Mecánica Racional y Analítica (GAE)

Tema 2: Dinámica de la partícula

INTRODUCCIÓN

Dinámica: Parte de la mecánica que estudia las leyes que determinan el movimiento de los cuerpos. Sus objetivos son dos: **encontrar las causas que lo provocan y predecir su evolución**. En este capítulo nos centraremos en la dinámica clásica o newtoniana, válida para objetos macroscópicos que se mueven a velocidades mucho menores que la de la luz en el vacío (c = 299792458 m/s).

INTERACCIONES

El movimiento de un sistema se ve influido por la presencia de otros, y viceversa. Esta influencia mutua se conoce como *interacción.* En la vida diaria se observan multitud de interacciones fricción, peso, viscosidad, tensiones...

SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIALES

El movimiento de una partícula parece distinto según se observe desde un SR u otro.

Definimos un tipo especial de SR, que llamaremos *Sistema de Referencia Inercial* (*SRI*) como aquel en el cual todas las partículas libres se mueven con velocidad constante (que en particular puede ser nula) o lo que es lo mismo, con aceleración nula. En un SRI las partículas libres o están en reposo o se mueven en línea recta con $\vec{v}$ constante. La tendencia de las partículas a moverse con $\vec{v}$ constante en los SRI se conoce como *principio de inercia* (resistencia al cambio).

- Si S es un SRI y S' otro SR, cuyo origen se mueve con velocidad uniforme $\vec{V}$ y cuyos ejes no giran respecto a S, entonces S' también es inercial.
- Si $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula libre observada desde S, la velocidad $\vec{v}\,'$ observada desde S' es: $\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V} = \text{constante}$
- Por tanto existen infinitos SRI, cuyos orígenes se mueven con velocidad relativa constante y que no giran unos respecto a otros (de modo que en dos SRI S y S' las aceleraciones $\vec{a}$ y $\vec{a}\,'$ de una partícula son iguales).
- Supongamos que desde un SRI observamos dos partículas que interaccionan entre sí, pero están aisladas del resto del Universo. Como ya no son libres, sus velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ no serán constantes. Experimentalmente se observa que asociada a cada partícula existe una propiedad escalar llamada *masa inercial m*, positiva, tal que la siguiente expresión permanece constante en un SRI: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{constante}$

MOMENTO LINEAL (CANTIDAD DE MOVIMIENTO)

Se define el *momento lineal* (o cantidad de movimiento) de una partícula como el producto de su masa por su velocidad: $\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$ Como $m > 0$, $\vec{p}$ es un vector que tiene la misma dirección y sentido que la velocidad y su módulo es m veces mayor. En el S.I. el momento se mide en

$\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$. Se puede expresar ahora la ley de inercia diciendo que una *partícula libre se mueve siempre con momento constante.*

- En forma general este principio se puede enunciar diciendo que el momento total de un sistema aislado de partículas es constante $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + ... = \text{constante}$.
- Suponiendo que la masa es constante, podemos expresar el cambio en el momento de una partícula en un tiempo Δt como: $\Delta\vec{p} = \Delta(m\vec{v}) = m\Delta\vec{v}$. Para dos partículas: $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$

FUERZA

Se llama *fuerza neta* que actúa sobre una partícula al cambio respecto al tiempo del momento de una partícula: $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$

Si la partícula es libre , $\vec{p} = cte$ y $\vec{F} = \vec{0}$.

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ donde $\vec{F}_{12}$ es la fuerza sobre la partícula 1 debido a su interacción con la partícula 2 y $\vec{F}_{21}$ es la fuerza sobre la partícula 2 debido a su interacción con la partícula 1.

$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$. La gran mayoría de los sistemas tienen masa constante con lo que el primer término del sumatorio sería nulo. Sin embargo en ciertos casos la masa varía con el tiempo

- **Ejemplo:** El caso más simple es el ejemplo de la gota de agua, mientras cae la humedad puede condensarse en su superficie o el agua puede evaporarse resultando un cambio en la masa. Otro ejemplo sería el movimiento de un cohete.

Si *m* es constante: $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$. Como $m > 0$, la fuerza tiene la misma dirección y sentido que la aceleración y el módulo es m veces mayor.

Observa entonces que la conocida expresión $\vec{F} = m\vec{a}$ no siempre es válida

- Si $\vec{F}$ es constante $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ es también constante y el movimiento es uniformemente acelerado.

Si la partícula m interactúa con las partículas m_1, m_2, m_3..., cada una produce un cambio en el momento de m que es caracterizado por las fuerzas respectivas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$,... El cambio total del momento de la partícula m es: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}$. Esta fuerza recibe el nombre de ***resultante*** aplicada sobre *m*.

En el S.I: la fuerza se mide en N ($m \cdot kg \cdot s^{-2}$). En el sistema cgs la unidad de fuerza es la DINA, 1N=10^5 dinas.

LEYES DE NEWTON

Los principios que hemos ido introduciendo se resumen en las llamadas *leyes de Newton*:

- *Primera ley:* Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento uniforme rectilíneo en tanto no actúe sobre él una fuerza que le obligue a cambiar de estado.

- *Segunda ley*: La variación de la cantidad de movimiento es proporcional a la fuerza motriz aplicada y ocurre en la dirección en que se aplica la fuerza.

- *Tercera ley*: Para cada acción existe siempre una reacción igual y dirigida en sentido contrario, es decir, las acciones mutuas entre dos cuerpos son siempre iguales y dirigidas en sentidos contrarios.

PESO

En la Tierra los objetos caen debido a la atracción gravitatoria. Como la Tierra es prácticamente esférica, la fuerza que ejerce sobre cualquier partícula está dirigida hacia su centro, y su módulo depende de la distancia al mismo.

Llamando M a la masa de la Tierra, R a su radio y $\hat{n}$ a un vector unitario normal a la superficie terrestre y dirigido hacia fuera, la fuerza sobre m será:

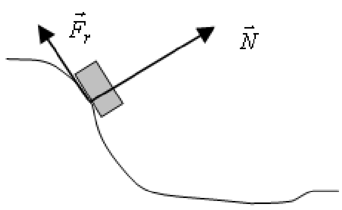
$$\vec{F} \approx m \cdot \left(-\frac{GM}{R^2} \right) \cdot \hat{n} \equiv m\vec{g}$$

donde $\vec{g}$ es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre. (g =9.8 ms^{-2}).

A la fuerza $m\vec{g}$ se le llama *peso* de la partícula. Por "g" solemos denotar el valor medio, g cambia con la latitud y con la altura.

FUERZAS DE CONTACTO. COEFICIENTE ESTÁTICO Y CINÉTICO.

Cuando las superficies de dos sólidos están en contacto (como el caso de un bloque o un libro apoyado en una mesa) aparece una fuerza que dificulta su deslizamiento relativo: es la llamada *fuerza de contacto.*



Es práctico separar esta fuerza en sus componentes tangencial y normal a la superficie de contacto. La primera se llama fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$ y la segunda se conoce como fuerza normal $\vec{N}$.

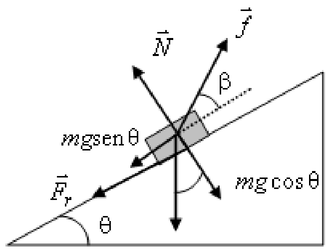
Esta fuerza de rozamiento se llama fricción por deslizamiento y se debe a la interacción entre las moléculas de los dos cuerpos, llamada de *cohesión* si los dos cuerpos son del mismo material y de *adhesión* si los dos cuerpos son de diferente material.

Es proporcional a la normal de presión de un cuerpo sobre otro. La constante de proporcionalidad, μ, se llama coeficiente de fricción o rozamiento (adimensional). $\boxed{\vec{F}_r = -\mu N \cdot \vec{u}_T}$ siendo $\vec{u}_T = \vec{v} / v$ el vector unitario en la dirección del movimiento.

Existen dos tipos de coeficientes de fricción, el *estático* μ_e tal que al multiplicarle por la normal, nos da la fuerza mínima necesaria para poner en movimiento relativo dos cuerpos que están inicialmente en reposo, y el cinético μ_c , tal que al multiplicarse por la fuerza normal nos da la fuerza necesaria para mantener dos cuerpos en movimiento uniforme relativo.

$\mu_e > \mu_c$.

- **Ejemplo:** Plano inclinado con rozamiento. Hacemos que un bloque de masa *m* ascienda por el plano inclinado (y no se separe del mismo) aplicando una fuerza $\vec{f}$ formando un ángulo β con la dirección paralela al plano. Queremos calcular la aceleración del bloque



Al igual que antes: $\sum F_x = ma$, $\sum F_y = 0$

Ecuación de movimiento: $f\cos\beta - mg\,\mathrm{sen}\theta - F_r = ma$

En la dirección perpendicular al plano: $N + f\,\mathrm{sen}\beta - mg\cos\theta = 0$.

Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano cuando el bloque asciende por el plano es μ $\Rightarrow \quad F_r = \mu N = \mu(mg\cos\theta - f\,\mathrm{sen}\beta)$

$$f\cos\beta - mg\,\mathrm{sen}\theta - \mu(mg\cos\theta - f\,\mathrm{sen}\beta) = ma$$

La aceleración del bloque será: $a = \dfrac{f\cos\beta - mg\,\mathrm{sen}\theta - \mu(mg\cos\theta - f\,\mathrm{sen}\beta)}{m}$

Un error muy frecuente es igualar a la normal a la proyección del peso en esa misma dirección. Acabamos de ver que esto no es así en muchos problemas. .

FUERZAS SOBRE SÓLIDOS EN FLUIDOS

Cuando un sólido se mueve en el seno de un fluido experimenta fuerzas debido a interacciones electromagnéticas (choques) con las partículas del mismo. Comentamos dos de ellas, el empuje y la viscosidad.

El *empuje* es una fuerza opuesta al peso del sólido y cuyo módulo es igual al peso del fluido desalojado . Si la densidad del fluido es ρ y el volumen del fluido *V*, su módulo es ρVg . Se suele designar con $\vec{E}$.

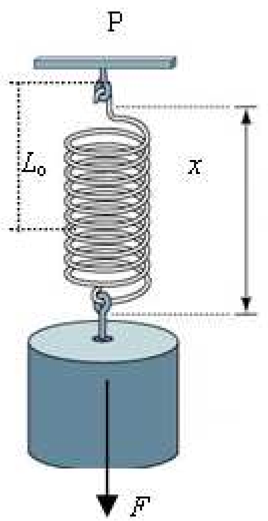
El *rozamiento viscoso* se opone al movimiento del sólido en el fluido y depende de la velocidad relativa respecto del mismo. Se caracteriza por un parámetro asociado a cada fluido llamado *viscosidad* η ($kgm^{-1}s^{-1}$)

La fuerza de fricción puede obtenerse suponiendo que es proporcional a la velocidad y opuesta a ella: $\vec{F}_r = -\kappa\eta v \cdot \vec{u}_T$, donde el coeficiente κ depende de la forma del cuerpo.

Si el cuerpo se desplaza en un fluido viscoso bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$, la ecuación de movimiento resultante es: $F - \kappa\eta v = ma$

Suponiendo una fuerza constante la aceleración produce un aumento en *v* y por tanto en la fuerza de fricción. Cuando $F = \kappa\eta v \Rightarrow a = 0$ la partícula continúa moviéndose en la dirección de la fuerza con una velocidad constante denominada *velocidad límite o terminal*.

FUERZAS ELÁSTICAS

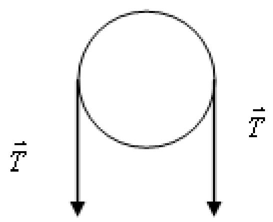


Ley de Hooke: Si sobre un muelle no actúa ninguna fuerza éste tiene una longitud natural L_0. Al aplicar una fuerza el muelle se resiste a ser deformado debido a la interacción electromagnética entre las partículas que lo constituyen. La fuerza necesaria para modificar su longitud natural una cantidad x se llama *elongación*, es opuesta a ésta y proporcional a ella, $F = -kx$, siendo k la constante elástica del muelle.

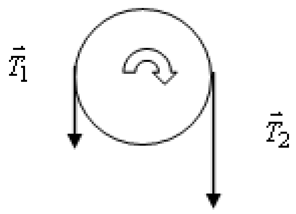
- **Ejemplo:** El muelle, movimiento armónico simple (lo veremos con mucho detalle en el tema siguiente de oscilaciones correspondiente a este curso de Mecánica Racional y Analítica

CUERDAS Y POLEAS

Polea: Dispositivo mecánico de tracción o elevación, formado por una rueda montada en un eje, con una cuerda que rodea la circunferencia de la rueda. Tanto la polea como la rueda y el eje pueden considerarse máquinas simples que constituyen casos especiales de la palanca.



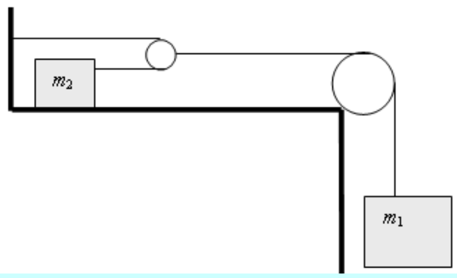
Suponiendo que la cuerda es inextensible y de masa despreciable aparece una fuerza denominada tensión $\vec{T}$.

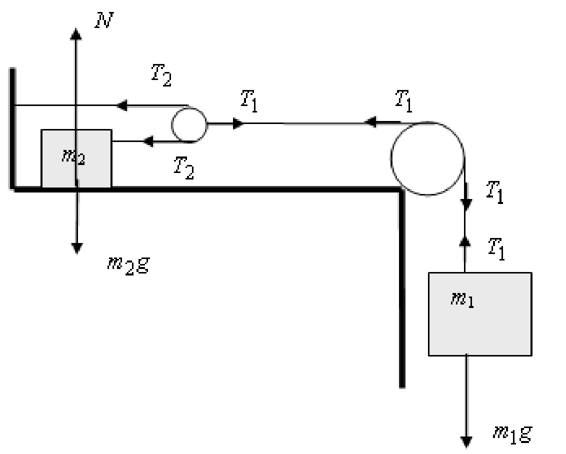


Si la polea tiene rotación las tensiones son diferentes y además de realizar el sumatorio de fuerzas tendremos que calcular los momentos sobre el eje de la polea.

Un caso especial lo constituyen los denominados tambores rugosos, cuando existe rozamiento entre la cuerda y la polea. En este caso, la ecuación que relaciona las tensiones viene dada por la relación: $T_2 = T_1 e^{\beta\mu}$. Recordamos que μ es el coeficiente entre las cuerdas sobre la polea.

• **Ejemplo:** En el sistema de la figura calcular las tensiones y aceleraciones. Las poleas no giran y no hay rozamiento entre la cuerda y la polea.





En la polea pequeña, al estar en equilibrio, se cumple la ecuación: $2T_2 - T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = 2T_2$

Para el bloque de masa m_2: $T_2 = m_2 a_2$

Para el bloque de masa m_1: $m_1 g - T_1 = m_1 a_1$

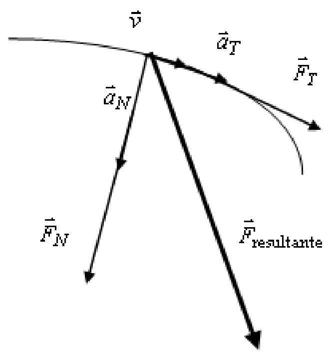
$$a_2 = 2a_1$$

$$m_1 g - 2T_2 = m_1 a_1 \Rightarrow m_1 g - 2m_2 a_2 = m_1 a_1$$

$$\Rightarrow m_1 g - 2m_2 2a_1 = m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{m_1 g}{m_1 + 4m_2}$$

$$a_2 = \frac{2m_1 g}{m_1 + 4m_2} ;\ T_2 = m_2 \frac{2m_1 g}{m_1 + 4m_2} ;\ T_1 = m_2 \frac{4m_1 g}{m_1 + 4m_2}$$

MOVIMIENTO CURVILÍNEO



Si la fuerza tiene la misma dirección que la velocidad el movimiento es en línea recta. Para producir un movimiento curvilíneo la fuerza resultante debe formar un ángulo con respecto a la velocidad que proporciona el cambio en la dirección del movimiento.

En una curva plana: $\vec{F} = F_T \vec{u}_T + F_N \vec{u}_N$

$F_T = ma_T = m\dfrac{dv}{dt}$ es la fuerza tangencial, responsable del cambio en la magnitud de la velocidad.

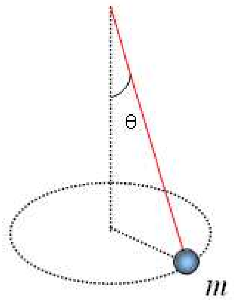
$F_N = ma_N = m\dfrac{v^2}{\rho}$ es la fuerza normal responsable del cambio en la dirección de la velocidad, ρ es el denominado radio de curvatura (recuerda el tema anterior cuando veíamos las componentes intrínsecas de la aceleración)
.

Si $F_T = 0$ no hay aceleración tangencial y el movimiento es uniforme.

Si $F_N = 0$ no hay aceleración normal y el movimiento es rectilíneo.

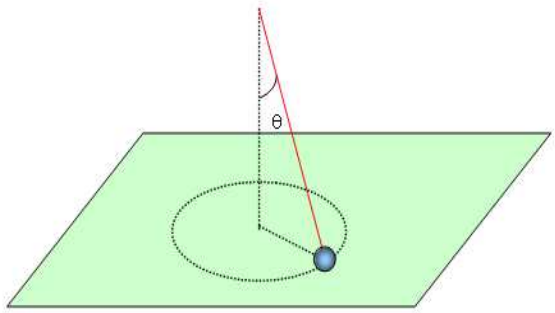
¿Cuánto valdría el radio de curvatura en un movimiento rectilíneo?

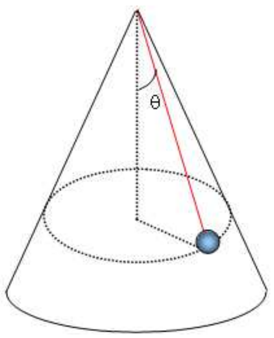
A continuación mostramos algunos ejemplos, para que compruebes la solución, en movimientos de este tipo:



: Movimiento en un círculo horizontal: Péndulo cónico. Una partícula de masa m suspendida de una cuerda de longitud L gira alrededor de la vertical con velocidad angular ω. La partícula describe un círculo de radio $R = L\,\mathrm{sen}\,\theta$ y la cuerda engendra la superficie de un cono. El movimiento tiene lugar en el aire y no se considera ningún tipo de rozamiento. Demuestra que el período de oscilación viene dado por la ecuación $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta}{g}}$

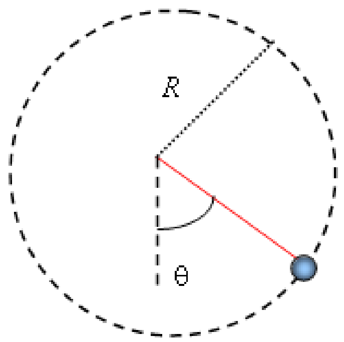
: Péndulo cónico sobre superficie horizontal: La partícula de masa m suspendida de una cuerda se apoya ahora sobre una superficie horizontal sin rozamiento y gira alrededor de la vertical con velocidad angular ω. La partícula describe un círculo de radio $R = L\,\mathrm{sen}\,\theta$ y la cuerda engendra la superficie de un cono. ¿Se modificaría la tensión de la cuerda respecto del problema anterior?





: Péndulo cónico sobre superficie cónica, ¿Cómo se modificarían las ecuaciones de movimiento respecto a los dos casos anteriores? ¿Seguiría la partícula describiendo una circunferencia horizontal sobre el cono si existiese ahora además aceleración binormal?

👁 Está claro que para mantener siempre el movimiento de una partícula en trayectoria horizontal habría que imponer que el sumatorio de las fuerzas verticales fuese nulo.



✍**:** Movimiento en un círculo vertical ¿Es un movimiento circular uniforme o no uniforme? ¿por qué? Demuestra además que la tensión en el punto más alto viene dada por $T = m\left(-g + \frac{v^2}{R}\right)$ y en el punto más bajo por $T = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right)$

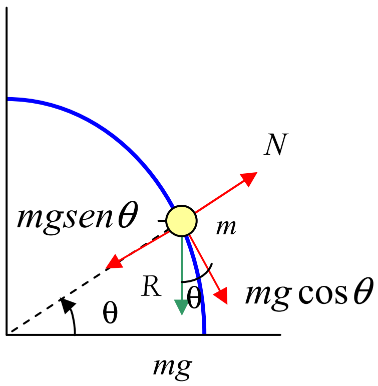
COMENTARIOS SOBRE LA REACCIÓN NORMAL

Nos podemos encontrar dos situaciones distintas en un problema de dinámica de la partícula

- **Caso 1:** Una partícula moviéndose sobre una superficie fija. En este caso aparece sólo una reacción normal, perpendicular a la superficie de contacto
- **Caso 2:** ¿Qué ocurriría si la superficie a su vez estuviese girando? Que tendríamos que considerar otro término más en la reacción normal, debido justamente a la aceleración de Coriolis (recuerda el tema anterior de cinemática de la partícula)

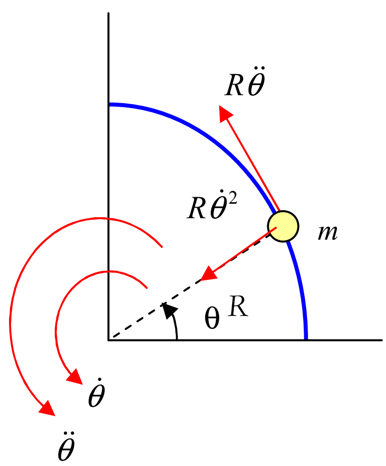
Vamos a ver un ejemplo.

Caso 1: Una partícula de masa *m* se mueve (insertada) sobre medio aro fijo. Dibujamos las fuerzas existentes. Dibujamos las aceleraciones y aplicamos las leyes de Newton.



Dibujamos las fuerzas y proyectamos el peso en la dirección tangente al aro y en la dirección normal al aro.

Dibujamos las aceleraciones. Como el aro no gira no tenemos aceleración de arrastre ni aceleración de Coriolis. Sólo existe la aceleración relativa que tendría dos términos en el caso más general en el que supongamos que además la velocidad lineal no es constante (aceleración relativa tangente y aceleración relativa normal).



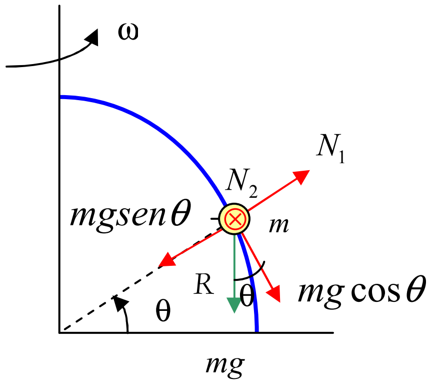
En la dirección tangente al aro: $-mg\cos\theta = mR\ddot{\theta}$

En la dirección normal al aro:

$$-N + mgsen\theta = mR\dot{\theta}^2$$

Observar que se toma como sentido positivo el de las aceleraciones

Caso 2: Una partícula de masa *m* se mueve (insertada) sobre medio aro que a su vez se mueve en torno a un eje vertical con velocidad angular ω constante en el sentido indicado en la figura. Dibujamos las fuerzas existentes. Dibujamos las aceleraciones y aplicamos las leyes de Newton.

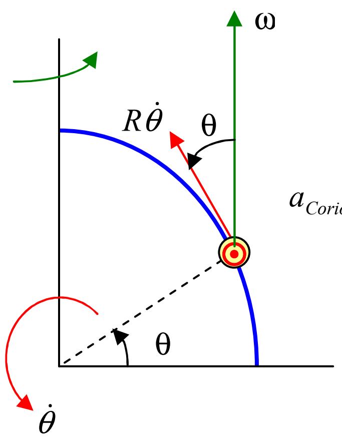


Dibujamos las fuerzas y proyectamos el peso en la dirección tangente al aro y en la dirección normal al aro. Ahora nos aparece otra reacción normal N_2 (perpendicular al plano) debida a la rotación con ω

Dibujamos las aceleraciones. Como el aro gira tenemos aceleración de arrastre y aceleración de Coriolis, además de la aceleración relativa que tendría dos términos en el caso más general en el que supongamos que además la velocidad lineal no es constante. Al ser ω constante la aceleración de arrastre sería sólo normal. Además tenemos que incluir la aceleración de Coriolis.

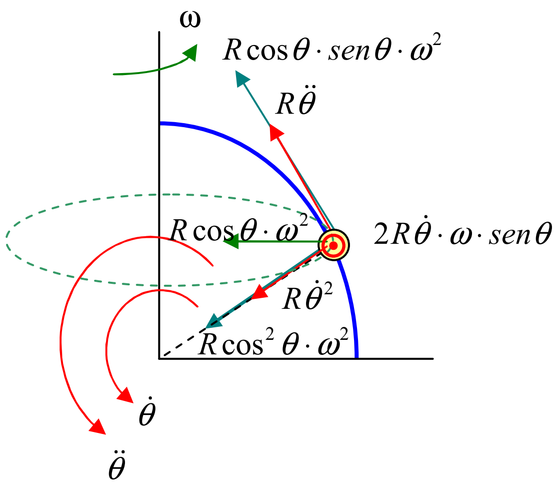
La aceleración de Coriolis se calcula con $R\dot{\theta}$ la velocidad relativa y con ω como velocidad angular de arrastre (ver el tema de cinemática de la partícula)

$a_{Coriolis} = 2 \cdot R\dot{\theta} \cdot \omega \cdot sen\theta$



$$a_{Coriolis} = 2 \cdot R\dot{\theta} \cdot \omega \cdot sen\theta$$

Dibujando entonces todas las aceleraciones:



En el dibujo anterior además hemos proyectado la aceleración normal de arrastre $R\cos\theta\cdot\omega^2$ en la dirección tangente al aro y normal al aro.

En la dirección tangente al aro: $m\left(R\ddot{\theta}+R\cos\theta\cdot sen\theta\cdot\omega^2\right)=-mg\cos\theta$

En la dirección normal al aro: $m(R\dot{\theta}^2+R\cos^2\theta\cdot\omega^2)=-N_1+mgsen\theta$

En la otra dirección perpendicular al plano: $m\left(2R\dot{\theta}\cdot\omega\cdot sen\theta\right)=N_2$

Observar que se toma como sentido positivo el de las aceleraciones

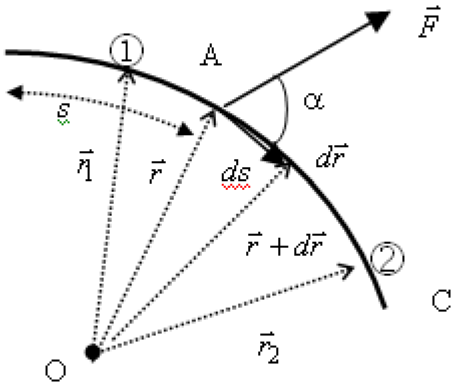
Observar que si el aro no girase la aceleración de Coriolis sería nula y por tanto lo sería N_2.

Podemos definir un vector reacción normal cuyo módulo sería $N=\sqrt{N_1^{\ 2}+N_2^{\ 2}}$.

Puedes plantear el mismo ejemplo anterior cuando la ω no fuese constante ¿en qué se modificarían las ecuaciones?

TRABAJO

El trabajo diferencial dW realizado por una fuerza $\vec{F}$ a medida que su punto de aplicación experimenta el desplazamiento $d\vec{r}$ se define como: $dW=\vec{F}\cdot d\vec{r}$.



El trabajo realizado por $\vec{F}$ a medida que el punto A se mueve de la posición ① a ② se obtiene al integrar la ecuación anterior a lo largo de la trayectoria:

$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 F\cdot dr\cdot\cos\alpha$$

Si $\vec{F}$ se divide en sus componentes normales $(F\cdot \operatorname{sen}\alpha)$ y tangenciales $(F\cdot\cos\alpha)$ a la trayectoria, se observa que la componente normal no realiza trabajo: $W = \int_1^2 F_T\cdot ds$

Si $\vec{F}$ es constante en magnitud y dirección : $W = \vec{F}\cdot\int_1^2 d\vec{r} = \vec{F}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

En el SI el trabajo se mide en Julios (J).

- **Ejemplo:** Trabajo de la fuerza de gravedad $\vec{F} = m\vec{g}$.

Al ser una fuerza constante y eligiendo el eje Z como el vertical , $\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$, $\vec{r}_B = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}$,

$$W = -mg\vec{k}\cdot\{(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}\} = -mg\cdot(z_B - z_A)$$

PRINCIPIO DE TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

Definimos el escalar $E_c = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$ como la *energía cinética* de la partícula

Ten en cuenta que el único movimiento posible de la partícula es la traslación, cuando veamos sólido rígido, tendremos que considerar otro término más en esta energía cinética debido a la rotación del sólido, no así en este tema de dinámica de la partícula.

Teorema de las fuerzas vivas: El trabajo efectuado sobre una partícula es igual al cambio producido en su energía cinética:

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \frac{d(m\vec{v})}{dt}\cdot d\vec{r} = m\int_1^2 \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\int_1^2 d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = m\int_1^2 d\vec{v}\cdot\vec{v}$$

Nos fijamos en el integrando: $d\vec{v}\cdot\vec{v}$; para ello calculamos este diferencial

$d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = d\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot d\vec{v} = 2\vec{v}\cdot d\vec{v} \Rightarrow \vec{v}\cdot d\vec{v} = \dfrac{d(v^2)}{2}$, por la definición y propiedades del producto escalar. Sustituyendo en la integral:

$$W = m\int_1^2 \frac{d\left(v^2\right)}{2} = \frac{m}{2}\cdot v^2\Big|_1^2 = \frac{m}{2}\cdot\left(v_2^2 - v_1^2\right) \Rightarrow W = Ec_2 - Ec_1$$

FUERZAS CONSERVATIVAS Y ENERGÍA POTENCIAL

Una *fuerza es conservativa* si cumple estas propiedades:

1) El trabajo para trasladar a una partícula entre dos puntos aplicando esta fuerza sólo depende de las posiciones inicial y final, o lo que es lo mismo $\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$ es independiente del camino

2) El trabajo debido a esta fuerza para desplazar a una partícula en una trayectoria cerrada es nulo o lo que es lo mismo $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

3) Si $\vec{F}$ es conservativa existe una función (energía potencial) tal que: $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ (la fuerza es el gradiente negativo del potencial)

4) Una fuerza conservativa tiene rotacional nulo:, $\vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \vec{0}$

Definimos la *energía potencial* como la capacidad que tiene una fuerza conservativa para realizar trabajo.

El principio de conservación de energía expresa que la energía total (la suma de todas las formas de energía) permanece constante en un sistema aislado.

Restringiendo nuestra atención a la energía mecánica definida como la suma de las energías potencial y cinética, se enuncia el *principio de conservación de la energía mecánica: Si todas las fuerzas que actúan en una partícula, cuerpo o sistema cerrado son conservativas, la energía mecánica se conserva.*

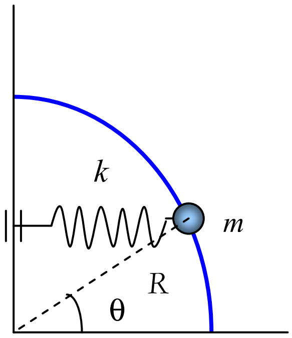
$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 -\vec{\nabla}V\cdot d\vec{r} = -\int_1^2 dV = -\left(V_2 - V_1\right)$; $\boxed{W = V_1 - V_2}$, por tanto el trabajo es igual a menos la variación de la energía potencial.

Teniendo en cuenta el teorema de las fuerzas vivas: $Ec_2 - Ec_1 = V_1 - V_2 \Rightarrow Ec_1 + V_1 = Ec_2 + V_2$

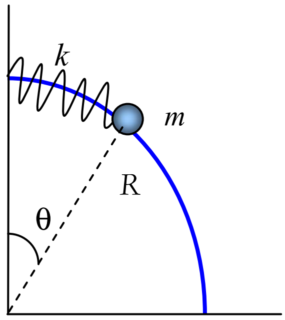
Llamando $E = E_c + V$ a la energía mecánica total: $\boxed{\Delta E = 0}$, ecuación que constituye el *principio de conservación de la energía mecánica. (para fuerzas conservativas)*

Si $E = \text{constante} \Rightarrow \dfrac{dE}{dt} = 0$

Es muy importante a la hora de resolver los problemas de mecánica tener en cuentan que el potencial pudiera ser no sólo el gravitatorio, si hubiese muelles deberíamos incluir la energía potencial elástica del muelle y si hubiese otro tipo de fuerzas conservativas habría que incluir también la energía potencial asociada a estas fuerzas.



- **Ejemplo:** Energía potencial elástica asociada al muelle de constante k de la figura. La partícula se encuentra sobre un aro de radio R. Lo que se ha estirado el muelle es $R\cos\theta$, por tanto la energía potencial sería $\frac{1}{2}\cdot k\cdot(R\cos\theta)^2$



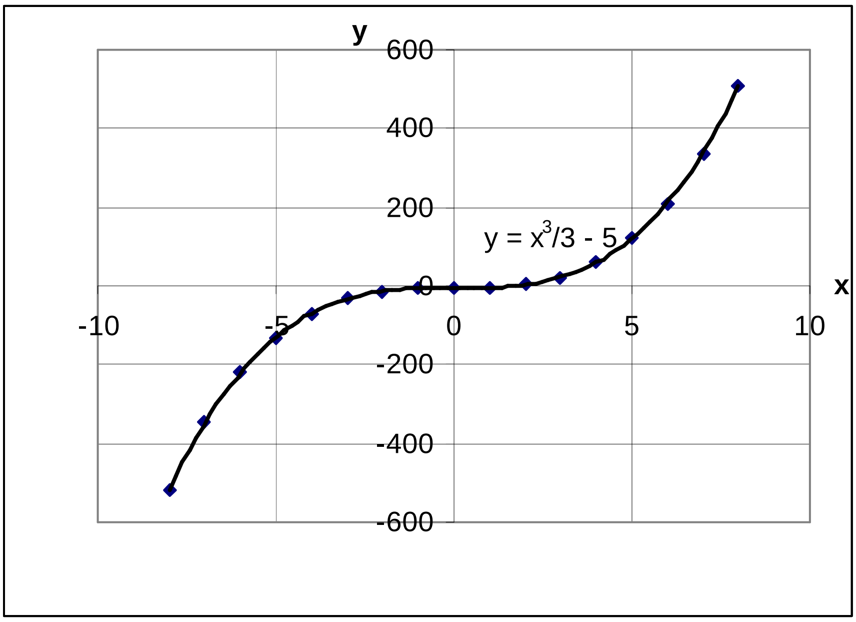
- **Ejemplo:** Energía potencial elástica asociada al muelle de constante k de la figura. La partícula se encuentra sobre un aro de radio R. Lo que se ha estirado el muelle ahora es $R\theta$, por tanto la energía potencial sería $\frac{1}{2}\cdot k\cdot(R\theta)^2$

- **Ejemplo:** Energía potencial gravitacional.

Como $\vec{F}=-\vec{\nabla}V \Rightarrow \frac{GmM}{r^2}\vec{u}_r=-\frac{\partial V}{\partial r}\Rightarrow V=-\int\frac{GmM}{r^2}\cdot dr \Rightarrow V=\frac{GmM}{R}+C$, siendo C una constante arbitraria. Esta energía la veremos con detalle en el tema de Órbitas correspondiente a este curso de Mecánica.

- **Ejemplo:** Una partícula de masa m se mueve sobre la curva (vertical) de la figura donde además del peso sobre la partícula se aplica una fuerza igual a $\vec{F}=2\vec{i}-\vec{j}$. Además del potencial gravitatorio tendríamos que añadir la energía potencial asociada a esta fuerza, ya que es conservativa.

Como $\vec{F}=-\vec{\nabla}V \Rightarrow 2\vec{i}-\vec{j}=-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}\Rightarrow V=-2x+y$



ENERGÍA Y FUERZAS NO CONSERVATIVAS

El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas en general es un trabajo negativo ya que las fuerzas de fricción se oponen al movimiento.

Llamando W' a este trabajo: $\boxed{\Delta E = W' \Rightarrow E_{c_2} + U_2 - (E_{c_1} + U_1) = W'}$

IMPULSO DE UNA FUERZA

Como $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \int_1^2 d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt \Rightarrow \boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt}$ se llama *impulso*

El cambio de momento lineal de una partícula es igual al impulso.

Si $\vec{F}$ es constante $\vec{I} = \vec{F} \cdot (t_2 - t_1) = \vec{F}\Delta t$

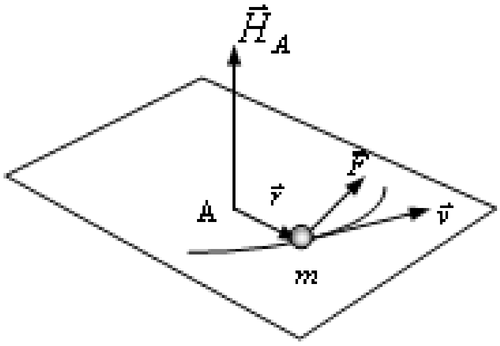
IMPULSO ANGULAR DE UNA FUERZA

El impulso angular alrededor de un punto arbitrario A durante el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 está definido como: $\boxed{\vec{A}_A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_A dt}$, siendo $\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}$ el momento de $\vec{F}$ alrededor de A.

En equilibrio estático este momento (al igual que la resultante de las fuerzas) sería nulo, en dinámica hace que una partícula gire modificando su trayectoria.

MOMENTO ANGULAR O MOMENTO CINÉTICO

$\boxed{\vec{H}_A = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$ es el momento angular con respecto a A de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$.



Siempre el momento angular o cinético es perpendicular al plano formado por los vectores posición y velocidad. En el caso de una partícula describiendo un movimiento circular:

$\vec{r} \perp \vec{v} \Rightarrow H = mrv = mr^2\omega \Rightarrow \vec{H} = mr^2\vec{\omega}$.

A veces al momento angular se le designa también por $\vec{L}$ en vez de $\vec{H}$.

Este concepto de momento angular o cinético es muy importante, lo veremos con mucho detalle cuando estudiemos dinámica del sólido rígido. En este caso la velocidad angular no sería paralela al momento cinético y por tanto la ecuación anterior NO SERÍA VÁLIDA. Recuerda que en este tema sólo estamos tratando de dinámica de la partícula.

RELACIÓN ENTRE MOMENTO ANGULAR Y MOMENTO DE UNA FUERZA

$$\frac{d\vec{H}_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \cancel{\vec{v} \times m\vec{v}} + \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{H}_A}{dt} = \vec{M}_A}$$

$d\vec{H}_A = \vec{M}_A dt \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d\vec{H}_A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_A dt \Rightarrow \boxed{\vec{A}_A = \vec{H}_{A_2} - \vec{H}_{A_1}}$ ecuación que se conoce como principio del impulso angular y momento angular.

Si $\vec{A}_A = \vec{0}$ *se conserva el momento angular*.

FUERZAS CENTRALES

Si $\vec{F}$ es paralela a $\vec{r} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$, este tipo de fuerzas se denominan *fuerzas centrales.*

Cuando la fuerza es central, el momento angular con respecto al centro de la fuerza es una constante de movimiento y viceversa.

La fuerza gravitatoria y la culombiana son fuerzas centrales. Ambas son del tipo $\vec{F}(r) = f(r)\vec{r}$.

Dedicaremos especial atención a las fuerzas centrales en este curso de Mecánica cuando veamos el tema de Órbitas.

Autor: Dra Laura Abad Toribio

Asignatura: Mecánica Racional y Analítica

Titulación: Grado en Ingeniería Aeroespacial

Curso: 2013-2014