Mecánica Racional y Analítica (GAE)

DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

1. INTRODUCCIÓN

Al igual que vimos cuando estudiamos el tema de dinámica de una partícula, la DINÁMICA es la parte de la Mecánica que estudia en este caso cómo se mueve un sólido rígido debido a la acción de las fuerzas.
En los cursos de Física de 1º de ingenierías es habitual el uso del denominado momento de inercia. No vamos a hablar en este curso de este concepto. Se puede repasar todo lo relacionado con el cálculo de momentos de inercia en el link:

http://momentosdeinercia.blogspot.com.es/

Se recomienda su lectura.

El link contiene aspectos como: definiciones, tablas, radio de giro, teorema de Steiner, ejemplos de integración, péndulo físico, productos de inercia, círculo de Möhr, momentos de inercia de figuras compuestas, productos de inercia, tensor de inercia y vídeos asociados.

Los conceptos de tensor de inercia y de productos de inercia quizás sean desconocidos para un estudiante de 2º curso de ingenierías, por lo que en la primera parte de este tema comenzaremos a repasar estos conceptos.

2. TENSOR DE INERCIA

El tensor de inercia de un sólido rígido, es un tensor simétrico de segundo orden, que expresado en una base ortonormal viene dado por una matriz simétrica, cuyas componentes tensoriales son:

$$\boxed{\overline{\overline{I}}_O = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}}$$

O es un punto del sistema de referencia *OXYZ.*

I_x, I_y, I_z son los momentos de inercia

Los P_{ij} son los productos de inercia que además cumplen la propiedad :

$$P_{ij}=P_{ji}$$

$$\boxed{I_x = \int (y^2+z^2)dm \quad ; \quad I_y = \int \left(x^2+z^2\right)dm \quad ; \quad I_z = \int \left(x^2+y^2\right)dm}$$

$$\boxed{P_{xy} = P_{yx} = \int xydm \quad ; \quad P_{yz} = P_{zy} = \int yzdm \quad ; \quad P_{xz} = P_{zx} = \int xzdm}$$

dm es el diferencial de masa del sólido rígido.

Si O es el centro de masas de la distribución se llama tensor central de inercia $\overline{\overline{I}}_G$.

La matriz de componentes del tensor de inercia es real y simétrica. Por tanto:

• Los autovalores son reales.

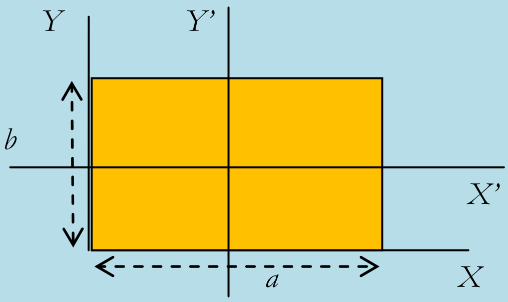
• Los autovectores pueden tomarse reales, y son ortogonales.

• Se puede diagonalizar.

Vamos a repasar brevemente cómo se hace el cálculo de un producto de inercia.

Ejemplo:

Supongamos que tenemos una placa rectangular de lados *a* y *b*. Calcular los productos de inercia respecto de los ejes *X* e *Y* y respecto de los ejes *X'* e *Y'*.



Solución:

Para calcular el producto de inercia P_{xy} respecto de los ejes *X* e *Y* (que no son de simetría) tenemos que hacer la siguiente integral

$$P_{xy} = P_{yx} = \int xy\,dm = \int_A xy\sigma\,dA = \sigma \int_0^a x\,dx \int_o^b y\,dy = \sigma \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^b = \sigma \frac{a^2}{2}\frac{b^2}{2} = \frac{M}{ab}\frac{a^2 b^2}{4} = \frac{Mab}{4}$$

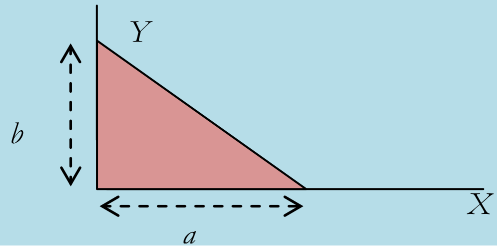
σ es la densidad superficial de masa (en kg/m^2) que es la densidad que corresponde a una figura plana.

Para hacer ahora el cálculo del producto de inercia P_{xy} respecto de los ejes *X'* e *Y'* (que sí son de simetría) tenemos que hacer la siguiente integral

$$P_{xy} = P_{yx} = \int xy\,dm = \int_A xy\sigma\,dA = \sigma \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x\,dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y\,dy = \sigma \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left.\frac{y^2}{2}\right|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 0$$

Por tanto estos ejes X' e Y' son los denominados **EJES PRINCIPALES.**

✍ **Ejemplo:** Determine el tensor de inercia respecto de la placa plana triangular de la figura. Suponga despreciable el espesor de la placa.



Solución: $\overline{\overline{I}}_o = \begin{pmatrix} \frac{1}{18}mb^2 & \frac{1}{36}mab & 0 \\ \frac{1}{36}mab & \frac{1}{18}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{18}m(b^2+a^2) \end{pmatrix}$

3. PROPIEDADES DE LOS MOMENTOS Y LOS PRODUCTOS DE INERCIA

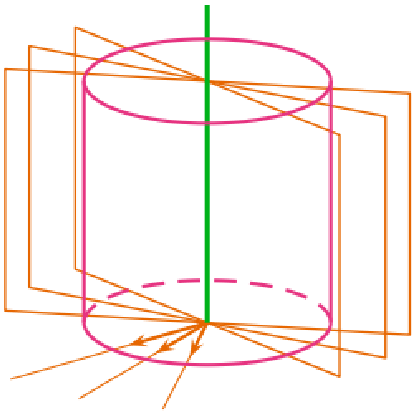
- Los EJES PRINCIPALES son las rectas o ejes formados por vectores propios del tensor de inercia. Tienen la propiedad interesante de que un sólido rígido que gira libremente alrededor de uno de estos ejes no varía su orientación en el espacio. En cambio, si el cuerpo gira alrededor de un eje arbitrario que no sea principal, el movimiento de acuerdo con las ecuaciones de Euler presentará cambios de orientación en forma de precesión y nutación (revisar el tema anterior de cinemática del sólido rígido).
- Al valor máximo y mínimo de los momentos de inercia respecto de un eje que pasa por un punto se les llama MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA
- Si un eje es de revolución es principal y por lo tanto el momento de inercia o es un máximo o es un mínimo.
- Respecto de los ejes principales los productos de inercia son siempre nulos.
- Si por ejemplo el eje X es principal, $P_{xy}=P_{xz}=0$ aunque Y y Z no sean ejes principales.
- Si un cuerpo tiene un plano de simetría, este plano es principal y cualquier eje perpendicular a él es un EJE PRINCIPAL.
- Todo eje perpendicular a dos principales es principal.

En ejes principales la expresión del tensor de inercia es:

$$\overline{\overline{I}}_o = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Si $A=B$ el tensor se llama cilíndrico. Si $A=B=C$ el tensor se llama esférico.

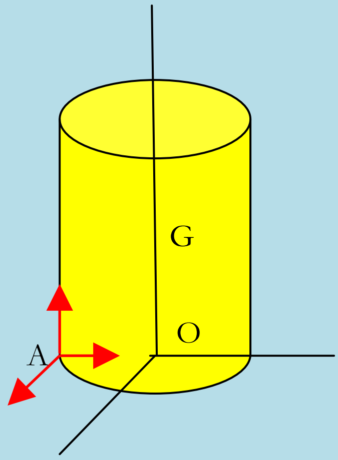
La mayoría de los sólidos rígidos que vamos a estudiar en este tema serán CUERPOS HOMOGÉNEOS DE REVOLUCIÓN. Para estos cuerpos:



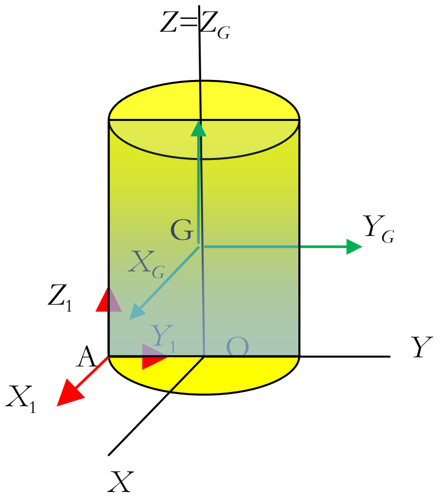
- Todos los planos que contienen al eje son de simetría, y principales en todos sus puntos.
- Todas las rectas normales al eje son principales en el eje, por ser normales a un plano principal.
- El propio eje de revolución es principal en todos sus puntos por la ortogonalidad de las direcciones principales: es normal al plano que forman las rectas que lo cortan ortogonalmente en cada punto.

Ejemplo:

Calcular el tensor de inercia respecto del punto O y respecto del punto A para un cilindro de radio R, masa M y altura H.



Solución:



El eje Z es de revolución, por tanto es un EJE PRINCIPAL.

El eje X y el eje Y son principales porque son perpendiculares a un plano de simetría (señalado en el dibujo y que divide al cilindro en dos partes iguales).

$$I_Z = I_{Z_G} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_{X_G} = I_{Y_G} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2$$

En la expresión anterior hemos calculado el momento de inercia respecto de los ejes X_G e Y_G como la suma del momento de inercia de un disco respecto de estos ejes y de una varilla respecto de un eje que pasa por el centro de masas.

Para una figura plana (como lo es un disco) el estudiante debe recordar el teorema de los ejes perpendiculares.

Si queremos calcular ahora los momentos respecto de los ejes X, Y y Z que pasan por O podemos aplicar el Teorema de Steiner (o de ejes paralelos).

$$I_Z = I_{Z_G} = I_{Z_0} = \frac{1}{2}MR^2 = C$$

$$I_{X_0} = I_{Y_0} = I_{X_G} + Md^2{}_{X_O X_G} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 + M(H/2)^2 = A = B$$

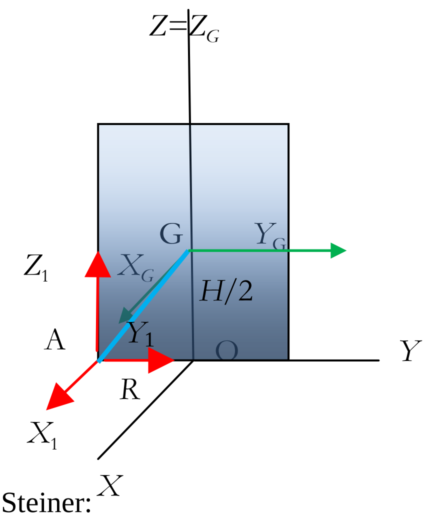
$$\overline{\overline{I}}_o = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 + M(H/2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 + M(H/2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{pmatrix}$$

Nos fijamos ahora en los otros ejes. X_1 es un eje que también es principal porque es perpendicular a un plano de simetría.

Por tanto los productos de inercia $P_{X_1Y_1} = P_{X_1Z_1} = 0$

$$\overline{\overline{I}}_A = \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Y_1} & -P_{Y_1Z_1} \\ 0 & -P_{Y_1Z1} & I_{Z_1} \end{pmatrix}$$

Los ejes X_1 e X_G son también paralelos. La distancia entre los dos ejes es $\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}$ señalada en azul claro en la figura.



Aplicamos el teorema de Steiner:

$$I_{X_1} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}MH^2 + M\left(\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}\right)^2$$

Los ejes Y_1 e Y_G son también paralelos. La distancia entre los dos ejes es también $\sqrt{R^2+\left(\frac{H}{2}\right)^2}$.

Aplicamos el teorema de Steiner otra vez para calcular I_{Z1}:

$$I_{Z_1} = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$$

Al aplicar el teorema de Steiner hay que recordar siempre que uno de los ejes debe pasar por G y que los dos ejes deben ser paralelos. Según esto, NO se puede aplicar el teorema de Steiner entre los ejes X y X_1 a pesar de ser paralelos.

Sólo nos queda calcular los productos de inercia. Aplicamos también el Teorema de Steiner:

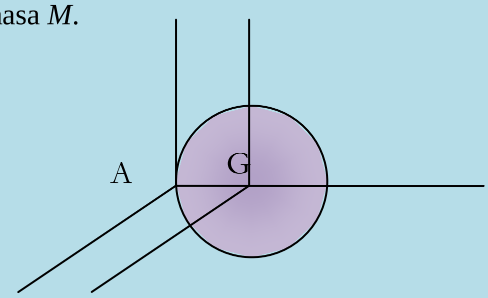
$$P_{Y_1Z_1} = P_{Y_GZ_G} + Md_1d_2 = 0 + M\frac{H}{2}R$$

En la expresión anterior hemos tenido en cuenta que P_{YGZG}=0 por ser estos ejes principales, d_1 es la distancia entre Y_1 e Y_G y d_2 la distancia entre Z_1 y Z_G.

$$\overline{\overline{I}}_A = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{12}+M(R^2+(H/2)^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{12}+M(R^2+(H/2)^2) & -\frac{MHR}{2} \\ 0 & -\frac{MHR}{2} & \frac{3MR^2}{2} \end{pmatrix}$$

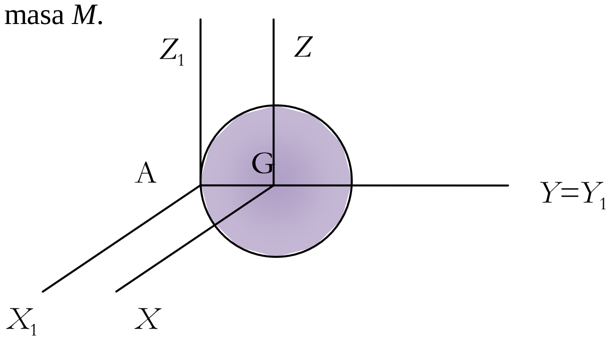
Ejemplo:

Calcular el tensor de inercia respecto del punto G de la figura y respecto del punto A para una esfera de radio R y masa M.



Solución:

Calcular el tensor de inercia respecto del punto G de la figura y respecto del punto A para una esfera de radio R y masa M.



Los tres ejes X_G, Y_G y Z_G son de revolución, por tanto son PRINCIPALES. Por simetría el momento de inercia respecto a estos tres ejes son iguales:

$$A = B = C = \frac{2}{5}MR^2$$

$$\bar{\bar{I}}_G = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}MR^2 \end{pmatrix}$$

Para calcular los momentos de inercia respecto de los ejes que pasan por A aplicamos Steiner (también son principales por ser perpendiculares a un plano de simetría).

$$A = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2 = C$$

$$\bar{\bar{I}}_A = \begin{pmatrix} \frac{7MR^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2MR^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7MR^2}{5} \end{pmatrix}$$

No hemos tenido que aplicar el teorema de Steiner para B al tratarse del mismo eje.

4. ECUACIONES FUNDAMENTALES

Todos los problemas de dinámica del sólido rígido se basan en tres ecuaciones:

- La suma de fuerzas
- La energía mecánica
- El momento angular o cinético

SUMA DE FUERZAS

$$\sum \vec{F} = M\vec{a}_G$$

En la expresión anterior a_G es la aceleración del CG.

ENERGÍA MECÁNICA

La energía potencial gravitatoria siempre se calculará midiendo la distancia desde el CG hasta la referencia de potenciales

$$V = Mgh_G$$

Para un sólido compuesto se puede calcular por separado la energía potencial de cada uno de los sólidos o calcular el CG del conjunto.

Lo más conveniente es repasar cómo se calculan las coordenadas del CG por integración directa de líneas, áreas y volúmenes, y aplicando los teoremas de Pappus-Guildin (para líneas y para áreas). También hay que repasar cómo se calcula el CG para figuras compuestas.

Para el cálculo de la energía cinética hay que distinguir dos casos, si el sólido tiene o no punto fijo.

- **SÓLIDO CON PUNTO FIJO**

Si $\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ es la velocidad angular de sólido rígido, la energía cinética se calcula en la forma:

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{\omega}\overline{\overline{I}}\vec{\omega} = \frac{1}{2}(p,q,r)\begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

, expresión que resulta muy complicada si no se trabaja en ejes principales.

En EJES PRINCIPALES

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\vec{\omega}\overline{\overline{I}}\vec{\omega} = \frac{1}{2}(p,q,r)\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right)}$$

expresión que resulta mucho más sencilla

Es importante destacar que para SÓLIDO CON PUNTO FIJO la energía cinética sólo tiene el termino asociado a la rotación, ya que la velocidad lineal (de traslación) del punto fijo es nula.

- **SÓLIDO SIN PUNTO FIJO**

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}Mv_G{}^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\overline{\overline{I}}\vec{\omega} = \frac{1}{2}(p,q,r)\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{2}Mv_G{}^2 + \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right)}$$

Para SÓLIDO CON PUNTO FIJO la energía cinética tiene el término asociado a la rotación y el término asociado a la traslación (con la velocidad del CG).

MOMENTO ANGULAR O CINÉTICO

En ejes no principales

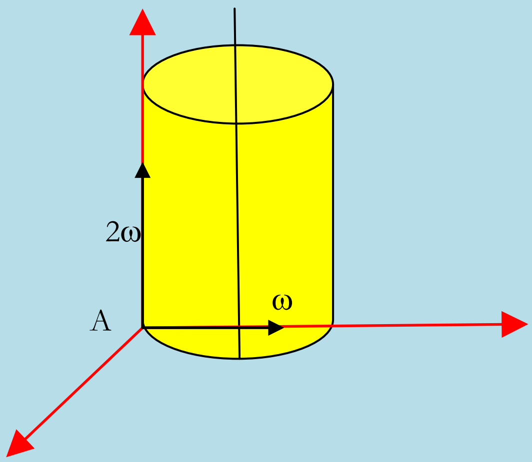
$$\vec{H} = \overline{\overline{I}}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$, expresión también complicada.

Siempre conviene trabajar en ejes principales

$$\boxed{\vec{H} = \overline{\overline{I}}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = Ap\vec{i} + Bq\vec{j} + Cr\vec{k}}$$

Ejemplo:

Al cilindro de la figura de radio *R*, masa *M* y altura *H* se le comunican dos rotaciones. Se pide calcular la enegía cinética y el momento angular o cinético respecto del punto A suponiendo que el punto A es un punto fijo.



Solución:

Según el ejemplo que ya hemos visto, para los ejes señalados en rojo:

$$\overline{\overline{I}}_A = \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Y_1} & -P_{Y_1Z_1} \\ 0 & -P_{Y_1Z1} & I_{Z_1} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} = \omega\vec{j} + 2\omega\vec{k}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{\omega}\overline{\overline{I}}\vec{\omega} = \frac{1}{2}(0,\omega,2\omega)\begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Y_1} & -P_{Y_1Z_1} \\ 0 & -P_{Y_1Z1} & I_{Z_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 2\omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(I_{Y_1}\omega^2 - 4P_{Y_1Z_1}\omega^2 + I_{Z_1}4\omega^2\right)$$

$$\vec{H}_A = \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Y_1} & -P_{Y_1Z_1} \\ 0 & -P_{Y_1Z1} & I_{Z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 2\omega \end{pmatrix} = \left(I_{Y_1}\omega - P_{Y_1Z_1}2\omega\right)\vec{j} + \left(-P_{Y_1Z1}\omega + I_{Z_1}2\omega\right)\vec{k}$$