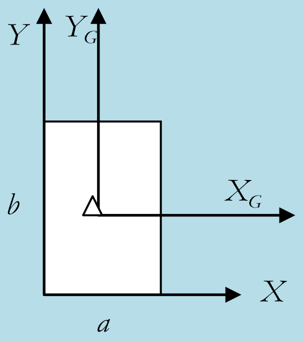
Mecánica Racional y Analítica (GAE)

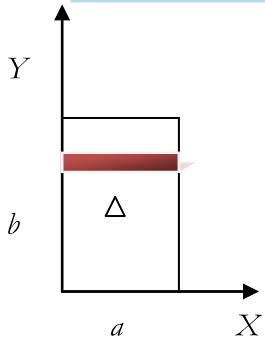
Continuación de Dinámica del Sólido rígido

REPASO

Antes de ver los diferentes tipos de movimiento vamos a repasar en un ejercicio muy sencillo todo lo visto hasta ahora en este tema.

La placa rectangular de la figura tiene fijo en CG, queremos calcular el tensor de inercia, el momento angular, la energía cinética y la energía potencial, suponiendo que se le comunica una velocidad angular en el centro de Gravedad de valor $\vec{\omega} = \omega\vec{i} + 2\omega\vec{k}$





Calculamos primero los momentos de inercia respecto de los ejes X e Y:

$$I_x = \int y^2 dm = \int y^2 \sigma dA = \sigma \int_0^b y^2 a dy = \sigma a \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^b = \sigma a \frac{b^3}{3} = \frac{M}{ab} a \frac{b^3}{3} = \frac{Mb^2}{3}$$

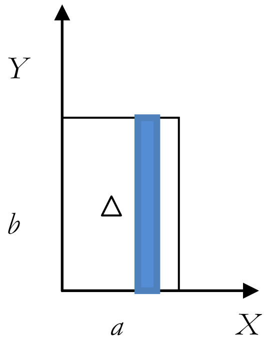
En la integral anterior σ es la densidad superficial de masa y hemos cogido para integrar el diferencial de área señalado en rojo en la figura.

Los momentos de inercia son siempre de masa

Calculamos ahora el momento de inercia respecto al eje Y.

$$I_y = \int x^2 dm = \int x^2 \sigma dA = \sigma \int_0^a x^2 b dx = \sigma b \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \sigma b \frac{a^3}{3} = \frac{M}{ab} b \frac{a^3}{3} = \frac{Ma^2}{3}$$

En la integral anterior σ es la densidad superficial de masa y hemos cogido para integrar el diferencial de área señalado en azul en la figura.



Los momentos de inercia son siempre de masa

$$I_y = \int x^2 dm = \int x^2 \sigma dA = \sigma \int_0^a x^2 b dx = \sigma b \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \sigma b \frac{a^3}{3} = \frac{M}{ab} b \frac{a^3}{3} = \frac{Ma^2}{3}$$

Para calcular los momentos de inercia respecto de los ejes que pasan por el Centro de gravedad podemos aplicar el teorema de Steiner o de los ejes paralelos

$$I_x = I_{X_G} + M\left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{X_G} = I_x - M\left(\frac{b}{2}\right)^2 = M\frac{b^2}{3} - M\frac{b^2}{4} = \frac{Mb^2}{12}$$

$$I_y = I_{Y_G} + M\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{Y_G} = I_y - M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = M\frac{a^2}{3} - M\frac{a^2}{4} = \frac{Ma^2}{12}$$

La figura es plana (contenida además en el plano *XY*), para calcular el momento de inercia respecto del eje Z que pasa por G, podemos aplicar el teorema de los ejes perpendiculares

$$I_{Z_G} = I_{X_G} + I_{Y_G} = \frac{Mb^2}{12} + \frac{Ma^2}{12} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

Los ejes que pasan por G son simetría, por tanto son EJES PRINCIPALES, los productos de inercia son cero.

Y el tensor de inercia entonces es diagonal:

$$\overline{\overline{I}}_G = \begin{pmatrix} \frac{Mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{12}(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} = \omega\vec{i} + 2\omega\vec{k} \Rightarrow p = \omega \quad ; \quad q = 0 \quad ; \quad r = 2\omega$$

Calculamos el momento angular:

$$\vec{H}_G = \overline{\overline{I}}_G \vec{\omega} = Ap\vec{i} + Bq\vec{j} + Cr\vec{k} = \frac{Mb^2}{12} \cdot \omega\vec{i} + M\frac{a^2}{12} \cdot 0\vec{j} + \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \cdot 2\omega\vec{k}$$

$$\vec{H}_G = \frac{Mb^2}{12} \cdot \omega\vec{i} + \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \cdot 2\omega\vec{k}$$

Calculamos la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{\omega}\overline{\overline{I}}_G\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{Mb^2}{12} \cdot \omega^2 + \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \cdot 4\omega^2\right)$$

Calculamos la energía potencial

$$E_p = Mg\frac{b}{2}$$

En el cálculo de la energía potencial gravitatoria hay que tener en cuenta que "la altura" se mide siempre desde el centro de gravedad a la referencia de potenciales.

En el ejemplo de repaso realizado hemos tomado la referencia de potenciales nivel cero o nivel de equilibrio en el eje *X* horizontal.