modelado matemático de un sistema físico mediante función de transferencia

sistema de traslación:

$$\sum_i F_i = M\ddot{x}$$

sistema de rotación:

$$\sum_i M_i = I\ddot{\theta}$$

sistema eléctrico…

sistema electromecánico…

aplicar las leyes de la física

ecuación diferencial que relaciona input/output

$\downarrow \mathcal{L}$

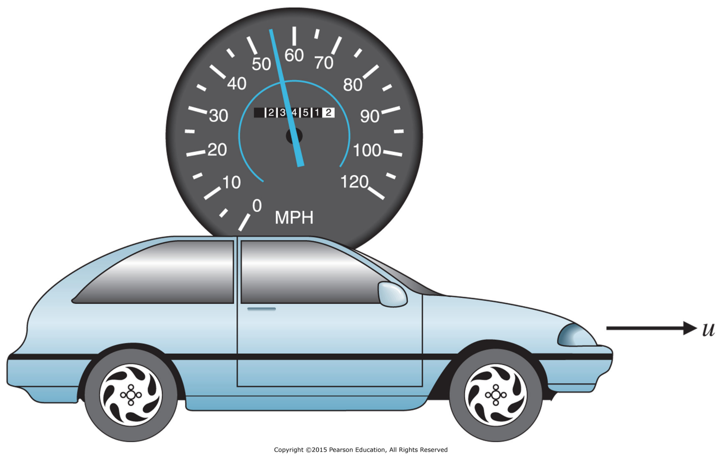
funciones de transferencia de sistema eléctrico, sistema mecánico, sistema electromecánico, etc son matemáticamente indistinguibles

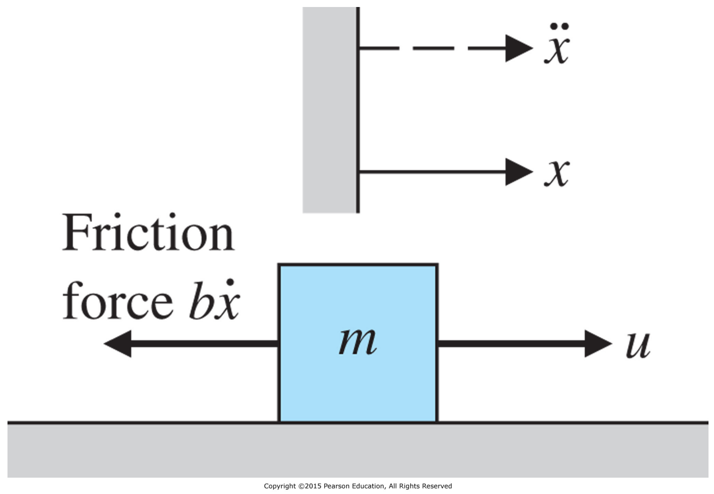
función de transferencia

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$

respuesta temporal del sistema dinámico

Ejemplo: modelado matemático de sistema de control de velocidad (sistema mecánico de traslación)





ecuaciones del movimiento:

$$u - b\dot{x} = m\ddot{x} \longrightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} = \frac{u}{m}$$

en función de la velocidad:
$v = \dot{x}$

$$\dot{v} + \frac{b}{m}v = \frac{u}{m} \qquad (1)$$

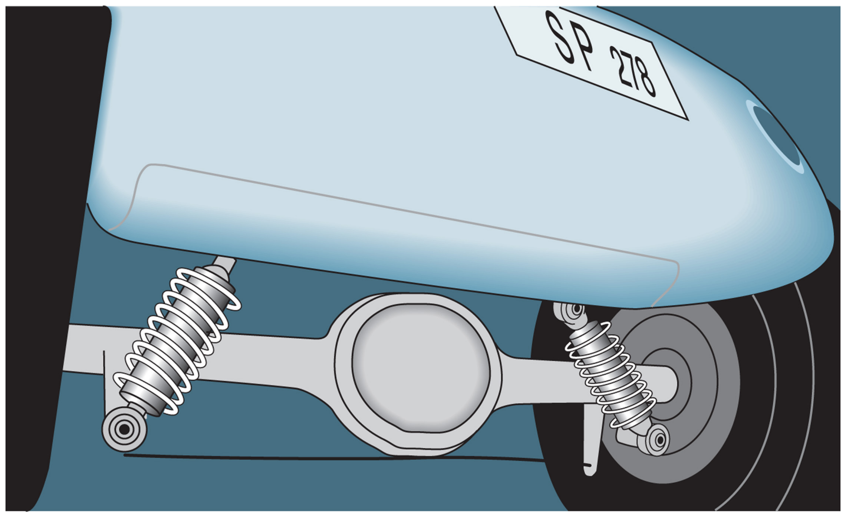
aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial (1):

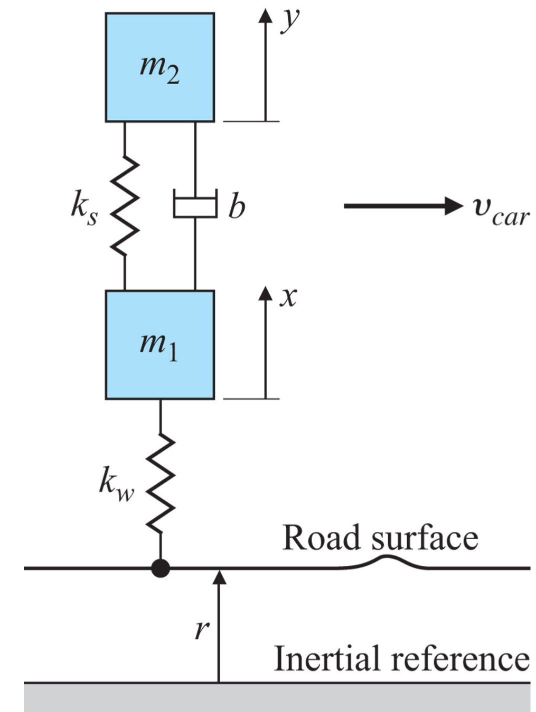
$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s + \frac{b}{m}}$$

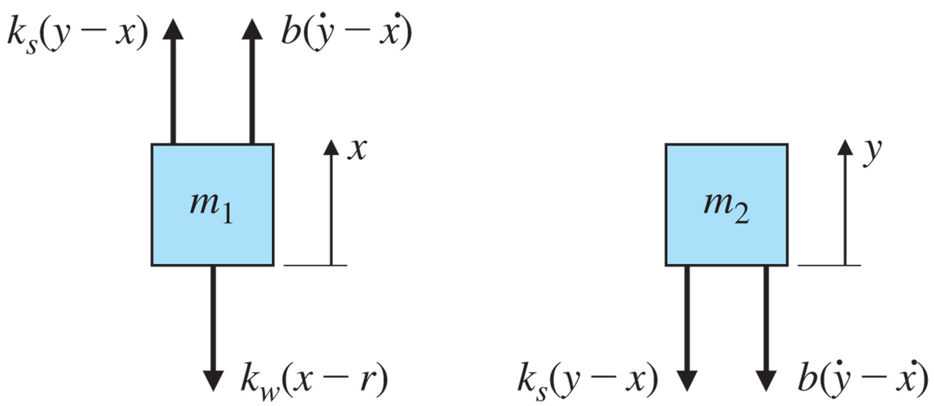
función de transferencia

Ejemplo: modelado simplificado de sistema de suspensión

(sistema mecánico de traslación)







(ecuaciones no independientes)

$$b(\dot{y}-\dot{x})+k_s(y-x)-k_w(x-r)=m_1\ddot{x}$$

$$-k_s(y-x)-b(\dot{y}-\dot{x})=m_2\ddot{y}$$

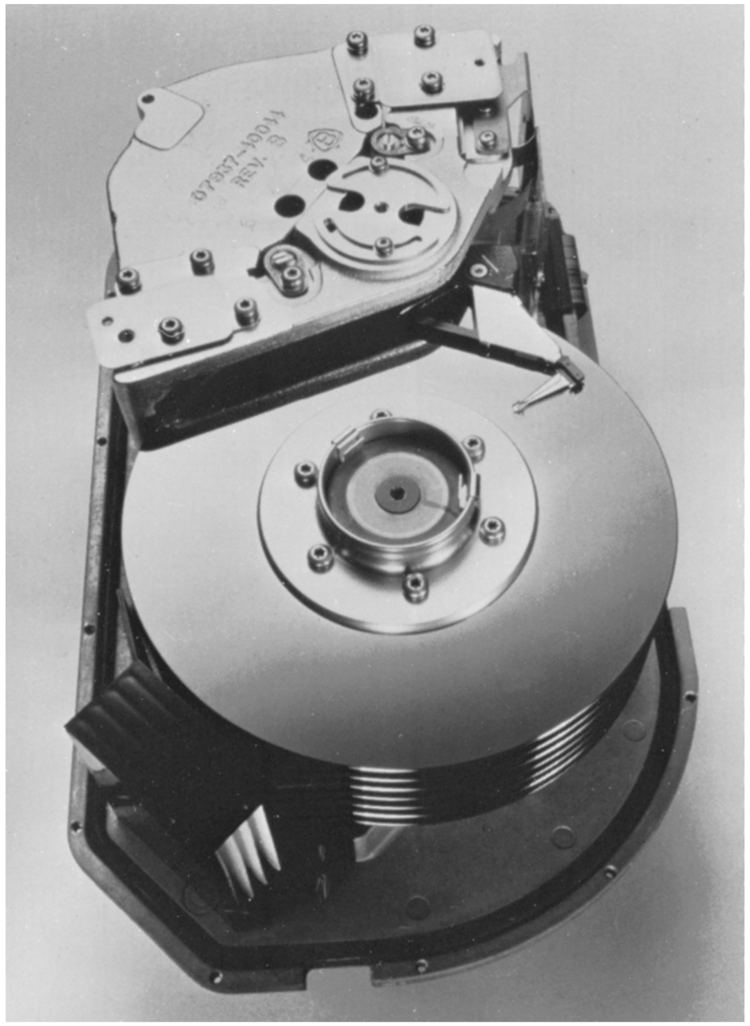
$$\ddot{x} + \frac{b}{m_1}(\dot{x} - \dot{y}) + \frac{k_s}{m_1}(x - y) + \frac{k_w}{m_1}x = \frac{k_w}{m_1}r$$

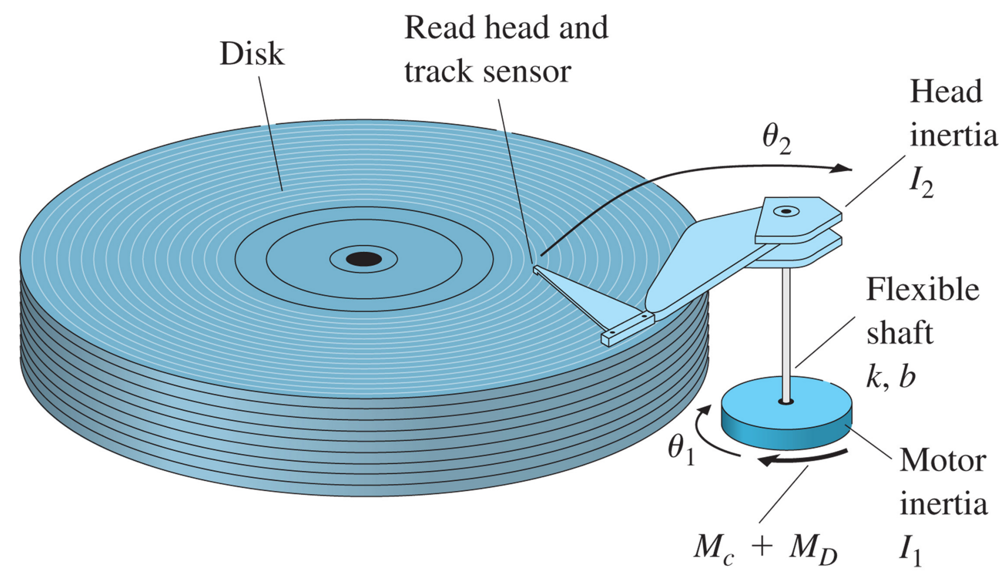
$$\ddot{y} + \frac{b}{m_2}(\dot{y} - \dot{x}) + \frac{k_s}{m_2}(y - x) = 0$$

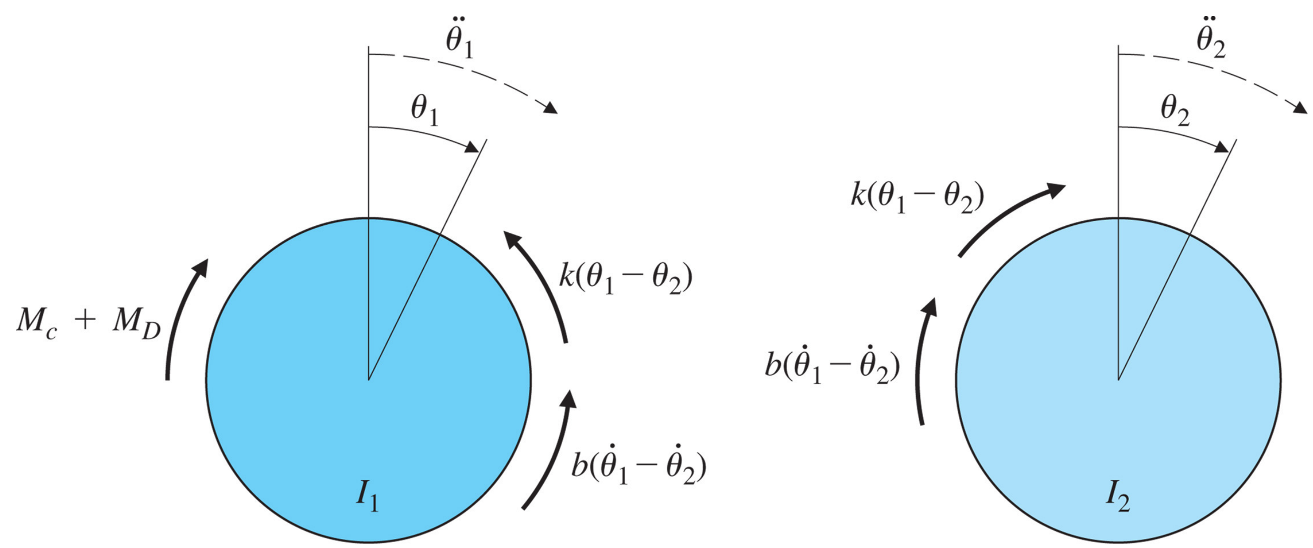
transformada de Laplace de la ec. diferencial para obtener función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_w b}{m_1 m_2}(s + \frac{k_s}{b})}{s^4 + (\frac{b}{m_1} + \frac{b}{m_2})s^3 + (\frac{k_s}{m_1} + \frac{k_s}{m_2} + \frac{k_w}{m_1})s^2 + (\frac{k_w b}{m_1 m_2})s + \frac{k_w k_s}{m_1 m_2}}$$

Ejemplo: modelado matemático de sistema de lectura/escritura de disco (sistema mecánico de rotación)







función de transferencia que relaciona posición angular con torque aplicado:

simplificamos suponiendo:

$$M_D = 0$$

$$b = 0$$

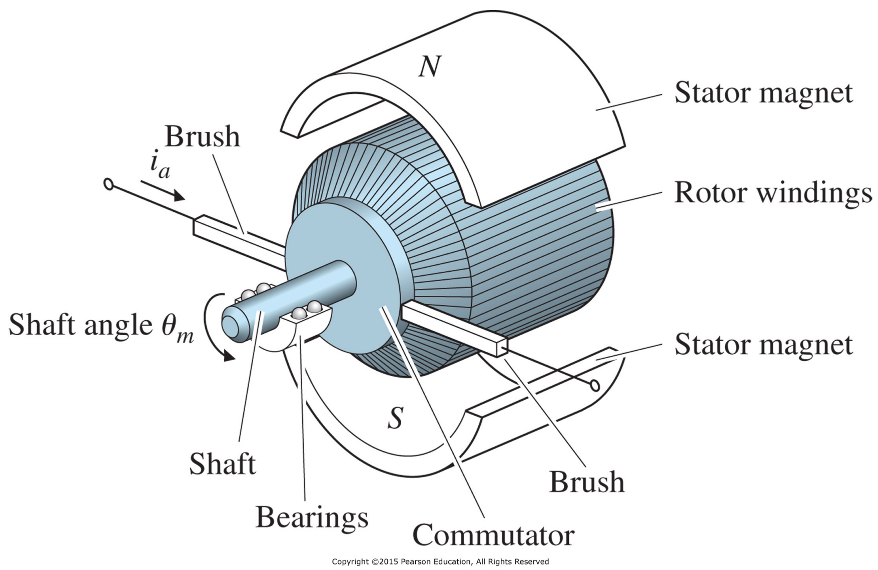
$$\frac{\Theta_2(s)}{M_c(s)} = \frac{k}{I_1 I_2 s^2 (s^2 + \frac{k}{I_1} + \frac{k}{I_2})}$$

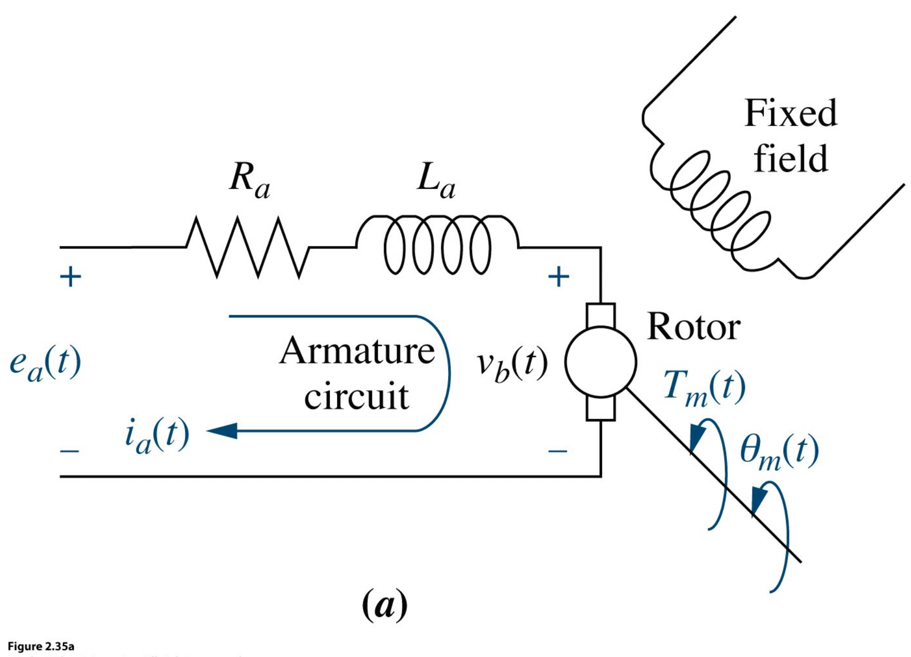
Ejemplo: modelado matemático de sistema eléctrico

ejercicio #1 de hoja de problemas #2

obtenemos la función de transferencia del circuito que estudiamos previamente en hoja de problemas #1 mediante su ecuación diferencial

Ejemplo: motor DC

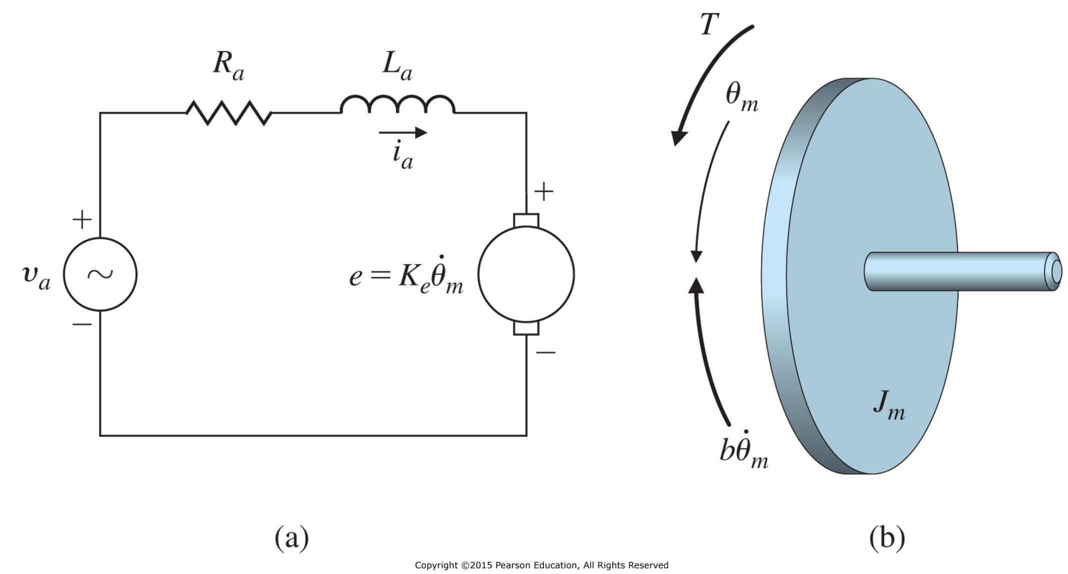




sistema electromecánico:

input: eléctrico

output: mecánico (rotación)



torque sobre el motor (T)
en función de la corriente (i_a):

$$T = K_t i_a$$

voltaje generado en el conductor que rota en un campo magnético (proporcional a su velocidad angular):

$$e = K_e \dot{\theta}_m$$

análisis del torque resultante sobre el rotor:

$$J_m \ \ddot{\theta}_m + b \ \dot{\theta}_m = K_t i_a \qquad (1)$$

análisis del circuito eléctrico:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - K_e \ \dot{\theta}_m \qquad (2)$$

Función de transferencia:

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_t}{s[(J_m s + b)(L_a s + R_a) + K_t K_e]}$$

Si L_a es despreciable frente a R_a (caso habitual), a partir de (1) y (2):

$$J_m\ddot{\theta}_m + (b + \frac{K_t K_e}{R_a})\dot{\theta}_m = \frac{K_t}{R_a} v_a$$

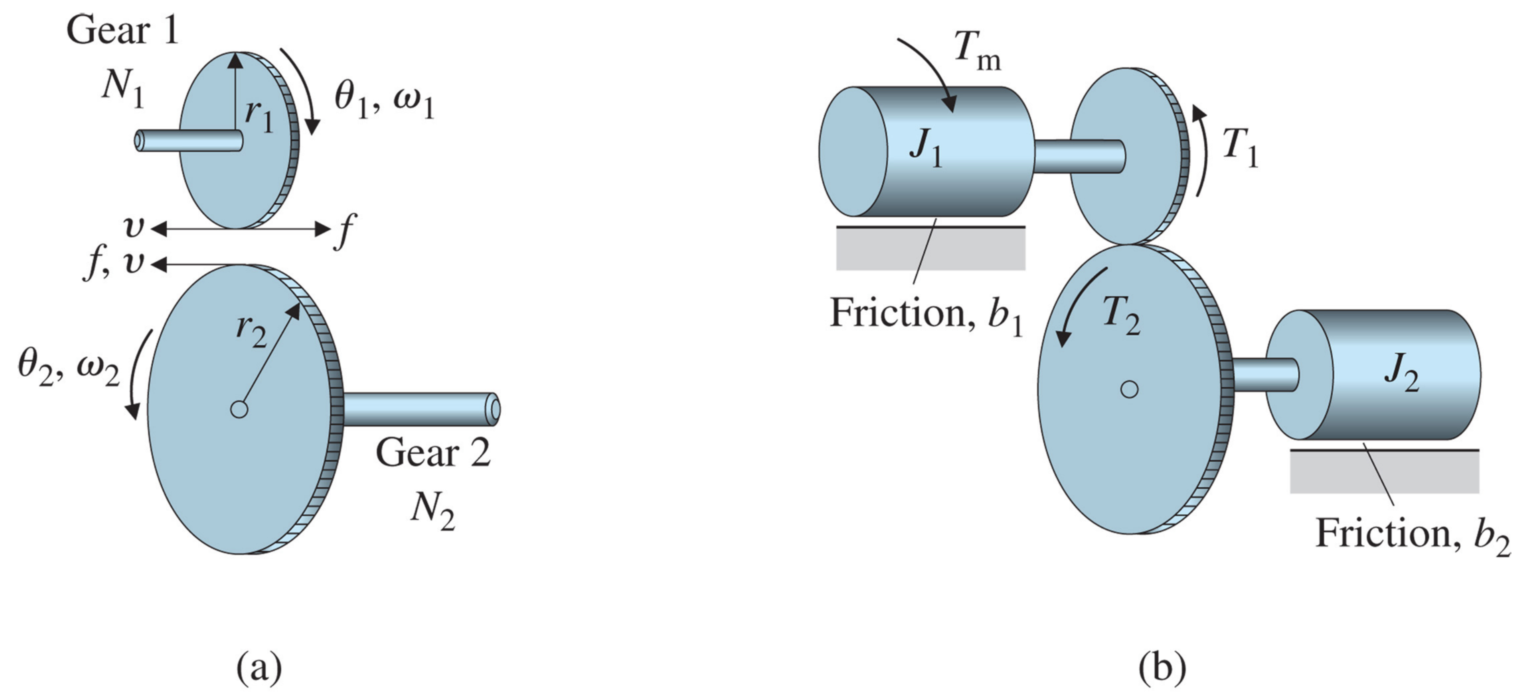
y la función de transferencia:

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_t}{R_a}}{J_m s^2 + (b + \frac{K_t K_e}{R_a})s} = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

donde:

$$K = \frac{K_t}{bR_a + K_t K_e} \qquad \tau = \frac{R_a J_m}{bR_a + K_t K_e}$$

en la mayoría de las ocasiones un motor en un sistema de control
se utiliza asociado a engranajes



Imaginamos un motor cuyo torque T_m (output) se aplica sobre el engranaje 1 que encaja con el engranaje 2

Buscamos la función de transferencia entre la posición angular del engranaje 2 y el torque del motor, es decir: $\dfrac{\Theta_2(s)}{T_m(s)}$

el ángulo θ_2 describe la posición del engranaje 2

La inercia del engranaje 1 y todo lo que está conectado a él es J_1

La inercia del engranaje 2 y todo lo que está conectado a él es J_2

Ecuación de movimiento para 1: $J_1\ddot{\theta}_1 + b_1\dot{\theta}_1 = T_m - T_1$

T_1 es el torque que el engranaje 2 aplica sobre el 1

Ecuación de movimiento para 2: $J_2\ddot{\theta}_2 + b_2\dot{\theta}_1 = T_2$

T_2 es el torque que el engranaje 1 aplica sobre el 2

¡estas dos ecuaciones no son independientes!

sustituyendo en esas ecuaciones las relaciones anteriores: $T_2 = T_1 \dfrac{N_2}{N_1}$ $\quad \theta_1 = \theta_2 \dfrac{N_2}{N_1}$

y eliminando T_1

obtenemos la ecuación diferencial del sistema y de ésta, su función de transferencia $\longrightarrow$

$$\left(J_2 + J_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\right) \ddot{\theta}_2 + \left(b_2 + b_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\right) \dot{\theta}_2 = \frac{N_2}{N_1} T_m$$

función de transferencia:

$$\frac{\Theta_2(s)}{T_m(s)} = \frac{\frac{N_2}{N_1}}{J_{eq}\, s^2 + b_{eq}\, s}$$

donde,

$$J_{eq} = J_2 + J_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

$$b_{eq} = b_2 + b_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

(inercia y amortiguamiento
equivalentes)