MECÁNICA RACIONAL Y ANALÍTICA (GAE)
MOVIMIENTO DE EULER

1. ECUACIONES DE EULER

En esta sección se deducen las ecuaciones que rigen el movimiento de un sólido rígido con un punto fijo. Se supondrá que el sólido está sometido a la acción de un conjunto de fuerzas aplicadas, cuya resultante es $\vec{F}$ y cuyo momento respecto al punto fijo es $\vec{M}$

Además de las fuerzas aplicadas, existirá una reacción $\vec{R}$ en el punto fijo O. Según hemos visto, el momento angular o cinético $\vec{H}_o$ respecto de un punto O viene expresado en función del tensor de inercia que define la geometría de masas del sólido respecto a O. Trabajando en EJES PRINCIPALES:

$$\bar{\bar{I}}o = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

$$\vec{H}_O = \bar{\bar{I}}_O \vec{\omega} = Ap\vec{i} + Bq\vec{j} + Cr\vec{k}$$

El momento angular o momento cinético será constante para un observador ligado al movimiento del cuerpo (ejes móviles); en cambio, respecto del sistema de referencia fijo, sería necesario considerar la variación de sus componentes.

Así, la derivada del momento angular o cinético respecto del tiempo tendremos que realizarla de la siguiente forma.

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d\left(\bar{\bar{I}}_O\vec{\omega}\right)}{dt} = \bar{\bar{I}}_O \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \bar{\bar{I}}_O \cdot \frac{d}{dt}\left(p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}\right) =$$
$$= \bar{\bar{I}}_O \cdot \left(\dot{p}\vec{i} + p\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{q}\vec{j} + q\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{r}\vec{k} + r\frac{d\vec{k}}{dt} \right) =$$
$$= \bar{\bar{I}}_O \cdot \left(\dot{p}\vec{i} + \dot{q}\vec{j} + \dot{r}\vec{k}\right) + \bar{\bar{I}}_O \cdot \left(p\vec{\omega}\wedge\vec{i} + q\vec{\omega}\wedge\vec{j} + r\vec{\omega}\wedge\vec{k}\right) =$$
$$= \bar{\bar{I}}_O \cdot \left(\dot{p}\vec{i} + \dot{q}\vec{j} + \dot{r}\vec{k}\right) + \left(\vec{\omega}\wedge\bar{\bar{I}}_O \cdot p\vec{i} + \vec{\omega}\wedge\bar{\bar{I}}_O \cdot q\vec{j} + \vec{\omega}\wedge\bar{\bar{I}}_O \cdot r\vec{k}\right) = {}^{+}$$
$$= \bar{\bar{I}}_O \cdot \left(\dot{p}\vec{i} + \dot{q}\vec{j} + \dot{r}\vec{k}\right) + \left(\vec{\omega}\wedge\bar{\bar{I}}_O \cdot \left(p\vec{i} + \cdot q\vec{j} + r\vec{k}\right)\right)$$

El tensor de inercia es constante, sólo hemos derivado la velocidad angular, y en esta derivada, derivamos las rotaciones *p*,*q* y *r* y los vectores unitarios.

La derivada temporal del momento angular o cinético es el momento de una fuerza, por tanto:

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{H}_O}{dt} = \bar{\bar{I}}_O \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\wedge\bar{\bar{I}}_O \cdot \vec{\omega} = \bar{\bar{I}}_O \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\wedge\vec{H}_o$$

Si *p*, *q* y *r* son constantes el primero de los términos sería cero.

Vamos a ver ahora que expresión obtenemos aplicando las definiciones del tensor de inercia y de la velocidad angular

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{H}_O}{dt} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{pmatrix} =$$

$$= \left(A\dot{p}\vec{i} + B\dot{q}\vec{j} + C\dot{r}\vec{k}\right) + \vec{i}\left(qCr - Bqr\right) + \vec{j}\left(Apr - Cpr\right) + \vec{k}\left(Bqp - Apq\right) =$$

$$= \vec{i}\left(A\dot{p} + qr(C - B)\right) + \vec{j}\left(B\dot{q} + pr(A - Cr)\right) + \vec{k}\left(C\dot{r} + qp(B - A)\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= \left(A\dot{p} + qr(C - B)\right) \\ M_y &= \left(B\dot{q} + pr(A - C)\right) \\ M_z &= \left(C\dot{r} + qp(B - A)\right) \end{aligned}}$$

Estas ecuaciones corresponden a la expresión en componentes de las Ecuaciones de Euler

Para el cálculo de la reacción en el punto fijo se recurre al sumatorio de fuerzas:

$$\boxed{\vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}_G}$$

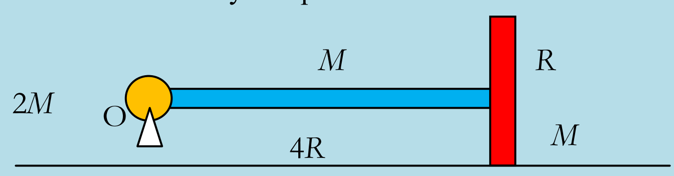
En un movimiento de Poinsot (ver apuntes anteriores) los momentos son nulos

2. TIPO DE MOVIMIENTO EULER SENCILLO

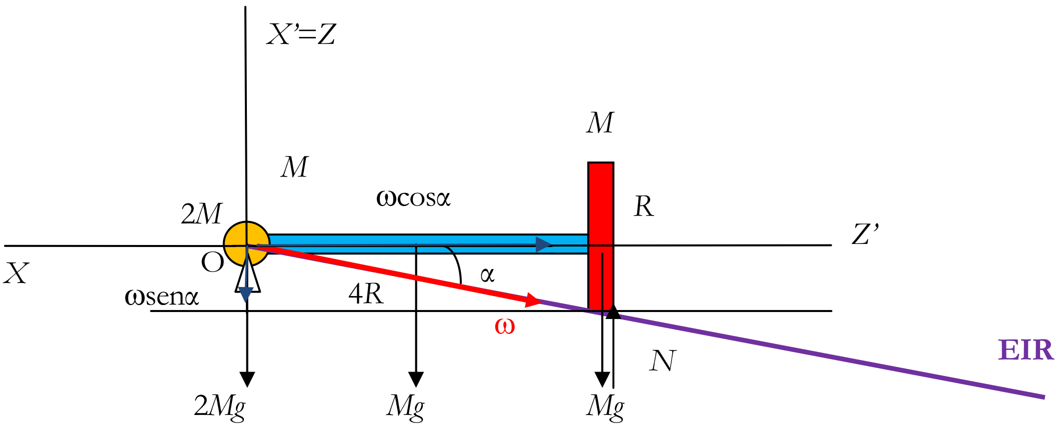
Para que un movimiento de un sólido rígido sea definido como "Euler sencillo" se tiene que cumplir:

- El sólido tiene que ser de revolución
- Hay momentos en el punto fijo
- No puede haber nutación (no puede variar el ángulo entre Z fijo y Z' móvil)
- Las componentes de la velocidad angular tienen que ser constantes.
- $\vec{M}_o = \left(\vec{\dot{\psi}} \wedge \vec{H}_o\right)_{móviles}$

Ejemplo:
El sólido de la figura está formado por una partícula puntual de masa $2M$, una varilla delgada de masa M y longitud $4R$ y un disco de masa M y radio R. Tiene fijo el extremo O. **Rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal.** Si gira con velocidad angular constante calcular la reacción normal entre el disco y la superficie horizontal.



Solución:
En el punto fijo O ponemos unos ejes fijos y unos ejes móviles y dibujamos las fuerzas, el EIR y la velocidad angular (contenida en el EIR).



- Calculamos el tensor de inercia (el mismo que el del ejemplo anterior)

$$A = B = 0 + \frac{1}{3}M(4R)^2 + \left(\frac{1}{4}MR^2 + M(4R)^2\right) = \frac{16}{3}MR^2 + \frac{1}{4}MR^2 + M16R^2 = 21{,}58MR^2$$

$$C = 0 + 0 + \frac{1}{2}MR^2$$

$$\overline{\overline{Io}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21{,}58MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 21{,}58MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5MR^2 \end{pmatrix}$$

- Expresamos vectorialmente la velocidad angular (en ejes móviles) contenida en el EIR

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}(-\vec{i}) + \dot{\varphi}\vec{k} = \omega\cos\alpha\vec{k} - \omega sen\alpha\vec{i}$$

$$p = -\omega sen\alpha$$

$$q = 0$$

$$r = \omega\cos\alpha$$

- Calculamos el momento angular o cinético

$$\vec{H}_O = -21{,}58MR^2\omega sen\alpha\vec{i} + 0{,}5MR^2\omega\cos\alpha\vec{k}$$

- Calculamos los momentos de las fuerzas en el punto fijo

$$\vec{M}_o = Mg4R(-\vec{j}) + Mg2R(-\vec{j}) + N6R\vec{j} = Mg6R(-\vec{j}) + N4R\vec{j}$$

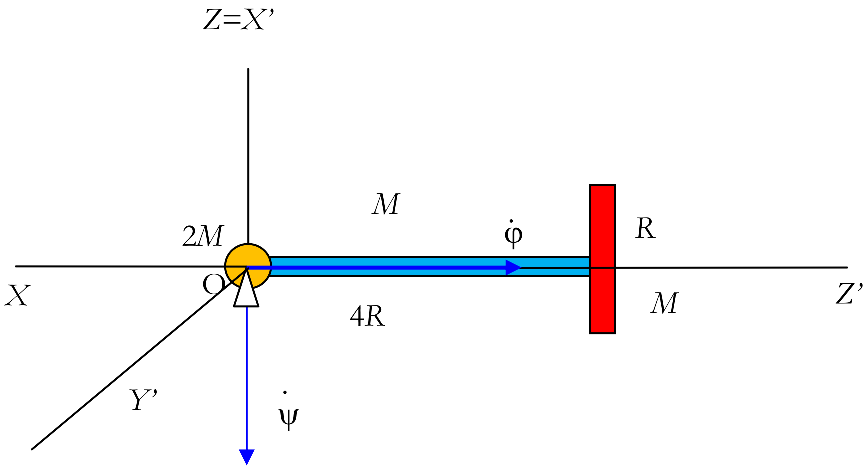
Recordar siempre que el momento es un vector, por tanto habrá que escribir el vector unitario correspondiente.

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{H}_O}{dt} = \overline{\overline{I}}_O \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \vec{H}_o$$

El primer término de la derivada es cero por ser las rotaciones constantes. Sólo hay que calcular el segundo término.

$$\vec{M}_o = \left(\dot{\vec{\psi}} \wedge \vec{H}_o\right)_{móviles}$$

El eje X' que coincide con el eje Z vertical siempre se mantiene fijo, por tanto la velocidad angular corresponde a la precesión expresada en móviles.



$$Mg6R(-\vec{j})+N4R\vec{j}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\omega sen\alpha & 0 & 0\\ -21{,}58MR^2\omega sen\alpha & 0 & 0{,}5MR^2\omega\cos\alpha\end{vmatrix}$$

$$Mg6R(-\vec{j})+N4R\vec{j}=0{,}5MR^2\omega\cos\alpha\cdot\omega sen\alpha\vec{j}$$

$-Mg6R+N4R=0{,}5MR^2\omega^2\cos\alpha\cdot sen\alpha$ sería la solución

$$N4R=0{,}5MR^2\omega^2\cos\alpha\cdot sen\alpha+Mg6R\Rightarrow N=\frac{0{,}5MR^2\omega^2\cos\alpha\cdot sen\alpha+Mg6R}{4R}$$

$$N=\frac{0{,}5MR\omega^2\cos\alpha\cdot sen\alpha+Mg6}{4}$$

siendo α=14º.

Se pueden preguntar muchas cosas en este tipo de problemas, por ejemplo, la velocidad angular para que se levante (en este caso *N*=0), las reacciones en el apoyo, la velocidad angular para que la reacción normal sea por ejemplo el triple que el peso, la mitad del peso etc.

Vamos a ver estos últimos casos:
Triple que el peso

$$3Mg=\frac{0{,}5MR\omega^2\cos\alpha\cdot sen\alpha+Mg6}{4}\Rightarrow 3Mg-\frac{Mg6}{4}=0{,}5MR\omega^2\cos\alpha\cdot sen\alpha$$

$$\frac{3Mg-\frac{Mg6}{4}}{0{,}5MR\cos\alpha\cdot sen\alpha}=\omega^2\Rightarrow\frac{1{,}5Mg}{0{,}5MR\cos\alpha\cdot sen\alpha}=\omega^2$$

$$\sqrt{\frac{3g}{R\cos\alpha\cdot sen\alpha}}=\omega$$

Mitad del peso

$$\frac{Mg}{2}=\frac{0{,}5MR\omega^2\cos\alpha\cdot sen\alpha+Mg6}{4}\Rightarrow\frac{Mg}{2}-\frac{Mg6}{4}=0{,}5MR\omega^2\cos\alpha\cdot sen\alpha$$

$$\frac{-Mg}{0{,}5MR\cos\alpha\cdot sen\alpha}=\omega^2$$

Este último caso no es compatible con el movimiento descrito ya que la velocidad sale imaginaria.

En otros casos podremos conocer la velocidad angular del sólido si nos dan como dato sus componentes.

3. TIPO DE MOVIMIENTO EULER GENERAL

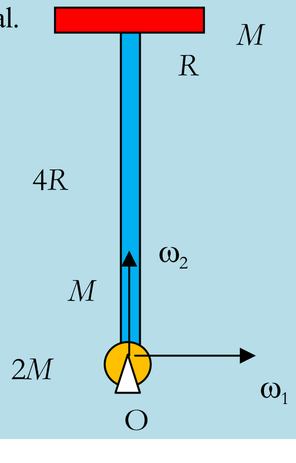
En el Euler general también hay momentos en el punto fijo, al igual que en el Euler sencillo. Para que un movimiento de un sólido rígido sea definido como “Euler GENERAL” se tiene que INCUMPLIR alguna de estas condiciones:

- El sólido tiene que ser de revolución
- No puede haber nutación (no puede variar el ángulo entre *Z* fijo y *Z’* móvil)
- Las componentes de la velocidad angular tienen que ser constantes.

Es decir, o bien el sólido no es de revolución, o bien hay nutación o las componentes de la velocidad angular no son constantes.

Ejemplo:

El sólido de la figura está formado por una partícula puntual de masa 2*M*, una varilla delgada de masa *M* y longitud 4*R* y un disco de masa *M* y radio *R*. Tiene fijo el extremo O. Si se le aplican dos rotaciones en la forma indicada en la figura, calcular la relación entre las dos rotaciones para que descienda y se coloque horizontal.



Solución:

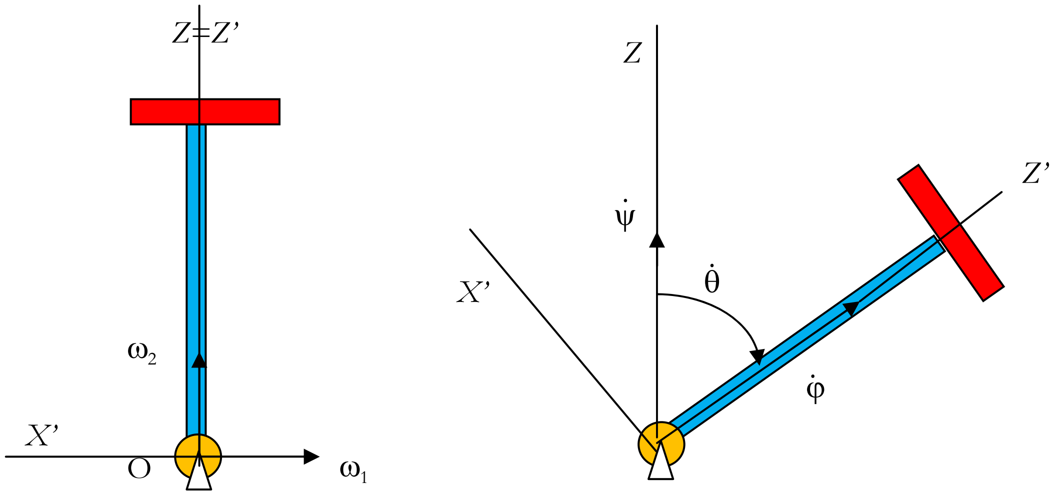
- Calculamos el tensor de inercia (el mismo que el del ejemplo anterior).

$$A=B=0+\frac{1}{3}MR^2+\left(\frac{1}{4}MR^2+M(4R)^2\right)=21{,}58MR^2$$

$$C=0+0+\frac{1}{2}MR^2$$

$$\overline{\overline{I}}o=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21{,}58MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 21{,}58R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5MR^2 \end{pmatrix}$$

- Dibujamos las dos posiciones del sólido, los ejes fijos y móviles en la posición inicial y en una posición genérica y las rotaciones en las dos posiciones (inicial y genérica)



- Calculamos la velocidad angular en las dos posiciones (inicial y genérica).

  EN MÓVILES !!!!!!!!

$$\vec{\omega}=-\omega_1\vec{i}+\omega_2\vec{k} \qquad \vec{\omega}=\dot{\psi}sen\theta\vec{i}+(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\vec{k}+\dot{\theta}(-j)$$

$$p=-\omega_1 \qquad p=\dot{\psi}sen\theta$$

$$q=0 \qquad q=-\dot{\theta}$$

$$r=\omega_2 \qquad r=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}$$

- Calculamos la energía mecánica en las dos posiciones. La referencia de potenciales la tomamos en el punto fijo.

Posición inicial:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)+E_p=\frac{1}{2}\left(21{,}58MR^2\omega_1{}^2+0{,}5MR^2\omega_2{}^2\right)+Mg4R+Mg2R$$

Posición genérica:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)+E_p=$$

$$=\frac{1}{2}\left(21{,}58MR^2\dot{\psi}^2sen^2\theta+21{,}58MR^2\dot{\theta}^2+0{,}5MR^2(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2\right)+Mg4R\cos\theta+Mg2R\cos\theta$$

Respecto al cálculo de la energía potencial se puede calcular separando las energías potenciales de cada uno de los cuerpos rígidos que componen el sólido, o calculando la energía potencial total con el peso total del sólido (masa total por gravedad) y la distancia del centro gravedad del sólido compuesto a la referencia de potenciales. A veces es más sencillo lo primero, que es como lo hemos hecho en este ejemplo.

- Aplicamos conservación de energía mecánica.

$$\frac{1}{2}\left(21{,}58MR^2\omega_1{}^2+0{,}5MR^2\omega_2{}^2\right)+Mg6R=\frac{1}{2}\left(21{,}58MR^2\dot{\psi}^2sen^2\theta+21{,}58MR^2\dot{\theta}^2+0{,}5MR^2\left(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\right)^2\right)+Mg6R\cos\theta$$

- Calculamos el momento angular o cinético en las dos posiciones.

Posición inicial

$$\vec{H}_o=-21{,}58MR^2\omega_1\vec{i}+0{,}5MR^2\omega_2\vec{k}$$

Posición genérica

$$\vec{H}_o=21{,}58MR^2\dot{\psi}sen\theta\vec{i}-21{,}58MR^2\dot{\theta}\vec{j}+0{,}5MR^2\left(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\right)\vec{k}$$

- Aplicamos conservación del momento angular en el eje Z' móvil

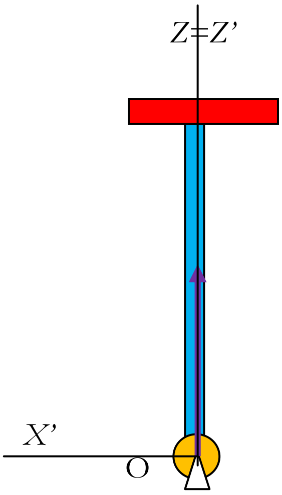
$$\left(\vec{H}_o\cdot\vec{k}\right)_{posición\ \ inicial}=\left(\vec{H}_o\cdot\vec{k}\right)_{posición\ \ genérica}$$

$$\left(-21{,}58MR^2\omega_1\vec{i}+0{,}5MR^2\omega_2\vec{k}\right)\cdot\vec{k}=\left(21{,}58MR^2\dot{\psi}sen\theta\vec{i}-21{,}58MR^2\dot{\theta}\vec{j}+0{,}5MR^2\left(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\right)\vec{k}\right)\cdot\vec{k}$$

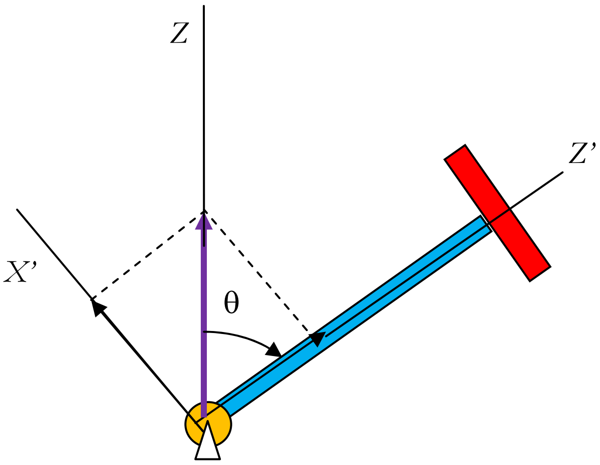
$$0{,}5MR^2\omega_2=0{,}5MR^2\left(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\right)\Rightarrow\omega_2=\left(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\right)$$

- Aplicamos conservación del momento angular en el eje Z fijo.

En la posición inicial Z fijo y Z' móvil coinciden. En la posición genérica el vector unitario en la dirección de Z fijo hay que proyectarlo en móviles.



$$\vec{k}_{fijo}=\vec{k}_{móvil}$$



$$\vec{k}_{fijo}=\cos\theta\vec{k}+sen\theta\vec{i}$$

$$\left(\vec{H}_o\cdot\vec{k}\right)_{posición\ \ inicial}=\left(\vec{H}_o\cdot\left(\cos\theta\vec{k}+sen\theta\vec{i}\right)\right)_{posición\ \ genérica}$$

$$\left(-21{,}58MR^2\omega_1\vec{i}+0{,}5MR^2\omega_2\vec{k}\right)\cdot\vec{k}=\left(21{,}58MR^2\dot{\psi}sen\theta\vec{i}-21{,}58MR^2\dot{\theta}\vec{j}+0{,}5MR^2\left(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\right)\vec{k}\right)\cdot\left(\cos\theta\vec{k}+sen\theta\vec{i}\right)$$

$$0{,}5MR^2\omega_2=0{,}5MR^2\left(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\right)\cos\theta+21{,}58MR^2\dot{\psi}sen^2\theta$$

$$0{,}5\omega_2=0{,}5\left(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}\right)\cos\theta+21{,}58\dot{\psi}sen^2\theta$$

¿Por qué podemos decir que se conserva la componente H_z del momento angular? La razón es que todas las fuerzas implicadas en el problema son paralelas al eje Z o cortan al eje Z.

Si desciende y se coloca horizontal $\theta=\pi/2$ (deja de haber nutación).
Para este ángulo

$$\frac{1}{2}\left(21{,}58MR^2\omega_1^2+0{,}5MR^2\omega_2^2\right)+Mg6R=\frac{1}{2}\left(21{,}58MR^2\dot{\psi}^2+0{,}5MR^2(\dot{\varphi})^2\right)$$

$$\omega_2=\dot{\varphi}$$

$$0{,}5\omega_2=21{,}58\dot{\psi}\quad ;\quad \frac{0{,}5}{21{,}58}\omega_2=\dot{\psi}$$

Sustituyendo estos valores de spin y precesión en la ecuación de conservación de energía obtenemos que:

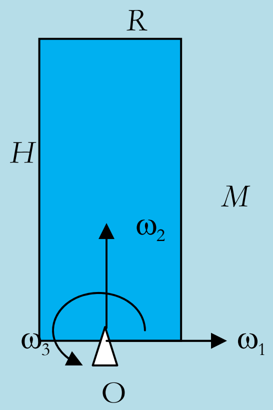
$$\frac{1}{2}\left(21{,}58MR^2\omega_1^2+0{,}5MR^2\omega_2^2\right)+Mg6R=\frac{1}{2}\left(21{,}58MR^2\left(\frac{0{,}5}{21{,}58}\omega_2\right)^2+0{,}5MR^2\omega_2^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(21{,}58MR^2\omega_1^2\right)+Mg6R=\frac{1}{2}\left(MR^2 0{,}012\omega_2^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(21{,}58MR^2\omega_1^2\right)+\frac{1}{2}\left(MR^2 0{,}012\right)\omega_2^2=Mg6R$$

$\boxed{-\left(10{,}79R\omega_1^2\right)+\left(0{,}007R\omega_2^2\right)=g6}$ la última ecuación es la solución

Ejemplo:
El sólido de la figura es un cilindro de M, radio R y longitud H. Tiene fijo el extremo O. Si se le aplican tres rotaciones en la forma indicada en la figura, calcular la relación entre las tres rotaciones para que descienda y forme 60º con la vertical.



Solución:

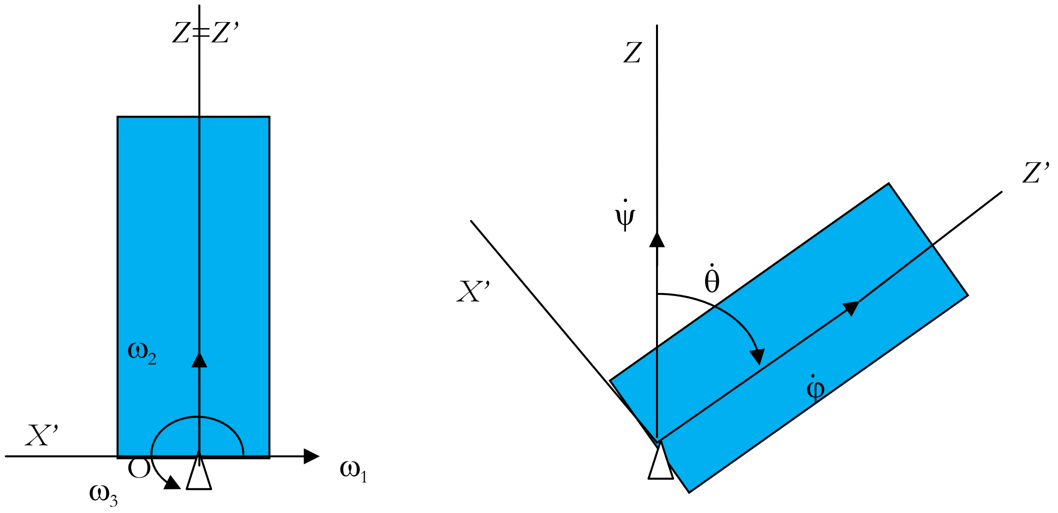
- Calculamos el tensor de inercia.

$$A=B=0+\frac{1}{4}MR^2+\left(\frac{1}{12}MH^2+M(H/2)^2\right)=\frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{3}$$

$$C=0+0+\frac{1}{2}MR^2$$

$$\overline{\overline{I}}o=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5MR^2 \end{pmatrix}$$

- Dibujamos las dos posiciones, los ejes fijos y móviles en la posición inicial y en una posición genérica y las rotaciones en las dos posiciones (inicial y genérica)



$\vec{\omega}=-\omega_1\vec{i}+\omega_2\vec{k}$	$\vec{\omega}=\dot{\psi}sen\theta\vec{i}+(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})\vec{k}+\dot{\theta}(-j)$
$p=-\omega_1$	$p=\dot{\psi}sen\theta$
$q=\omega_3$	$q=-\dot{\theta}$
$r=\omega_2$	$r=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}$

- Calculamos la energía mecánica en las dos posiciones. La referencia de potenciales la tomamos en el punto fijo.

Posición inicial:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)+E_p=\frac{1}{2}\left(A\omega_1{}^2+C\omega_2{}^2\right)+Mg\frac{H}{2}$$

Posición genérica:

$$E=E_c+E_p=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)+E_p=\frac{1}{2}\left(A\dot{\psi}^2sen^2\theta+A\dot{\theta}^2+C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2\right)+Mg\frac{H}{2}\cos\theta$$

- Aplicamos conservación de energía mecánica.

$$\frac{1}{2}\left(A\omega_1{}^2+B\omega_3{}^2+C\omega_2{}^2\right)+Mg\frac{H}{2}=\frac{1}{2}\left(A\dot{\psi}^2sen^2\theta+A\dot{\theta}^2+C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2\right)+Mg\frac{H}{2}\cos\theta$$

- Calculamos el momento angular o cinético en las dos posiciones.

Posición inicial

$$\vec{H}_o=-A\omega_1\vec{i}+B\omega_3\vec{j}+C\omega_2\vec{k}$$

Posición genérica

$$\vec{H}_o = A\dot{\psi} sen\theta \vec{i} - B\dot{\theta}\vec{j} + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\vec{k}$$

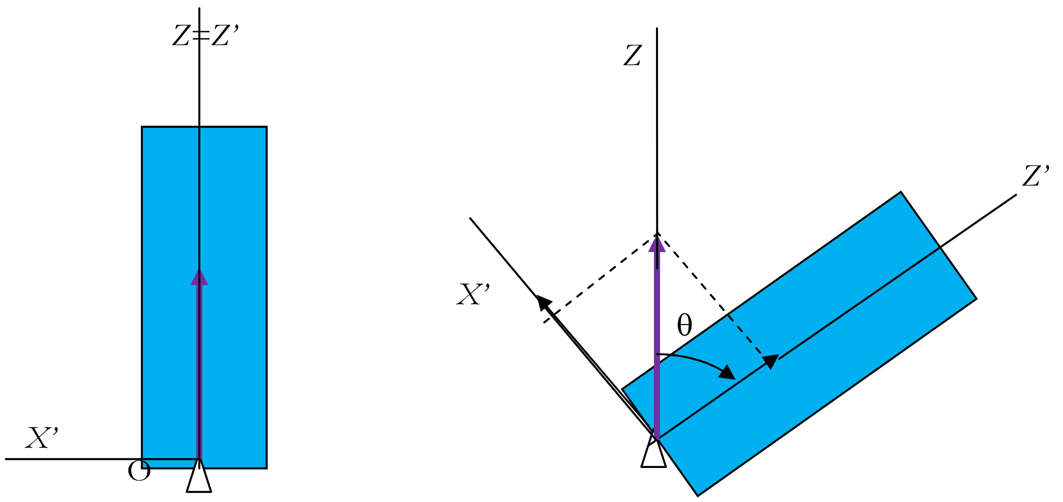
- Aplicamos conservación del momento angular en el eje Z’ móvil

$$\left(\vec{H}_o \cdot \vec{k}\right)_{posición\ \ inicial} = \left(\vec{H}_o \cdot \vec{k}\right)_{posición\ \ genérica}$$

$$\left(-A\omega_1\vec{i} + B\omega_3\vec{j} + C\omega_2\vec{k}\right)\cdot\vec{k} = \left(A\dot{\psi} sen\theta\vec{i} - A\dot{\theta}\vec{j} + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\vec{k}\right)\cdot\vec{k}$$

$$C\omega_2 = C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) \Rightarrow \omega_2 = (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})$$

- Aplicamos conservación del momento angular en el eje Z fijo.
  En la posición inicial Z fijo y Z’ móvil coinciden. En la posición genérica el vector unitario en la dirección de Z fijo hay que proyectarlo en móviles.



$\vec{k}_{fijo} = \vec{k}_{móvil}$ $\qquad\qquad$ $\vec{k}_{fijo} = \cos\theta\vec{k} + sen\theta\vec{i}$

$$\left(\vec{H}_o \cdot \vec{k}\right)_{posición\ \ inicial} = \left(\vec{H}_o \cdot \left(\cos\theta\vec{k} + sen\theta\vec{i}\right)\right)_{posición\ \ genérica}$$

$$\left(-A\omega_1\vec{i} + B\omega_3\vec{j} + C\omega_2\vec{k}\right)\cdot\vec{k} = \left(A\dot{\psi} sen\theta\vec{i} - A\dot{\theta}\vec{j} + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\vec{k}\right)\cdot\left(\cos\theta\vec{k} + sen\theta\vec{i}\right)$$

$$C\omega_2 = C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta + A\dot{\psi} sen^2\theta$$

Si desciende y se coloca horizontal formado 60º con la vertical, deja de haber nutación.
Para este ángulo

$$\frac{1}{2}\left(A\omega_1{}^2 + B\omega_3{}^2 + C\omega_2{}^2\right) + Mg\frac{H}{2} = \frac{1}{2}\left(A\dot{\psi}^2 sen^2 60 + C(\dot{\psi}\cos 60 + \dot{\varphi})^2\right) + Mg\frac{H}{2}\cos 60$$

$$\frac{1}{2}\left(A\omega_1{}^2 + B\omega_3{}^2 + C\omega_2{}^2\right) + Mg\frac{H}{2} = \frac{1}{2}\left(A\dot{\psi}^2\frac{3}{4} + C\left(\dot{\psi}\frac{1}{2} + \dot{\varphi}\right)^2\right) + Mg\frac{H}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\omega_2 = (\dot{\psi}\cos 60 + \dot{\varphi}) = \left(\dot{\psi}\frac{1}{2} + \dot{\varphi}\right)$$

$$C\omega_2 = C(\dot{\psi}\cos 60 + \dot{\varphi})\cos 60 + A\dot{\psi} sen^2 60$$

$$C\omega_2 = C\left(\dot{\psi}\frac{1}{2} + \dot{\varphi}\right)\frac{1}{2} + A\dot{\psi}\frac{3}{4}$$

$$C\omega_2 - C\omega_2\frac{1}{2} = A\dot{\psi}\frac{3}{4}$$

$$C\omega_2 \frac{1}{2} = A\dot{\psi}\frac{3}{4}$$

$$C\omega_2 \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3A} = \dot{\psi}$$

Sustituyendo en la ecuación de energía mecánica

$$\frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_3^2 + C\omega_2^2\right) + Mg\frac{H}{2} = \frac{1}{2}\left(A\left(C\omega_2\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3A}\right)^2\frac{3}{4} + C\omega_2^2\right) + Mg\frac{H}{4}$$

$$\frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_3^2\right) - \frac{1}{2}\left(A\left(C\omega_2\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3A}\right)^2\frac{3}{4}\right) = Mg\frac{H}{4} - Mg\frac{H}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_3^2\right) - \frac{1}{2}\left(AC^2\omega_2^2\frac{1}{4}\cdot\frac{16}{9A^2}\cdot\frac{3}{4}\right) = -\frac{MgH}{4}$$

$$\frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_3^2\right) - \frac{1}{2}\left(C^2\omega_2^2\frac{1}{3A}\right) = -Mg\frac{H}{4}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_3^2\right) - \frac{1}{2}\left(C^2\omega_2^2\frac{1}{3A}\right) = -Mg\frac{H}{4}}$$

La última ecuación es la solución, con los valores de A , B y C calculados anteriormente

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{3}\right)\omega_1^2 + \left(\frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{3}\right)\omega_3^2\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{MR^2}{2}\right)^2\omega_2^2\frac{1}{3\left(\frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{3}\right)}\right) = -Mg\frac{H}{4}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{3}\right)\left(\omega_1^2 + \omega_3^2\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{M^2R^2}{4}\right)\omega_2^2\frac{1}{3\left(\frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{3}\right)}\right) = -Mg\frac{H}{4}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right)\left(\omega_1^2 + \omega_3^2\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{R^2}{4}\right)\omega_2^2\frac{1}{3\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right)}\right) = -g\frac{H}{4}$$

$$\boxed{\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right)\left(\omega_1^2 + \omega_3^2\right) - \left(\left(\frac{R^2}{4}\right)\omega_2^2\frac{1}{3\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{3}\right)}\right) = -g\frac{H}{2}}$$