Informática
Año 2015/2016
Facultad de CC. Matemáticas

Hoja de ejercicios 1

Expresiones

13 de noviembre de 2015

▷ 1. Términos generales

Estudia las siguientes sucesiones y escribe una expresión que calcule el término general de cada una de ellas.

1. 3, 8, 13, 18, 23...
2. 1, -1, 1, -1, 1...
3. 1, 1, 2, 3, 5, 8...
4. 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1...
5. -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1...

Solución

1. $s_n = 3 + 5(n-1)$

```
3+5*(n-1)
```

2. $s_n = -1^n$

```
(-1)**n
```

```
1-2*(n%2)
```

3. $s_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$, donde φ es la razón áurea $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ¿Quieres saber de donde sale? Consulta la wikipedia:
http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number#Closed_form_expression

```
goldenRatio = (1+math.sqrt(5))/2
d_fib = (goldenRatio**n-(1-goldenRatio)**n)/math.sqrt(5)
int(round(d_fib))
```

4. $s_n = n \bmod 4 + 1$

```
n%4+1
```

5. $s_n = n \bmod 3 - 1$

```
n%3-1
```

Puedes encontrar más información sobre sucesiones de números enteros en
http://www.research.att.com/~njas/sequences/

▷ **2. Cuadrados perfectos**

Los cuadrados perfectos son los números 1, 4, 9, 16, …, esto es, los cuadrados de los números naturales: 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, …

Cuadrado perfecto Encuentra una expresión, o una secuencia sencilla de instrucciones, adecuada para averiguar si un número natural m es un cuadrado perfecto, o sea, si es de la forma

$$m = n^2$$

para algún natural n.

Cuadrado perfecto previo Encuentra una expresión que, para un número m entero, averigüe el número n mayor posible pero que no supere a m, (o sea, $n \leq m$) y sea cuadrado perfecto.

Notas bibliográficas El libro *El diablo de los números, un libro para todos aquéllos que temen a las matemáticas* [Enz01] es ameno y contiene bellas ilustraciones. En él podrás encontrar curiosidades, definiciones e historias acerca de varias sucesiones de números, entre ellas los cuadrados perfectos, los números triangulares, la sucesión de Fibonacci…

Solución

Cuadrado perfecto Empezamos por calcular la raíz de m, redondeada al entero más próximo n, mediante la siguiente instrucción:

```
n = int(math.sqrt(m))
```

Se ha de suponer el requisito previo de que m es positivo: el cálculo de la raíz cuadrada exige esta condición.

Ahora, si m es un cuadrado perfecto, este redondeo no tendrá mayor efecto que convertir en entera una cantidad real, sin alterar su valor; por tanto, se tendrá $n^2 = m$. De lo contrario, el redondeo cambiará el valor de la raíz, de forma que al elevar n^2 no se llegará a m, sino a otro número distinto. Por tanto, después de la instrucción anterior, la expresión lógica `n*n == m` indica si es m un cuadrado perfecto o no.

Por tanto la función necesaria es

```
from math import sqrt

def perfect_square(n):
    m = int(sqrt(n))
    return m * m == n
```

Cuadrado perfecto previo Dado m un número real, se trata de buscar un n menor que m que sea cuadrado perfecto, esto es, un entero de la forma $n = k^2$ para algún k. Si escribimos las condiciones en función de k tenemos:

$$k^2 \leq m < (k+1)^2$$

o lo que es equivalente:

$$k \leq \sqrt{m} < (k+1)$$

El valor de k puede obtenerse con la expresión:

```
k = int(math.sqrt(m))
```

y por tanto el valor de n es k^2:

```
n = k*k;
```

Por tanto la función necesaria es

```
def previous_square(n):
    k = int(sqrt(n))
    return k*k
```

▷ **3. Ser o no ser. . . triángulo**

Dadas tres cantidades reales positivas, se quieren dilucidar las siguientes situaciones:

¿Es un triángulo? Si los valores de dichas cantidades pueden corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo (quizá la figura 1 pueda ayudarte).

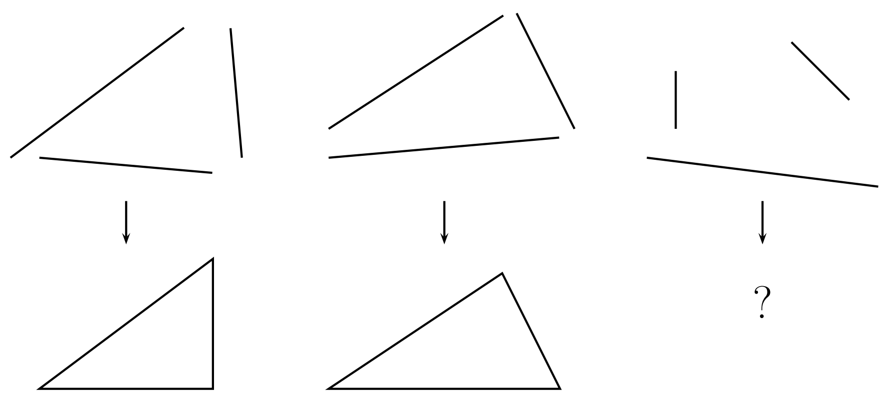


Figura 1: Construcción de triángulos a partir de sus lados

¿Es escaleno? En el caso de que las medidas puedan corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo, si dicho triángulo es escaleno.

¿Es equilátero? En el caso de que las medidas puedan corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo, si dicho triángulo es equilátero.

¿Es isósceles? En el caso de que las medidas puedan corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo, si dicho triángulo es isósceles.

Solución

Supongamos que tres variables `a,b` y `c` contienen las longitudes de los segmentos a considerar.

¿Es un triángulo? Estas medidas pueden representar las longitudes de los lados de un triángulo si la suma de dos de ellas es mayor que la otra. El resultado de la expresión que determina este aspecto lo almacenamos en la variable `esTriangulo` porque lo vamos a utilizar en el resto de los apartados:

```
esTriangulo = (a + b > c) and (a + c > b) and (c + b > a)
```

¿Es escaleno? Pueden corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo escaleno precisamente si los tres lados son distintos entre sí:

```
esEscaleno = esTriangulo and (a != b) and (b != c) and (a != c)
```

¿Es equilátero? Pueden corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo equilátero si los tres lados son iguales:

```
esEquilatero = esTriangulo and (a == b) and (b == c)
```

¿Es isósceles? Pueden corresponder a las longitudes de los lados de un triángulo isósceles si al menos dos lados son iguales:

```
esIsosceles = esTriangulo and (((a == b) and (a != c)) or
                                      ((b == c) and (b != a)) or
                                      ((a == c) and (a != b)))
```

O por eliminación:

```
esIsosceles = esTriangulo and  not esEscaleno and not esEquilatero;
```

▷ 4. Conversiones

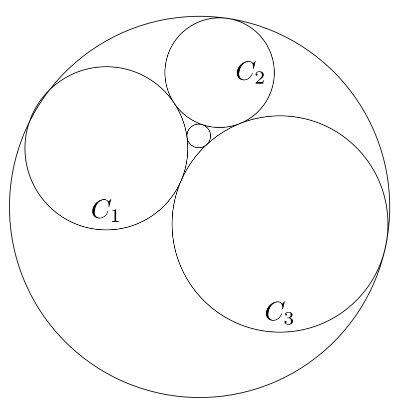
Es frecuente tener que convertir de unas unidades de medida a otras. Escribe expresiones para:

- pasar de kilogramos a gramos, dada una cantidad m que representa un peso en kilogramos, dar su equivalente en gramos;
- pasar de kilogramos a libras;
- pasar de grados Celsius a grados Fahrenheit.

Escribe tambien expresiones que sirvan para dar las transformaciones inversas a las anteriores.

▷ 5. El beso exacto

Como puedes ver en el dibujo, dados tres círculos, C_1, C_2 y C_3, tangentes entre sí dos a dos, existen exactamente dos círculos que son tangentes a los tres anteriores:



Hay una fórmula que permite calcular el radio de estos círculos tangentes: si tenemos cuatro círculos C_1, C_2, C_3 y C_4, tangentes entre sí, con radios r_1, r_2, r_3 y r_4, respectivamente, entonces se verifica la fórmula

$$2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2) = (s_1 + s_2 + s_3 + s_4)^2$$

donde $s_i = 1/r_i$. No hay magia alguna; de esta fórmula resultan dos soluciones porque es una ecuación de segundo grado. La solución de menor valor absoluto siempre es positiva, da el radio del círculo menor. La otra es negativa si el círculo al que corresponde *encierra* a los otros tres. Si aparece como solución $s_4 = 0$ (o sea,$r_4 = \infty$), tendremos que el círculo tangente correspondiente se ha *convertido* en una recta.

Utiliza esta propiedad para escribir un programa que, dados los radios de tres círculos tangentes entre sí, calcule el radio de los dos círculos que son tangentes a los tres anteriores.

Un poco de historia La fórmula que hemos utilizado ha sido descubierta y redescubierta varias veces a lo largo de la historia. Se cree que los griegos ya la conocían. René Descartes (1596–1650) la demostró. Actualmente se conoce como la fórmula de Soddy, en honor al químico Frederick Soddy (1877–1956) que la volvió a demostrar en 1936. Una curiosidad: Soddy obtuvo el premio Nobel de química en 1921 y fué quien acuñó el término *isótopo*.

Soddy *demostró* el teorema con un poema titulado *The Kiss Precise*. Te mostramos la segunda estrofa del poema, en la columna de la izquierda, y, a la derecha, una traducción que aparece en [Gar94].

Four circles to the kissing come.	Cuatro círculos llegaron a besarse,
The smaller are the benter.	es el menor el más curvado.
The bend is just the inverse of	La curvatura no es sino la inversa
The distance form the center.	de la distancia desde el centro.
Though their intrigue left Euclid dumb	Aunque este enigma a Euclides asombrara
There's now no need for rule of thumb.	las reglas empíricas no son necesarias.
Since zero bend's a dead straight line	Como la recta tiene curvatura nula
And concave bends have minus sign,	y las curvas cóncavas tienen signo menos,
The sum of the squares of all four bends	la suma de los cuadrados de las cuatro curvaturas
Is half the square of their sum.	es igual a la mitad del cuadrado de su suma.

Notas bibliográficas Frederick Soddy dió la demostración de esta fórmula en 1936, en forma de poema [Sod36]. El poema puede encontrarse en Internet, por ejemplo, en la dirección: http://www.pballew.net/soddy.html

Solución

Habrá que empezar echando unas pocas cuentas. Como indica el enunciado, supondremos dados los círculos C_1, C_2 y C_3. Conoceremos sus radios y habrá que averiguar el radio de un cuarto círculo tangente. Por tanto, hay que despejar s_4 en la fórmula de Soddy. Para simplificar el álgebra, definimos $a = s_1 + s_2 + s_3$ y $b = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$. La fórmula de Soddy queda

$$2(b + s_4^2) = (a + s_4)^2.$$

Desarrollando obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$s_4^2 - 2as_4 + (2b - a^2) = 0.$$

Aunque andábamos buscando el radio de un círculo tangente, esta ecuación nos da dos soluciones y, sin más trabajo, ya tenemos los radios de los dos círculos tangentes:

$$s_4 = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(2b - a^2)}}{2} = a \pm \sqrt{2a^2 - 2b}.$$

Generalmente, hay que tener cuidado a la hora de resolver ecuaciones de segundo grado en un programa porque el discriminante puede ser negativo y, por ende, tener soluciones complejas. En este caso, como r_i es siempre mayor que cero, se tiene que $2a^2 - 2b > 0$. Podemos calcular sin temor, tal y como hacemos en el siguiente código:

```
from math import sqrt

def radio_tangentes(r1,r2,r3):
    s1 = 1.0/r1 # el 1.0 es para asegurarse
```

```
s2 = 1.0/r2 # de que la division es la
s3 = 1.0/r3 # division entre reales
a = s1 + s2 + s3
b = s1*s1 + s2*s2 + s3*s3
raiz = sqrt(2*a*a - 2*b)
return 1/(a+raiz),abs(1/(a-raiz))
```

▷ **6. Los siete mensajeros**

(*) El relato de *Los siete mensajeros* de Dino Buzzati (1906–1972) contiene el siguiente fragmento:

> Partí a explorar el reino de mi padre, pero día a día me alejo más de la ciudad y las noticias que me llegan se hacen cada vez más escasas. [...]
>
> Aunque despreocupado —¡mucho más de lo que lo soy ahora!—, pensé en el modo de comunicarme con mis allegados y, de entre los caballeros de mi escolta, elegí a los siete mejores para que me hicieran de mensajeros. [...]
>
> Poco habituado a estar lejos de casa mandé al primero, Alejandro, la noche del segundo día de viaje, cuando habíamos recorrido ya unas ochenta leguas. Para asegurarme la continuidad de las comunicaciones, la noche siguiente envié al segundo, luego al tercero, luego al cuarto, y así de forma consecutiva hasta la octava noche del viaje, en que partió Gregorio. El primero aún no había vuelto.
>
> Éste nos alcanzó la décima noche, mientras nos hallábamos plantando el campamento para pernoctar en un valle deshabitado. Supe por Alejandro que su rapidez había sido inferior a la prevista; yo había pensado que, yendo solo y montando un magnífico corcel, podría recorrer en el mismo tiempo el doble de distancia que nosotros; sin embargo, sólo había podido recorrer la equivalente a una vez y media; [...] lo mismo ocurrió con los demás. Bartolomé, que partió hacia la ciudad la tercera noche de viaje, volvió a la decimoquinta. Cayo, que partió la cuarta, no regresó hasta la vigésima.

Escribe una expresión que permita calcular cuándo regresará un mensajero conociendo el día del viaje en el que se encuentra en el momento de su partida. Es decir, conocido el día de partida de un mensajero, la expresión deberá anunciar el día de su llegada.

Solución

Si lees el relato encontrarás la solución numérica al mismo:

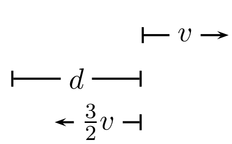
> Pronto comprobé que bastaba multiplicar por cinco los días empleados hasta el momento para saber cuándo nos alcanzaría el mensajero.

Para justificar por qué hace falta multiplicar por cinco el número de días trascurridos tendrás que echar mano de tus conocimientos de física básica:

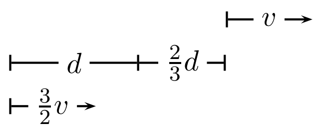
$$\text{velocidad} = \text{espacio} \;/\; \text{tiempo}$$

A continuación te damos un esquema de la solución. Completa los pasos intermedios.

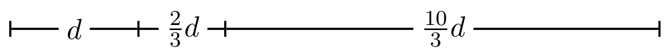
Estando en el día d de viaje, la expedición continúa con velocidad v y el mensajero vuelve al punto de origen con velocidad $\frac{3}{2}v$.



Cuando el mensajero llega al origen la expedición ha avanzado $\frac{2}{3}d$. En ese momento, el mensajero regresa con velocidad $\frac{3}{2}v$ y la expedición, como siempre, continúa con velocidad v.



Cuando el mensajero alcanza nuevamente a la expedición ha necesitado $\frac{10}{3}d$.



Por tanto, el número de día en el que alcanza el mensajero la expedición es $d + \frac{2}{3}d + \frac{10}{3}d$. Es decir, 5 veces el número d que eran los días de viaje que se llevaban en el momento de la partida del mensajero.

▷ 7. Rectángulos

(*) Teniendo en cuenta que un rectángulo se puede representar en un plano a partir de cuatro puntos, considera las siguientes cuestiones:

¿Es un rectángulo? Escribe una expresión que determine si dados cuatro puntos del plano, éstos pueden representar los vértices de un rectángulo.

Pista: La distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) vale $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Pista: Recuerda que en un rectángulo los lados deben ser de igual longitud dos a dos y también ambas diagonales deben ser de la misma longitud.

Centro de un rectángulo Supongamos que tenemos las coordenadas de cuatro puntos que representan un rectángulo. Escribe dos expresiones que nos den las coordenadas del centro del rectángulo.

Solución

Elegimos las variables que contendrán las coordenadas:

```
ax, ay, bx, by, cx, cy, dx, dy
```

Supondremos que hay cuatro puntos, que denominaremos a, b, c y d. La variable `ax` contendrá la coordenada x del punto a y la variable `ay` contendrá la coordenada y de dicho punto. El resto de las variables sigue la misma pauta.

¿Es un rectángulo? Se puede encontrar una solución fácil si sabemos el orden en el que están introducidos los puntos, pues podríamos comparar las coordenadas directamente. Pero se puede encontrar una expresión que nos diga cuando cuatro puntos forman un rectángulo sin exigir dicha condición.

Sean a, b, c y d cuatro puntos pertenecientes al plano. Si estos cuatro puntos formaran un cuadrado entonces la distancia de uno de ellos a cualquier otro sería igual a la distancia de los dos puntos no involucrados. Es decir, si llamamos $d()$ a la función que calcula la distancia, entonces se tiene que verificar que

$$d(a, b) = d(c, d)$$

y esto debe ocurrir sea cual sea el par de puntos elegido, es decir, también se tiene que verificar que

$$d(a, c) = d(b, d)$$

y que

$$d(a, d) = d(b, c)$$

Estas propiedades no son sólo una condición necesaria sino también suficiente y por tanto caracterizan los rectángulos en el plano.

Utilizando este hecho podemos dar valor a las variables reales que almacenaran el valor de las distancias entre puntos, por ejemplo `dbc` almacenará la distancia de del punto b al c, es decir $d(a, c)$.

```
dab = math.sqrt((ax - bx)**2 + (ay - by)**2)
dac = math.sqrt((ax - cx)**2 + (ay - cy)**2)
dad = math.sqrt((ax - dx)**2 + (ay - dy)**2)
dbc = math.sqrt((bx - cx)**2 + (by - cy)**2)
dbd = math.sqrt((bx - dx)**2 + (by - dy)**2)
dcd = math.sqrt((cx - dx)**2 + (cy - dy)**2)
```

La expresión que determina si cuatro puntos forman un rectángulo y almacena el valor en la variable booleana `rectangulo` es la siguiente:

```
rectangulo = (dab == dcd) and (dac == dbd) and (dad == dbc)
```

Centro Si suponemos que los vértices están ordenados podemos calcular las coordenadas del centro de la siguiente forma:

- Calculamos las coordenadas del punto medio del lado ab, $mab = ((ax+bx)/2, (ay+by)/2)$. Lo mismo para el lado cd, $mcd = (((cx + dx)/2, (cy + dy)/2))$.
- Calculamos las coordenadas del punto medio entre mab y mcd, ese es el centro del rectángulo:

$$c = ((ax + bx + cx + dx)/4, (ay + by + cy + dy)/4).$$

Basta que observemos que el orden en que tengamos los puntos no tiene ninguna importancia para la expresión resultante.

▷ 8. Expresiones en Python

Considera las siguientes funciones definidas en Python

```
def f1(a, b):
    return a + b
```

```
def f2(a, b):
    s = 0.0
    s = s + a
    s = s + b
    return s / 2
```

```
def f3(s):
    return "hola " + s
```

```
def f4(s):
    return s*5
```

```
def f5(a, b, c):
    return a % b + c
```

```
def f6(a, b, c):
    return a % b * c
```

```
def f7(a, b, c):
    return a * b // c
```

```
def f8(a, b, c, d):
    return a * b // c + d
```

```
def f9(x, y):
    num = abs(x - y)
    den = math.sqrt(x**2 + y**2)
    return num / den
```

Indica si son correctas las siguientes llamadas y en caso afirmativo indica el valor y el tipo que tienen:

1) `f1(1,2)`	2) `f1(1.2, 3)`	3) `f1("Hola", "Juan")`	4) `f1("Hola", 2)`
5) `f2(1,2)`	6) `f2(1.2, 3)`	7) `f2("Hola", "Juan")`	8) `f2("Hola", 2)`
9) `f3("Juan")`	10) `f3(4)`	11) `f4("Hola")`	12) `f4(5)`
13) `f5(7,23,2)`	14) `f5(7, 23, 2.0)`	15) `f5(6, 0, 2)`	16) `f5(6, 2, 0)`
17) `f6(7,23,2)`	18) `f6(7, 23, 2.0)`	19) `f6(6, 0, 2)`	20) `f6(6, 2, 0)`
21) `f7(7,23,2)`	22) `f7(7, 23, 2.0)`	23) `f7(6, 0, 2)`	24) `f7(6, 0, 2)`
25) `f8(2,3,4,5)`	26) `f8(2,3,0,5)`	27) `f8(2,3,4,5.0)`	
28) `f9(4,5)`	29) `f9(400,500)`	30) `f9(0,0)`	

Referencias

[Enz01] Hans Magnus Enzensbergen. *El diablo de los números: un libro para todos aquéllos que temen a las matemáticas*. Siruela, 2001.

[Gar94] Martin Gardner. *Nuevos pasatiempos matemáticos*. Alianza, 1994.

[Sod36] Frederick Soddy. The kiss precise. *Nature*, (137), June 1936.