ÓRBITAS: FUERZAS CENTRAES Y MOVIMIENTO PLANETARIO. Segunda parte

8. APLICACIÓN AL MOVIMIENTO PLANETARIO (O KEPLERIANO)

Supongamos una partícula de masa m sometida a una fuerza central de atracción $f(r) = -GmM/r^2$. Esta fuerza deriva del potencial central

$$U(r) = -GmM/r$$

Para pasar de la fuerza al potencial sólo tenemos que integrar.

Como ya hemos visto, utilizando el cambio de variable $u = 1/r$, la ecuación radial se transforma en la ecuación de Binet:

$$\boxed{u'' + u + \frac{m}{l^2}\frac{F(u)}{u^2} = 0}$$

Sustituyendo la fuerza: $u'' + u + \frac{m}{l^2}\frac{(-GMmu^2)}{u^2} = 0$

$$u'' + u + \frac{m}{l^2}\frac{(-GMmu^2)}{u^2} = 0$$

$$u'' + u + \frac{-GMm^2}{l^2} = 0 \Rightarrow u'' + u = \frac{GMm^2}{l^2}$$

Llamando $p=l^2/GMm^2$:

$$u'' + u = \frac{1}{p}$$

Esta ecuación es la de un oscilador forzado de fuerza constante, por tanto tiene una solución que será la suma de la homogénea más la particular.

Su solución es del tipo:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + A\cos\theta$$

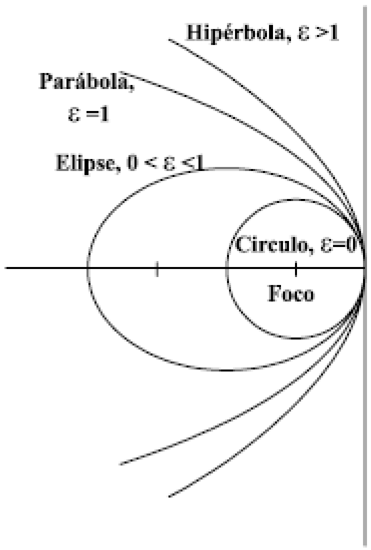
Donde A es una constante de integración y se ha hecho una elección apropiada de ejes para hacer la otra constante de integración igual a cero. Esta ecuación representa una sección cónicas en coordenadas polares. La forma canónica de la misma es

$$\boxed{r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta}}$$

donde la constante ε es la *excentricidad* y p el *parámetro* de la cónica.

La trayectoria de un cuerpo en el sistema solar es una sección cónica con el sol en un foco.

Dependiendo del valor de la excentricidad, las cónicas pueden ser hiperbolas, parábolas, elipses o circunferencias.

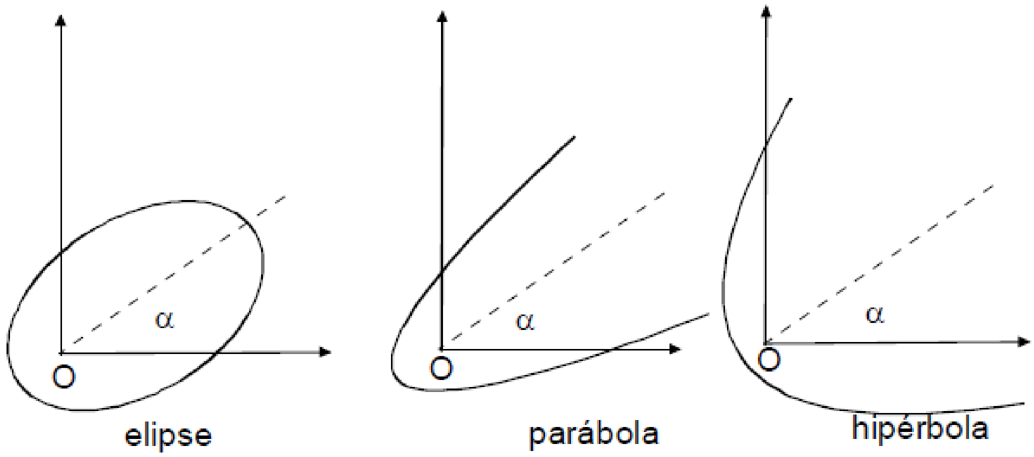


Secciones cónicas con un foco común.
foco.

- En general, para cualquier fuerza del tipo *K*/*r* la ecuación de la órbita se escribe de esta forma:

$$r = \frac{l^2}{mK}\frac{1}{1-\varepsilon\cos(\theta-\alpha)}$$

En la ecuación anterior *l* es el momento angular, *r* y θ son las coordenadas polares, ε es la excentricidad y α es la orientación.



Clasificación de las cónicas según la energía mecánica

La energía mecánica viene dada por la ecuación:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}.$$

La energía total es $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$. Use la fórmula de Binet para eliminar la velocidad en términos de la trayectoria y muestre que ésta energía esta dada, en el caso de órbitas elípticas, por:

$$\boxed{E = \frac{\gamma}{2p}\left(\varepsilon^2 - 1\right) = -\frac{\gamma}{2a}}$$

Por otra parte, la ecuación da l en términos de p según:

$$\boxed{l = (\gamma m p)^{1/2}}$$

Es interesante observar que la constante l queda determinada *únicamente* por el parámetro p. Es decir que podemos tener órbitas de diferentes excentricidades para diferentes valores de la energía, todas con la misma cantidad de movimiento angular. De hecho, podemos discutir la naturaleza de la órbita según el *signo* de la energía:

i) $\varepsilon > 1$, la energía es positiva $(E > 0)$ y esto corresponde a una órbita hiperbólica (abierta).

ii) $\varepsilon = 1$, la energía es nula $(E = 0)$ y esto corresponde a una órbita parabólica (abierta).

iii) $0 < \varepsilon < 1$, la energía es negativa $(-\gamma / 2p < E < 0)$ y esto corresponde a una órbita elíptica (cerrada).

iv) $\varepsilon = 0$, la energía es mínima $(E = -\gamma / 2p)$ y la situación corresponde a la órbita circular.

Autor: Dra Laura Abad Toribio

Asignatura: Mecánica Racional y Analítica

Titulación: Grado en Ingeniería Aeroespacial

Curso: 2014-2015