Capítulo 4:

Introducción a los parámetros de dispersión (S)

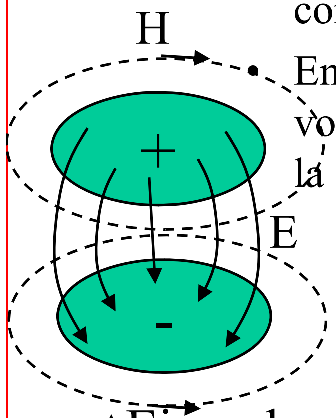
En el presente capítulo se proporciona una nueva herramienta de análisis de circuitos genéricos de microondas: los parámetros de dispersión (de scattering en terminología inglesa: parámetros S). Dicha herramienta es de carácter general y servirá para el análisis de cualquier circuito de microondas evitando los minuciosos análisis que se desarrollarían con la resolución de las ecuaciones de Maxwell y quedándose únicamente con las magnitudes en que se está interesado: voltaje o corrientes en un terminal, flujo de potencia en un dispositivo o alguna otra cantidad.

ÍNDICE

- Definición de voltaje y corrientes generalizados: concepto de impedancia.
- Concepto genérico de circuitos de microondas: unión de guías, plano de referencia.
- Descripción de uniones de una única guía:
  - Descripción de una unión de una única guía o terminación:
    - Energía en la terminación
    - Propiedades de la impedancia y admitancia generalizada de una terminación.
  - Descripción ondulatoria de una unión de una única guía:
- Descripción de una unión de guías: matriz de dispersión
  - Descripción de una unión en función de voltajes y corrientes generalizados:
    - Vectores de corrientes y voltajes generalizados: matriz de impedancia generalizada
    - Propiedades y condiciones físicas de las matrices de impedancia o admitancia.
    - Cierre de una unión de guías con dipolos.
  - Descripción ondulatoria de una unión de guías: matriz de dispersión.
    - Propiedades: simetría, transformación por cambio de plano de referencia.
    - Significado físico de los parámetros S: parámetros de acoplo y adaptación

CONCEPTOS DE VOLTAJE Y CORRIENTE GENERALIZADOS (I)

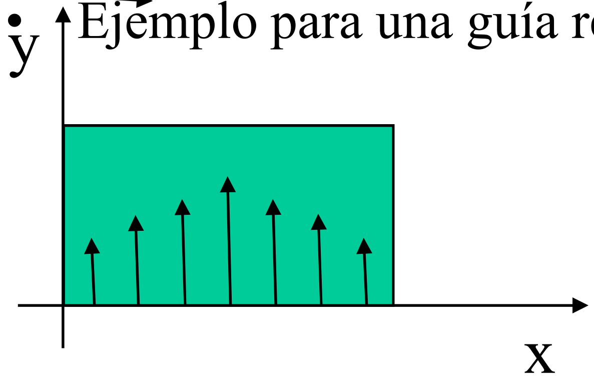
- Problemas y contradicciones:
  - En microondas no se puede medir de forma directa voltajes o corrientes.
  - Sin embargo, es útil definir en terminales voltajes o corrientes en microondas:
    - En estructuras que soportan modos TEM se define unívocamente ondas de voltaje o de corriente en cada coordenada longitudinal.
    - En estructuras que no soportan modos TEM puros no es posible esa unicidad. Se define el voltaje como la integral del campo eléctrico transversal entre dos puntos y la corriente como la circulación del campo magnético:



$$V = \int_{+}^{-} \vec{E} \cdot d\vec{l}\,; I = \oint_{C^+} \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

  - Si estamos ante un modo TM dicha integral es 0 (demostrar como ejercicio)
  - Si estamos ante un modo TE el valor depende del camino de integración.

- Ejemplo para una guía rectangular con un modo TE_{10}: depende de la posición x



$$E_{y,10} = -\frac{j\omega\mu a}{\pi} P sen \frac{\pi}{a} x \cdot \exp(-j \cdot \beta \cdot z)$$

$$H_{x,10} = \frac{\gamma a}{\pi} P \cdot sen \frac{\pi}{a} x \cdot \exp(-j \cdot \beta \cdot z)$$

$$V = -\frac{j\omega\mu a}{\pi} P sen \frac{\pi}{a} x \cdot \exp(-j \cdot \beta \cdot z) \cdot \int_{y} dy$$

CONCEPTOS DE VOLTAJE Y CORRIENTE GENERALIZADOS (II)

- El voltaje anterior depende de la posición x y del camino de integración. No hay un único voltaje.
- No obstante, se pueden extraer las siguientes conclusiones de teoría de guías:
  - La potencia transmitida involucra a los campos transversales.
  - En una guía sin pérdidas la potencia transmitida total es superposición de la transmitida por cada modo.
  - Los campos transversales tienen una variación en la dirección longitudinal de forma exponencial.
  - Los campos E y H transversal se relacionan mediante la impedancia del modo

CONCEPTOS DE VOLTAJE Y CORRIENTE GENERALIZADOS (III)

- Supongamos una guía que SÓLO soporta un modo propagándose:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{E}_t(x,y,z)=\vec{e}_t(x,y)\cdot\left[A^+\cdot e^{-j\beta z}+A^-\cdot e^{j\beta z}\right]\\ \vec{H}_t(x,y,z)=\vec{h}_t(x,y)\cdot\left[A^+\cdot e^{-j\beta z}-A^-\cdot e^{j\beta z}\right]\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{h}_t(x,y)=\frac{\hat{z}\times\vec{e}_t(x,y)}{Z_{wave}}$$

- Definamos un voltaje y corriente equivalentes como aquellos NÚMEROS COMPLEJOS asociados al modo de transmisión tal que la mitad del producto del voltaje equivalente por la corriente equivalente conjugada resulta en la potencia transmitida. Así:

$$\left.\begin{array}{l}V=V^+\cdot e^{-j\beta z}+V^-\cdot e^{j\beta z}\\ I=I^+\cdot e^{-j\beta z}-I^-\cdot e^{j\beta z}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}V^+=K_1\cdot C^+;V^-=K_1\cdot C^-\\ I^+=K_2\cdot C^+;I^-=-K_2\cdot C^-\end{array}\right.$$

CONCEPTOS DE VOLTAJE Y CORRIENTE GENERALIZADOS (IV)

- Aplicando la definición de los voltajes y corrientes generalizados:

$$\frac{1}{2}V^{+}\cdot\left(I^{+}\right)^{*}=\frac{\left|C^{+}\right|^{2}}{2}\int_{S}\vec{e}\times\vec{h}\cdot\hat{z}ds$$

$$K_{1}\cdot K_{2}=\int_{S}\vec{e}\times\vec{h}\cdot\hat{z}ds$$

- Se puede definir una impedancia característica equivalente como:

$$Z_{C}=\frac{V^{+}}{I^{+}}=\frac{V^{-}}{I^{-}}=\frac{K_{1}}{K_{2}}=\begin{cases}1\\ Z_{wave}\end{cases}$$

- De esta forma una línea de transmisión equivalente representa una guía
- Consideraciones:
  - Cuando la guía soporta N modos la equivalencia es con N líneas, de forma que el conjunto de terminales físicos de la guía (1) es inferior al conjunto de terminales matemáticos que sirven para la representación.
  - Cuando hay un obstáculo, este, por lo general, genera N modos que si la guía está dimensionada para un solo modo, no será capaz de soportar y se desvanecerán a una distancia suficiente.

CONCEPTO GENÉRICO DE CIRCUITOS DE MICROONDAS: UNIONES DE UNA ÚNICA GUÍA

- Definición: un circuito de un terminal es un circuito en el que la energía puede entrar o salir por un único puerto que es prolongación de la guía o línea.
- Definición: plano terminal de la guía es una sección recta cualquiera de la guía que cumple la condición de que se anulan los modos superiores al fundamental de la guía. Se le denominará plano de referencia.
- Calculando el vector de Poynting a través del plano terminal:

$$\frac{1}{2}\oint_{\Sigma} \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \hat{z} \cdot dS = P_{loss} + 2jw \cdot \left(W_m - W_e\right)$$

- Si se hace uso del voltaje y corrientes (V e I, números complejos definidos sobre los espacios vectoriales V e I) equivalentes definidos anteriormente y como dichos V e I son únicos para cada distribución de campos E, H (demoatración apuntes):
  - **V e I en una línea son magnitudes físicas**
  - **V e I en una guía son modelos**

$$\frac{1}{2} V \cdot I^* = P_{loss} + 2jw \cdot \left(W_m - W_e\right)$$

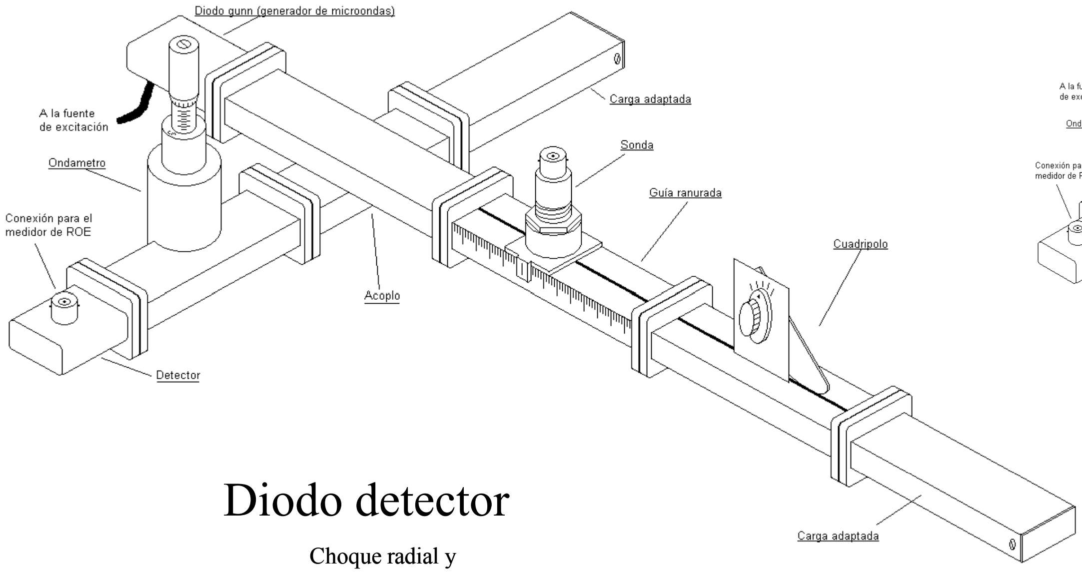
- La aplicación entre los espacios vectoriales V e I es biunívoca y lineal por lo que existe un número complejo que relaciona de forma única cada valor V e I

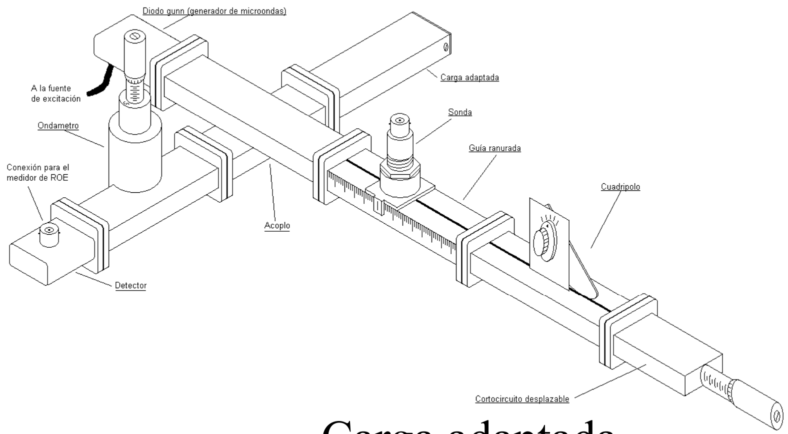
$$Z_{in} = \frac{V}{I} = \frac{\frac{1}{2} V \cdot I^*}{\frac{1}{2} I \cdot I^*} = \frac{P_{loss} + 2jw \cdot \left(W_m - W_e\right)}{\frac{1}{2} I \cdot I^*} = R + jX$$

CONDICIONES FÍSICAS PARA LA EXISTENCIA DE LAS IMPEDANCIAS Y ADMITANCIAS EQUIVALENTES

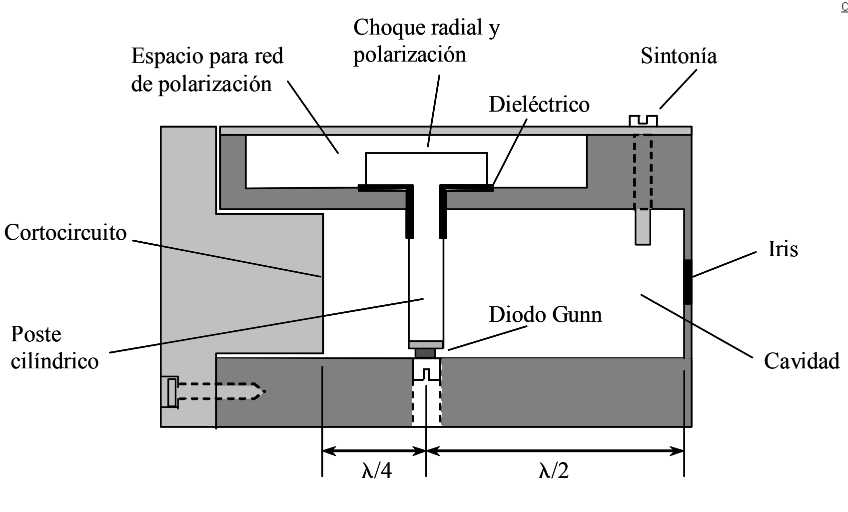
- Por ser la aplicación entre V e I biunívoca y lineal existe $Y=Z^{-1}=G+jB$. Esta descripción en Z e Y es válida siempre que exista un modo dominante.
- Terminación pasiva:
  - Con pérdidas ($P_{loss}>0$) luego: Re(Z)=R>0, Re(Y)=G>0
    - Si $W_E=W_H$ estamos en condiciones de resonancia
  - Sin pérdidas:
    - la parte real es 0 y la derivada parcial de la reactancia con respecto a la frecuencia es positiva, luego la reactancia es creciente lo que supone que alternan polos y ceros.
    - P=0 luego la impedancia es imaginaria pura.
    - Si $W_E=W_H$ estamos en condiciones de resonancia
- Paridad e imparidad de la impedancia de entrada de una guía con la frecuencia (demostración Collin, pág 232):
  - La parte real de la impedancia es una función par de la frecuencia
  - La parte imaginaria es una función impar de la frecuencia
    - (Esto ayuda a establecer qué funciones auxiliares pueden ser válidas para definir la resistencia o reactancia)

MODELO DE BANCO DE MICROONDAS Y DETALLE DE CIRCUITOS DE UN SOLO PUERTO



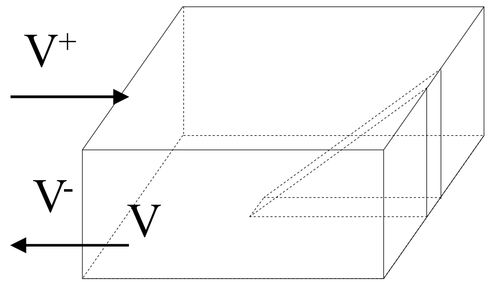


Diodo detector

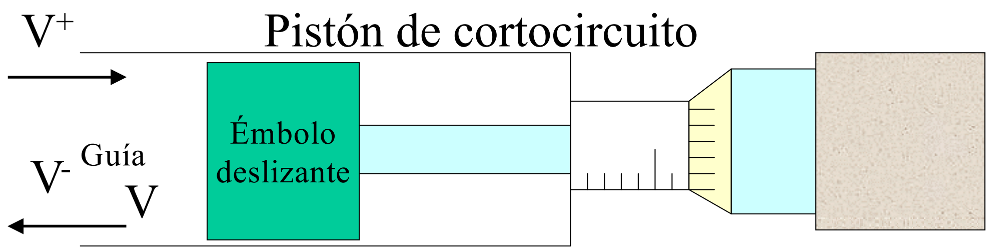


(a)

Carga adaptada



Pistón de cortocircuito



Tornillo micrométrico

DESCRIPCIÓN ONDULATORIA DE UNA TERMINACIÓN (I)

- Los conceptos de voltaje y corriente generalizado han permitido asociar una onda de tensión y otra de corriente incidente y reflejada en el plano de referencia de la terminación.

$$V = V^+ \cdot e^{-j\beta z} + V^- \cdot e^{j\beta z} = V_{inc} + V_{ref}$$

$$I = \frac{1}{Z_0}\left[V^+ \cdot e^{-j\beta z} - V^- \cdot e^{j\beta z}\right] = I_{inc} + I_{ref}$$

- Si introducimos dos números complejos a y b tal que su módulo al cuadrado sea la potencia incidente o reflejada en el plano terminal se puede poner:

$$\left.\begin{array}{l} V_{inc} = a \cdot g; I_{inc} = \dfrac{a \cdot g}{Z_0} \left(g, Z_0 : real\right) \\ P_{inc} = \dfrac{1}{2} V_{inc} \cdot I_{inc}^* = \dfrac{1}{2} a \cdot g \dfrac{a^* \cdot g}{Z_0^*} = a \cdot a^* \end{array}\right\} \Rightarrow g = \sqrt{2Z_0}$$

- Estas ondas a y b se denominan ondas de potencia.
- De donde los valores de los voltajes y corrientes generalizados en función de las nuevas ondas de potencia son:

$$\left.\begin{array}{l} V = \sqrt{2Z_0} \cdot (a+b) \\ I = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{Z_0}} \cdot (a-b) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{V + Z_0 \cdot I}{\sqrt{8Z_0}} \\ b = \dfrac{V - Z_0 \cdot I}{\sqrt{8Z_0}} \end{array}\right.$$

DESCRIPCIÓN ONDULATORIA DE UNA TERMINACIÓN (II): interpretación física

- Definición del coeficiente de reflexión en el plano de referencia (cociente de las componentes tangenciales de campo):

$$\Gamma = \frac{V_{ref}}{V_{inc}} = \left.\frac{b}{a}\right|_{si\ plano\ de\ referencia\ en\ -z} = \frac{V^-}{V^+} \cdot e^{-2j\beta z}$$

- Definición de la impedancia en función de voltajes y corrientes generalizados

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{\sqrt{2Z_0} \cdot (a+b)}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Z_0}} \cdot (a-b)} = Z_0 \cdot \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$$

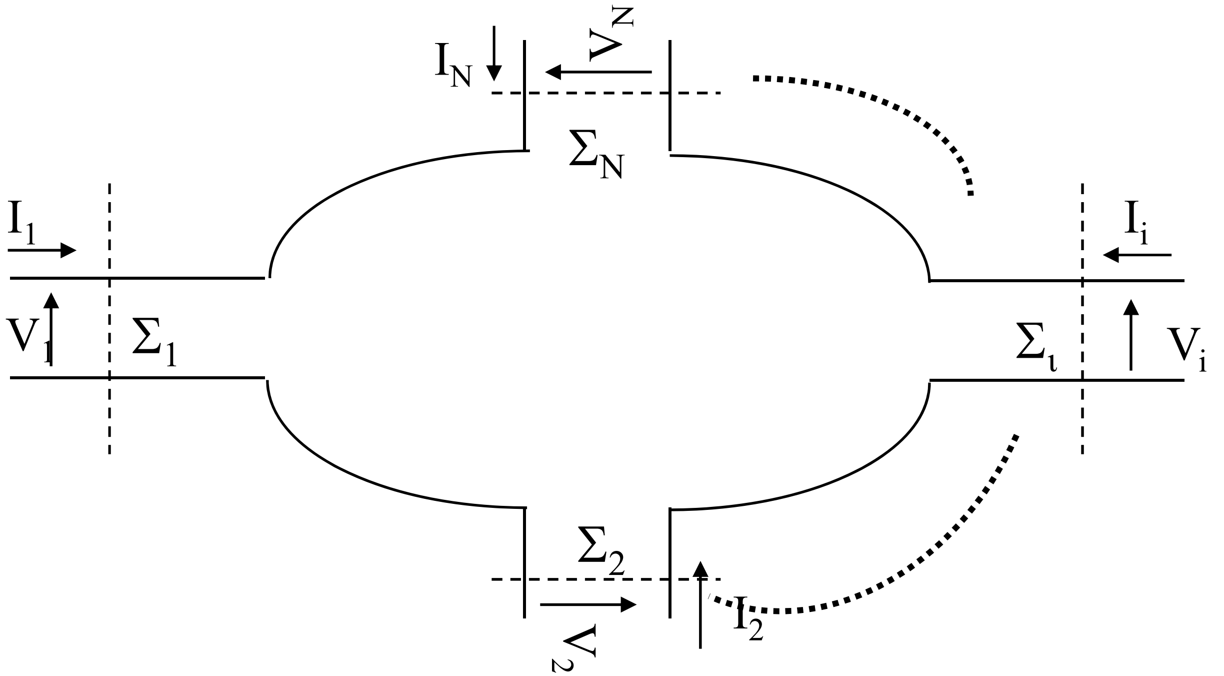
  – Expresión que nos permite generalizar los resultados de líneas de transmisión a estructuras en guía por ser la aplicación biunívoca y lineal

- Condiciones físicas:
  – Terminación pasiva: →

$$\boxed{\begin{aligned} &1 - \Gamma \cdot \Gamma^* = \left.\frac{P}{a \cdot a^*}\right|_{P>0} \Rightarrow |\Gamma| \le 1 \\ &\mathrm{Im}(\Gamma) = \omega \cdot \frac{W_H - W_E}{a \cdot a^*} \end{aligned}}$$

    - No disipativa: $|\Gamma| = 1$
    - Resonancia: $W_H = W_E$: $\Gamma\, real$
  – Carga adaptada: $\Gamma = 0$ (el número complejo b es 0 para todo a)
  – Cortocircuito: $\Gamma = -1$

UNIONES DE GUÍAS DE ONDAS (I)



$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\oint_{\Sigma_n}\vec{E}\times\vec{H}^{*}\cdot\hat{z}\cdot dS=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}V_n\cdot I_n^{*}=P_{loss}+2\,jw\cdot\left(W_m-W_e\right)$$

UNIONES DE GUÍAS DE ONDAS (II)

- Definición: estructura metálica cerrada cuyo volumen interior contiene una región común totalmente aislada electromagnéticamente del exterior. La única transferencia de energía se hace por medio de los planos de referencia que son secciones rectas de la guía situadas en un punto donde sólo hay un modo.
  - Si hubiera más de un modo, esa guía se modelaría como una unión de guías en sí
- Se va a caracterizar la unión en términos de energía:
  - Sólo existe flujo de energía en los planos de referencia.
  - Los planos de referencia sólo hay un modo dominante.
  - En cada plano de referencia se define un voltaje y una corriente generalizados.
    - Cada voltaje/corriente son números complejos de los espacios vectoriales V e I.
    - La unión se define por vectores de números complejos de dimensión N de forma única tales que cada par de vectores V-I define un único par de vectores E-H
    - Los vectores V e I no son independientes y están relacionados mediante una aplicación bilineal entre los espacios vectoriales V^n e I^n (vectores complejos de dimensión N)
    - Como son espacios vectoriales de dimensión finita relacionados por una aplicación bilineal, existe una única matriz regular que relaciona los vectores V-I

UNIONES DE GUÍAS DE ONDAS: MATRICES DE IMPEDANCIAS Y ADMITANCIAS

- La matriz que relaciona V con I se denomina matriz de impedancias Z. Dado que la aplicación es regular, la matriz que relaciona I con V se denomina matriz de admitancias Y.
- Las matrices de impedancias y admitancias son simétricas ya que la unión es homogénea, isótropa y recíproca.
  - El teorema anterior implica que las magnitudes σ, ε y μ son magnitudes escalares o tensores simétricos (demostración como ejercicio)
- Este teorema se demuestra a partir del teorema de reciprocidad de Lorentz:
  - Si (E_a, H_a) y (E_b, H_b) son dos soluciones distintas de las ecuaciones de Maxwell para un circuito de microondas correspondientes a dos fuentes distintas pero de la misma frecuencia y en el mismo modo se verifica

$$\nabla\left[\left(\vec{E}_a \times \vec{H}_b\right) - \left(\vec{E}_b \times \vec{H}_a\right)\right] = 0$$

$$\nabla\left[\left(\vec{E}_a \times \vec{H}_b\right) - \left(\vec{E}_b \times \vec{H}_a\right)\right] =$$

$$\vec{H}_b \nabla \times \vec{E}_a - \vec{E}_a \nabla \times \vec{H}_b - \vec{H}_a \nabla \times \vec{E}_b + \vec{E}_b \nabla \times \vec{H}_a =$$

$$-\vec{H}_b \cdot jw\mu \cdot \vec{H}_a - \vec{E}_a \cdot (\sigma + jw\varepsilon) \cdot \vec{E}_b + \vec{H}_a \cdot jw\mu \cdot \vec{H}_b + \vec{E}_a \cdot (\sigma + jw\varepsilon) \cdot \vec{E}_b$$

CONDICIONES FÍSICAS PARA LA DEFINICIÓN DE LAS MATRICES DE IMPEDANCIAS Y ADMITANCIAS

- Como Z e Y son matrices simétricas:

$$\frac{1}{2}V^T \cdot I^*\Big|_{escalar} = \frac{1}{2}I^H \cdot V = \frac{1}{2}I^H \cdot Z \cdot I = P + 2jw \cdot (W_H - W_E)$$

- Conjugando la anterior expresión resulta

$$\frac{1}{2}I^H \cdot Z^H \cdot I = P - 2jw \cdot (W_H - W_E)$$

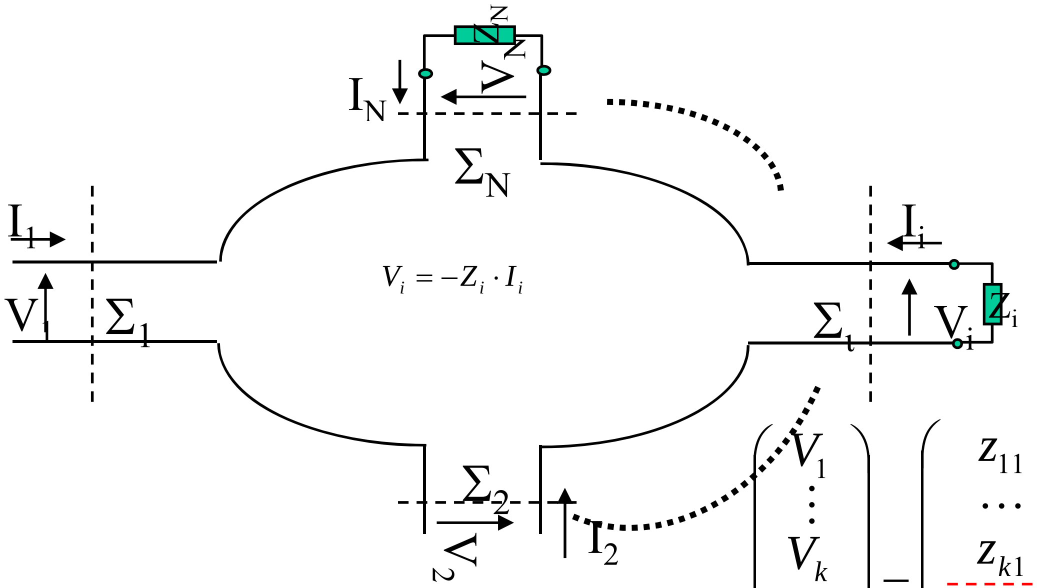
- Sumando y restando las anteriores expresiones:

$$\frac{1}{2}I^H \cdot (Z + Z^H) \cdot I = 2P = I^H \cdot \mathrm{Re}(Z) \cdot I$$

$$\frac{1}{2}I^H \cdot (Z - Z^H) \cdot I = 4jw(W_H - W_E) = j \cdot I^H \cdot \mathrm{Im}(Z) \cdot I$$

- Si la unión es pasiva P≥0 luego: $I^H \cdot \mathrm{Re}(Z) \cdot I \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(Z)\, definida\ positiva$
- Si la unión es no disipativa P=0 y se cumple: $I^H \cdot \mathrm{Re}(Z) \cdot I = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(Z) = 0$
  - En una terminación no disipativa la matriz de impedancias es imaginaria pura
- Si $\left(W_H \gtrless W_E\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Im}(Z) \\ -\mathrm{Im}(Z) \end{pmatrix} definida\ positiva$
  - Si $(W_H = W_E) \Rightarrow \mathrm{Im}(Z) = 0$: condición de resonancia

CIERRE DE UNA UNIÓN DE GUÍAS DE ONDAS CON VARIOS DIPOLOS



$$V_{N\times 1} = Z_{N\times N} \cdot I_{N\times 1} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_k \\ V_{k+1} \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} z_{11} & \cdots & z_{1k} & \cdots & \cdots & z_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{k1} & \cdots & z_{kk} & \cdots & \cdots & z_{kN} \\ \hline z_{(k+1)1} & \cdots & \cdots & z_{(k+1)(k+1)} & \cdots & z_{(k+1)N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{(k+1)N} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & z_{NN} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_k \\ I_{k+1} \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\overline{M}}_{11} & \overline{\overline{M}}_{12} \\ \overline{\overline{M}}_{21} & \overline{\overline{M}}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{V}_2 = -\overline{\overline{Z}}_L \cdot \overline{I}_2$$

$$\overline{V}_1 = \left[\overline{\overline{M}}_{11} - \overline{\overline{M}}_{12} \cdot \left(\overline{\overline{M}}_{22} + \overline{\overline{Z}}_L \right)^{-1} \cdot \overline{\overline{M}}_{21} \right] \cdot \overline{I}_1 = \overline{\overline{Z}}_{de} \cdot \overline{I}_1$$

La nueva unión degenerada tiene una matriz Z (Z_{de}) que se puede poner en función de la matriz Z de la unión no degenerada

DESCRIPCIÓN ONDULATORIA DE UNA UNIÓN DE GUÍAS (I)

- Si extendemos la formulación para un dipolo dada en 4.9 a una unión de guías:

$$\left.\begin{array}{l} V_{N\times1} = H_{N\times N}\cdot\left(A_{N\times1}+B_{N\times1}\right) \\ I_{N\times1} = K_{N\times N}\cdot\left(A_{N\times1}-B_{N\times1}\right) \end{array}\right\} con \left(\begin{array}{l} H_{N\times N} = diag\left(\sqrt{2Z_{0n}}\right) \\ K_{N\times N} = diag\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{Z_{0n}}}\right) \end{array}\right) \Rightarrow \qquad \boxed{(1)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_{N\times1} = F_{N\times N}\cdot\left(V_{N\times1}+G_{N\times N}\cdot I_{N\times1}\right) \\ B_{N\times1} = F_{N\times N}\cdot\left(V_{N\times1}-G_{N\times N}\cdot I_{N\times1}\right) \end{array}\right\} con \left(\begin{array}{c} F_{N\times N} = diag\left(\left(\sqrt{8Z_{0n}}\right)^{-1}\right) \\ G_{N\times N} = diag\left(Z_{0n}\right) \end{array}\right)$$

- Significado físico (“siempre desde el punto de vista del circuito”):
  - A: ondas de potencia incidentes en cada puerta del circuito (son entrantes al circuito)
  - B: ondas de potencia salientes en cada puerta del circuito

DESCRIPCIÓN ONDULATORIA DE UNA UNIÓN DE GUÍAS (II)

- Si se despeja B (ondas salientes) en función de A (ondas entrantes):

$$A = F \cdot (V + G \cdot I) = F \cdot (Z + G) \cdot I \Rightarrow I = (Z + G)^{-1} \cdot F^{-1} \cdot A$$

$$B = F \cdot (Z - G) \cdot I = F \cdot (Z - G) \cdot (Z + G)^{-1} \cdot F^{-1} \cdot A$$

$$B_{N\times 1} = S_{N\times N} \cdot A_{N\times 1};$$

$$\boxed{S = F \cdot (Z - G) \cdot (Z + G)^{-1} \cdot F^{-1}} \qquad \boxed{(2)}$$

- S matriz de dispersión que depende de la unión y de los planos de referencia
- Si todas las impedancias de referencia fueran iguales a la característica , podríamos normalizar dichas impedancias haciéndolas igual a la unidad. En ese caso, se podría escribir la matriz S como sigue:

$$S = (Z - \Delta) \cdot (Z + \Delta)^{-1}$$

SIMETRÍA DE LA MATRIZ DE DISPERSIÓN

- La matriz S de un circuito pasivo, lineal e isótropo es simétrica: $S=S^T$

$$S = S^T$$

$$F \cdot (Z-G) \cdot (Z+G)^{-1} \cdot F^{-1} = \left[F \cdot (Z-G) \cdot (Z+G)^{-1} \cdot F^{-1}\right]^T$$

$$F \cdot (Z-G) \cdot (Z+G)^{-1} \cdot F^{-1} = \left(F^{-1}\right)^T \cdot \left((Z+G)^{-1}\right)^T \cdot \left((Z-G)\right)^T \cdot F^T$$

  – Las matrices F y G son diagonales, la matriz Z es simétrica

$$F \cdot (Z-G) \cdot (Z+G)^{-1} \cdot F^{-1} = F^{-1} \cdot (Z+G)^{-1} \cdot (Z-G) \cdot F$$

  – Cambiando de término los inversos, resulta:

$$(Z+G) \cdot F \cdot F \cdot (Z-G) = (Z-G) \cdot F \cdot F \cdot (Z+G)$$

  – Operando, llegamos a:

$$2Z \cdot F \cdot F \cdot G = 2G \cdot F \cdot F \cdot Z$$

  – Que, haciendo uso del hecho de las matrices que son diagonales, resulta:

$$S = S^T$$

  – La reciprocidad del circuito se manifiesta en la simetría de S

CONDICIONES FÍSICAS PARA LA EXISTENCIA DE S (I)

- De la expresión (1), podemos poner:

$$\left.\begin{aligned} V &= \sqrt{2\cdot Z_0}\cdot(\Delta+S)\cdot A = H\cdot(\Delta+S)\cdot A \\ I &= \sqrt{\frac{2}{Z_0}}\cdot(\Delta-S)\cdot A = K\cdot(\Delta-S)\cdot A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} V^H &= A^H\cdot\left(\Delta+S^H\right)\cdot H \\ I^H &= A^H\cdot\left(\Delta-S^H\right)\cdot K \end{aligned}\right.$$

- Hallando la potencia y su expresión conjugada resulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}I^H\cdot V &= A^H\cdot\left(\Delta-S^H\cdot S-S^H+S\right)\cdot A = P+2jw(W_H-W_E) \\ \frac{1}{2}V^H\cdot I &= A^H\cdot\left(\Delta-S^H\cdot S-S+S^H\right)\cdot A = P-2jw(W_H-W_E) \end{aligned}\right\}$$

- Sumando y restando miembro a miembro se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} A^H\cdot\left(\Delta-S^H\cdot S\right)\cdot A &= P \\ A^H\cdot\left(S-S^H\right)\cdot A &= 2jw(W_H-W_E) \end{aligned}\right\}$$

CONDICIONES FÍSICAS PARA LA EXISTENCIA DE S (II)

- Consecuencias
  - Terminación pasiva:

$$P \geq 0; \Rightarrow \left(\Delta - S^H \cdot S\right) definida\_positiva$$

  - No disipativa:

$$P = 0; \Rightarrow \left(\Delta - S^H \cdot S\right) = 0 \Rightarrow \Delta = S^H \cdot S \Rightarrow Sunitaria$$

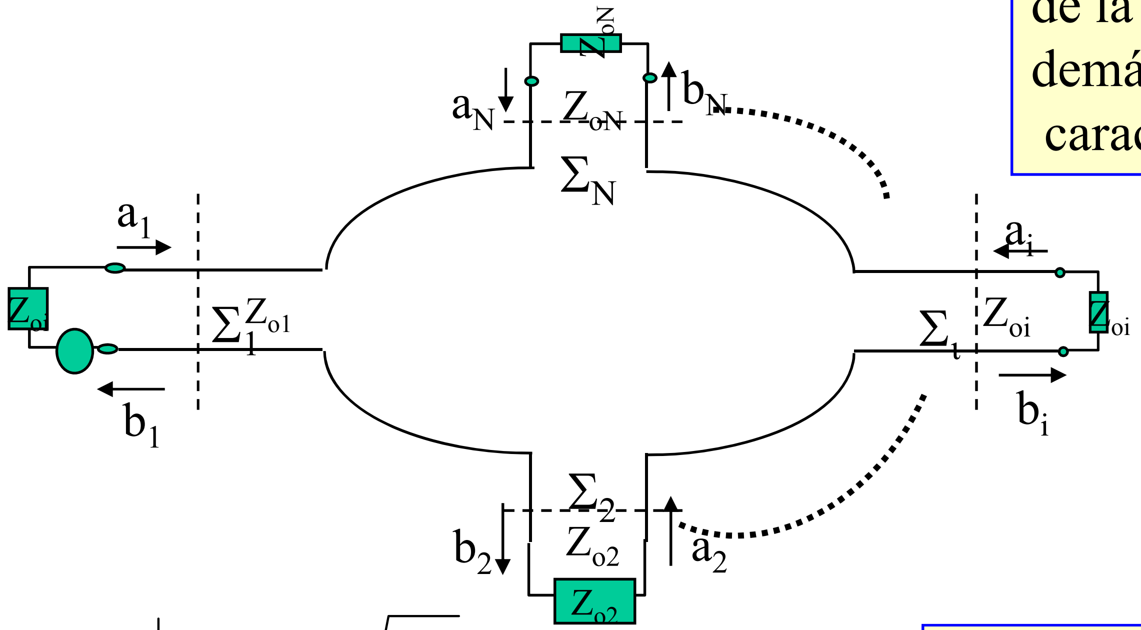
    - Resonancia: matriz de dispersión real $S = S^H$
    - Cuando todos los menores de la matriz Im(S) sean positivos, entonces:

$$W_H > W_E \Rightarrow \{\mathrm{Im}(S)\} definida\_positiva$$

    - Cuando todos los menores de la matriz -Im(S) sean positivos, entonces:

$$W_H < W_E \Rightarrow \{-\mathrm{Im}(S)\} definida\_positiva$$

SIGNIFICADO FÍSICO DE LOS PARÁMETROS S



Coeficiente de reflexión de potencia de la puerta i cuando se cargan las demás puertas con la impedancia característica

$$s_{ii} = \left.\frac{b_i}{a_i}\right|_{Z_{j\neq i}=Z_{oj}} = \frac{V_i^-}{V_i^+}$$

$$|s_{ii}|^2 = \frac{|b_i|^2}{|a_i|^2} = \frac{P_i^-}{P_i^+}$$

$$s_{ki} = \left.\frac{b_k}{a_i}\right|_{Z_{k\neq i}=Z_{ok}} = \frac{\sqrt{Z_{oi}}\cdot V_k^-}{\sqrt{Z_{ok}}\cdot V_i^+}$$

$$|s_{ki}|^2 = \frac{|b_k|^2}{|a_i|^2} = \frac{P_k^-}{P_i^+}$$

Coeficiente de transmisión de potencia de la puerta i a la puerta k cuando se cargan con la impedancia característica todas las puertas menos la i

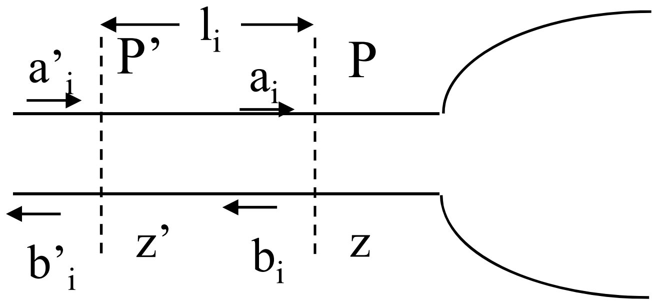
CONCEPTO DE CIRCUITO ADAPTADO

- Medida del parámetro de adaptación en una puerta de una unión de guías:
  - Proceso: cerramos todas las puertas de una unión, menos una, con cargas sin reflexión: $a_2 = a_3 = \ldots = a_N = 0$
  - La nueva matriz de dispersión se reduce a: $b_1 = s_{11} a_1$
  - Obtención del parámetro de adaptación de esa puerta 1.
- Definición de terminación adaptada: $s_{11}=0$
- Concepto de adaptación: Si en una unión de guías de onda $s_{nn} = 0$, la unión está adaptada desde la guía n.
- Si son nulos todos los elementos diagonales de la matriz S, la unión está completamente adaptada.
- El hecho de que una unión esté adaptada significa que toda la potencia que se introduce por cada puerta, se consume efectivamente en el circuito, sin que haya potencia reflejada por dicha puerta.

CONCEPTO DE CIRCUITO ACOPLADO, DESACOPLADO Y DEGENERADO

- Medida del parámetro de acoplamiento entre dos puertas de una unión de guías:
  - Objetivo: queremos medir el acoplamiento entre la puerta i y la puerta j; es decir cuánta de la potencia que entra por i sale por j, es decir el parámetro s_{ji}.
  - Proceso: cerramos todas las puertas de una unión, menos una, con cargas sin reflexión: $a_1 = a_2 = \ldots = a_j = \ldots = a_N = 0$; $a_i \neq 0$.
  - La nueva matriz de dispersión se reduce a: $b_j = s_{ji} a_i$
  - Obtención del parámetro de acoplamiento de esa puerta i a la puerta j.
- Concepto de puerta acoplada y desacoplada:
  - Si el parámetro $s_{ji}=0$, la puerta j se encuentra desacoplada de la i: no se transmite energía de la puerta i a la puerta j.
  - Si el parámetro $s_{ji} \neq 0$, la puerta j se encuentra acoplada con la i: se transmite energía de la puerta i a la puerta j.
- Concepto de circuito degenerado:
  - Si en una unión de N guías existe un subconjunto de K guías que se encuentran totalmente desacopladas del subconjunto complementario de (N-K) guías, entonces, se dice que la unión es degenerada.
  - En estas condiciones el subconjunto de K guías no transmite potencia al de (N-K).

TRANSFORMACIÓN DE LA MATRIZ DE DISPERSIÓN POR UN CAMBIO DE PLANO DE REFERENCIA



$$\begin{cases} a_i = a \cdot e^{-j\beta_i z} \\ b_i = b \cdot e^{j\beta_i z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'_i = a \cdot e^{-j\beta_i z'} \\ b'_i = b \cdot e^{j\beta_i z'} \end{cases} \xrightarrow{sentido\_de\_onda\_progresiva} z = z' + l_i$$

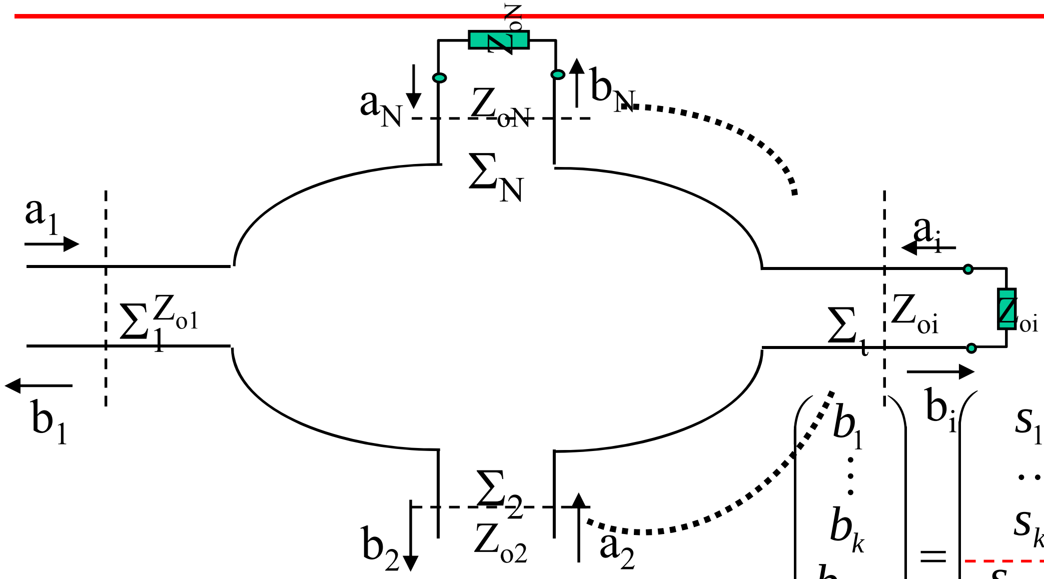
$$\begin{cases} a_i = a'_i \cdot e^{-j\beta_i l_i} \\ b_i = b'_i \cdot e^{j\beta_i l_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = P \cdot A' \\ B' = P \cdot B \end{cases} \Rightarrow P = diag\left(e^{-j\beta_i l_i}\right)$$

$$B' = P \cdot S \cdot A = P \cdot S \cdot P \cdot A' = S' \cdot A'$$

$$S' = P \cdot S \cdot P$$

Cuando nos movemos hacia ***fuera*** en un circuito de N guías (del plano P al P') la nueva matriz de dispersión resulta de multiplicar por una matriz P diagonal, a ambos lados de la matriz inicial S.

CIERRE DE UNA UNIÓN DE GUÍAS DE ONDAS CON VARIOS DIPOLOS



$$B = S \cdot A \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ b_{k+1} \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} s_{11} & \cdots & s_{1k} & \cdots & \cdots & s_{1N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k1} & \cdots & s_{kk} & \cdots & \cdots & s_{kN} \\ \hline s_{(k+1)1} & \cdots & \cdots & s_{(k+1)(k+1)} & \cdots & s_{(k+1)N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{(k+1)N} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & s_{NN} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{N}_{11} & \overline{N}_{12} \\ \overline{N}_{21} & \overline{N}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{A}_1 \\ \overline{A}_2 \end{pmatrix} con \begin{cases} \Gamma_n = \dfrac{a_n}{b_n}; [\Gamma_C]_{(N-k)\times(N-k)} = [\Gamma_C] = diag(\Gamma_n) \\ \overline{A}_2 = [\Gamma_C] \cdot \overline{B}_2; \overline{B}_2 = [\Gamma_C]^{-1} \cdot \overline{A}_2 \end{cases}$$

$$\overline{B}_1 = \left[\overline{N}_{11} - \overline{N}_{12} \cdot \left(\overline{N}_{22} - \Gamma_C^{-1}\right)^{-1} \cdot \overline{N}_{21}\right] \cdot \overline{A}_1 = \overline{S}_{de} \cdot \overline{A}_1$$

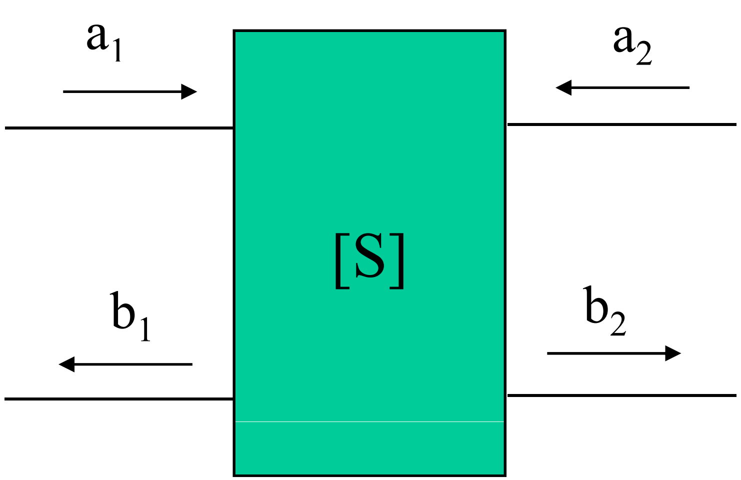
La nueva unión degenerada tiene una matriz S (S_{de}) que se puede poner en función de la matriz S de la unión no degenerada

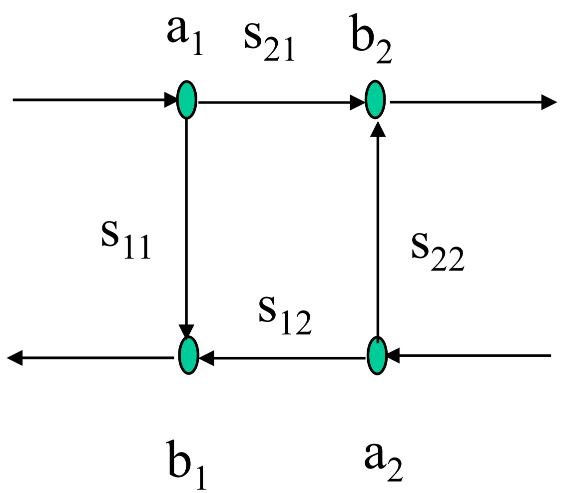
CONCLUSIONES

- La definición de los parámetros S ha venido motivada por la necesidad de obtener unos parámetros que relacionasen de forma clara los parámetros susceptibles de ser medidos en un circuito de microondas: relaciones entre potencias transmitidas y reflejadas (ROE y reflexión en este último caso).
- Las ondas de potencia son invariantes en amplitud mediante una transformación de los planos de referencia.
- La matriz S indica de forma sencilla la distribución de potencia entre las puertas del circuito.
- Los parámetros S se miden en condiciones de adaptación de las puertas mientras que los Y o Z se miden en cortocircuito o circuito abierto.

APÉNDICE: TEORÍA DE GRAFOS (I)

- Es una técnica adicional a la de parámetros S para medir las características de circuitos en términos de potencias transmitidas y reflejadas.
- Elementos de un grafo:
  - Nodo: cada puerto de una red tiene dos nodos, uno asociado a una onda entrante (a) y otro asociado a una onda saliente (b).
  - Rama es el camino directo entre un nodo a y un nodo b. Cada rama tiene asociado un parámetro S de transmisión o de reflexión.
- Ejemplo de un cuadripolo:





TEORÍA DE GRAFOS (II): reglas

- Conexión en serie: Dos ramas que tienen un nodo común con una sola entrada y una salida pueden juntarse en una única rama cuyo coeficiente es el producto de las dos ramas.
- Conexión en paralelo: Dos ramas con un único nodo común pueden combinarse en una rama única cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes.
- Lazo realimentado: Cuando un nodo se autorealimenta con un coeficiente de reflexión dado (s), dicho lazo puede eliminarse multiplicando la rama previa por 1/(1-s).
- Regla de desplazamiento: Un nodo puede descomponerse en dos nodos separados mientras que cada combinación de ramas separadas contenga una y sólo una combinación de cada nodo.

BIBLIOGRAFÍA

- K. Kurokawa: Power Waves and the Scattering Matrix, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, March 1965
- Robert E. Collin: "Foundations for microwave engineering" New York McGraw-Hill, 1992. (capítulo 4)
- David M.Pozar: "Microwave Engeneering" Second Edition 1998, John Wiley&Sons. (capítulo 4)
- Rafael Domínguez: Cuestiones Básicas de Electromagnetismo, Aplicación a la Técnica de Microondas. Consejo Superior Investigaciones Científicas.
- Miranda, Sebastián, Sierra, Margineda: “Ingeniería de Microondas: Técnicas Experimentales” Prentice Práctica 2002.