nm^2/kg^2, y r es la distancia entre los centros de los cuerpos

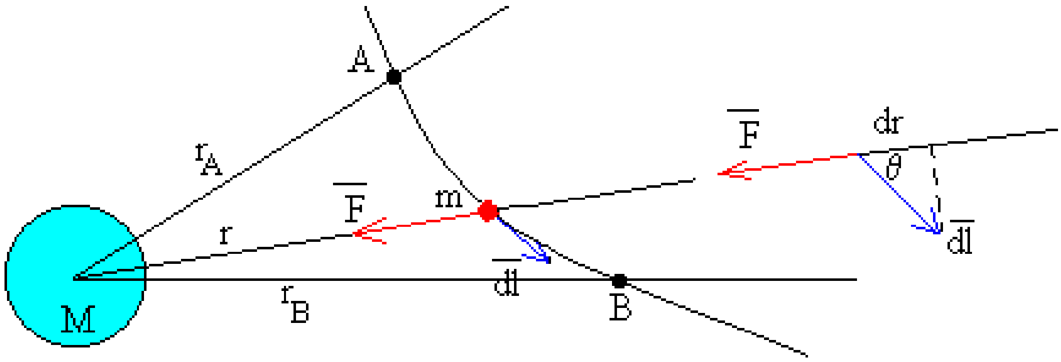


Aceleración de la gravedad

Se denomina intensidad del campo gravitatorio, o aceleración de la gravedad **g** en un punto P distante *r* del centro del planeta de masa *M*, a la fuerza sobre la unidad de masa situada en el punto P.

$$g = \frac{F}{m} = G\frac{M}{r^2}$$

Supongamos que una partícula de masa *m* se mueve desde la posición A hasta la posición B en las proximidades de un cuerpo fijo de masa *M*.



Vamos a calcular el trabajo realizado por la fuerza de atracción **F**.

$$\mathbf{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

El trabajo infinitesimal es el producto escalar del vector fuerza **F** por el vector desplazamiento **dl**, tangente a la trayectoria.

$dW = \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = F\cdot dl\cdot\cos(180-\theta) = -F\cdot dl\cdot\cos\theta = -F\cdot dr$.

donde *dr* es el desplazamiento infinitesimal de la partícula en la dirección radial.

Para calcular el trabajo total, integramos entre la posición inicial A, distante r_A del centro de fuerzas y la posición final B, distante r_B del centro fijo de fuerzas.

$$W = \int_A^B -G\frac{Mm}{r^2}dr = G\frac{Mm}{r_B} - G\frac{Mm}{r_A} = \left(-G\frac{Mm}{r_A}\right) - \left(-G\frac{Mm}{r_B}\right)$$

El trabajo *W* no depende del camino seguido por la partícula para ir desde la posición A a la posición B. La fuerza de atracción **F**, que ejerce el cuerpo fijo de masa **M** sobre la partícula de masa *m* es conservativa. La fórmula de la energía potencial es

$$E_p = -G\frac{Mm}{r}$$

El nivel cero de energía potencial se ha establecido en el infinito, para $r=\infty$, $E_p=0$

El hecho de que la fuerza de atracción sea conservativa, implica que la energía total (cinética más potencial) de la partícula es constante, en cualquier punto de la trayectoria.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \text{cte}$$

Autor: Dra Laura Abad Toribio

Asignatura: Mecánica Racional y Analítica

Titulación: Grado en Ingeniería Aeroespacial