Mecánica Racional y Analítica (GAE)

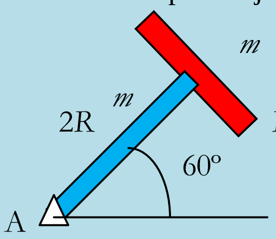
Movimiento de Poinsot

¿A qué llamamos MOVIMIENTO DE POINSOT?

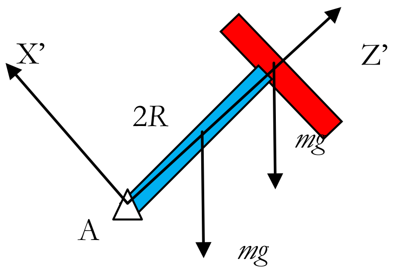
- Hay un punto fijo
- La suma de momentos en el punto fijo es nula
  $\sum \vec{M} = \vec{0}$
-
- No hay nutación $\dot{\theta} = 0$

- Según esto la velocidad angular del sólido rígido se expresará solamente en términos de precesión y spin (o rotación propia) al no haber nutación.
- La dirección del momento angular o cinético coincide con la dirección de la precesión
- La rotación propia o spin siempre se dibuja en el eje de revolución (Z' móvil).
- El eje Z fijo no tiene porqué ser vertical
- La velocidad angular del sólido está contenida en el EIR.

Ejemplo:
Ver si el sólido de la figura formado por una varilla de masa *m* y longitud 2*R* y un disco de radio *R* y masa *m* "es un Poinsot". A es el punto fijo.



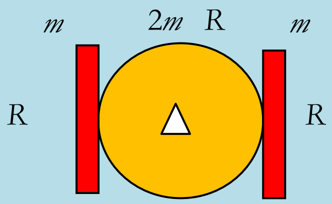
Solución:
Calculamos los momentos respecto del punto fijo. Para ello dibujamos los pesos.



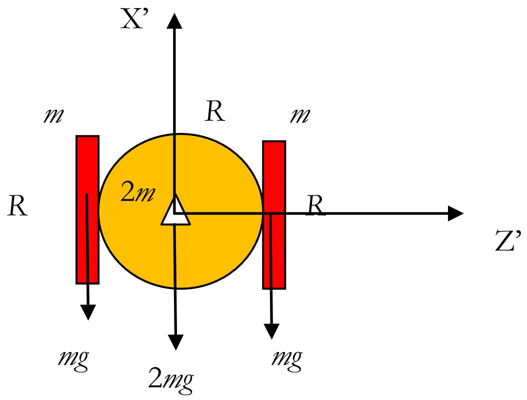
$$\sum \vec{M} = (mg2R\cos 60 + mgR\cos 60)(-\vec{j}) = -3mgR\cos 60 \cdot \vec{j} \neq \vec{0}$$

No es "un Poinsot"

Ejemplo:
Ver si el sólido de la figura formado por dos discos de radio *R* y masa *m* y una esfera de masa 2*m* y radio *R* es “ un Poinsot”. G (centro de gravedad es el punto fijo).



Solución:
Calculamos los momentos respecto del punto fijo. Para ello dibujamos los pesos.

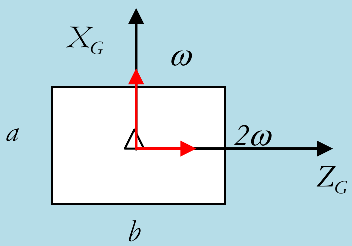


$$\sum \vec{M} = (mgR - mgR)(-\vec{j}) = \vec{0}$$

Es “un Poinsot”

Si un sólido tiene fijo el centro de gravedad será un Poinsot

Ejemplo
La placa rectangular de la figura tiene fijo en CG, queremos calcular la precesión y la rotación propia o spin suponiendo que se le comunica una velocidad angular en el centro de Gravedad de valor $\vec{\omega} = \omega\vec{i} + 2\omega\vec{k}$



Dato: Suponga que $b=2a$

Solución:

El tensor de inercia de esta placa rectangular ya está calculado (ver apuntes de repaso de dinámica del sólido rígido).

$$\overline{\overline{I}}_G = \begin{pmatrix} \frac{Mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M(a^2+b^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ma^2}{12} \end{pmatrix}$$

👁 Observe que hemos cambiado los ejes.

$$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k} = \omega\vec{i} + 2\omega\vec{k} \Rightarrow p = \omega \quad ; \quad q = 0 \quad ; \quad r = 2\omega$$

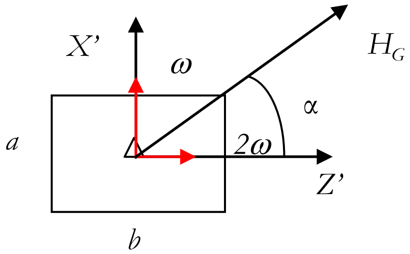
Calculamos el momento angular:

$$\vec{H}_G = \overline{\overline{I}}_G\vec{\omega} = Ap\vec{i} + Bq\vec{j} + Cr\vec{k} = \frac{Mb^2}{12}\cdot\omega\vec{i} + M\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)\cdot 0\vec{j} + \frac{Ma^2}{12}\cdot 2\omega\vec{k}$$

$$\vec{H}_G = \frac{Mb^2}{12}\cdot\omega\vec{i} + \frac{M}{12}a^2 2\omega\vec{k}$$

Calculamos la dirección de $\vec{H}_G$

👁 La dirección de un vector viene dada por el ángulo que forma con la horizontal



La dirección del momento angular o cinético viene dada por el ángulo α señalado en la figura.

$$tg\alpha = \frac{H_{X'}}{H_{Z'}} = \frac{\frac{Mb^2}{12}\cdot\omega}{\frac{Ma^2}{12}\cdot 2\omega} = \frac{b^2}{a^2 2}$$

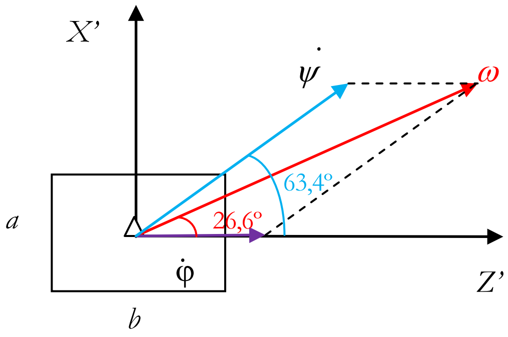
Para b=2a; $tg\alpha = \frac{(2a)^2}{a^2 2} = \frac{4a^2}{2a^2} = 2 \Rightarrow \alpha = arctg 2 \approx 63{,}4^{\circ}$

Calculamos la dirección de la velocidad angular. Esta dirección viene dada por el ángulo β.

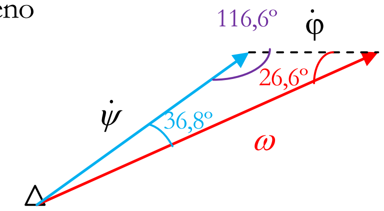
$$tg\beta = \frac{\omega}{2\omega} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = arctg(1/2) \approx 26{,}6^{\circ}$$

👁 La dirección de la velocidad angular es la del EIR

👁 La dirección del momento angular o cinético es la de la precesión



Resolvemos aplicando el Teorema del seno



$$\frac{\omega}{sen116,6}=\frac{\dot{\psi}}{sen26,6}=\frac{\dot{\varphi}}{sen36,8}$$

$$\dot{\psi}=\frac{\omega}{sen116,6}\cdot sen26,6=0,5\omega$$

$$\dot{\varphi}=\frac{\omega}{sen116,6}\cdot sen36,8=0,67\omega$$

Para practicar con más problemas debe descargarse la colección de Poinsot. Estos problemas son los que resolverán en clase.