MATEMÁTICAS

1^0 DEL GRADO EN CIENCIAS AMBIENTALES
CURSO 13-14

Hoja de problemas del TEMA 5

1. Determinar si las siguientes funciones y relaciones son solución de las correspondientes ecuaciones diferenciales:

(a)	$y = Ce^{4x}, \qquad \frac{dy}{dx} = 4y$	(b)	$x^2 + y^2 = 4, \qquad y' = \frac{x}{y}$
(c)	$x^2 + y^2 = Cy, \qquad y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$	(d)	$y = 3\cos(2x), \qquad y^{(4)} - 16y = 0$
(e)	$2x^2 + 3y^2 = C, \qquad 2x + 3yy' = 0$	(f)	$y = C_1 + C_2\ln(x), \qquad xy'' + y' = 0$

2. Demostrar que $\phi(x) = Ce^{3x} + 1$ es una solución de la ecuación diferencial

$$y' - 3y = -3$$

para cualquier valor de la constante C.

3. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones de variables separables:

(a)	$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2}{3y^2}$	(b)	$xy' = y$
(c)	$(4y + yx^2)y' = 2x + xy^2$	(d)	$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}$
(e)	$\sin(3x)dx + 2y\cos^3(3x)dy = 0$	(f)	$\frac{dy}{dx} = 1 - x + y^2 - xy^2$

4. Calcular la solución particular de los siguientes problemas de valor inicial:

(a)	$\frac{dy}{dx} + xy = y, \qquad y(1) = 3$	(b)	$y\frac{dy}{dx} + (1+y^2)\sin x = 0, \qquad y(0) = 1$
(c)	$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y+y^2}, \qquad y(2) = 3$	(d)	$\frac{dy}{dx} = k(a-y)(b-y), \qquad y(0) = 0, \quad a, b > 0$
(e)	$\cos y\frac{dy}{dx} = \frac{x\sin y}{1+x^2}, \qquad y(1) = \frac{\pi}{2}$	(f)	$(1+x^4)dy + x(1+y^2)dx = 0, \qquad y(1) = 0$

5. La función $Q(t)$ representa la proporción de un producto químico que ha sido absorbida por una membrana porosa tras un tiempo t (horas). La tasa de absorción es $\frac{dQ}{dt} = t\,e^{-t}$.

   (a) Si inicialmente no se había producido absorción, calcular la proporción absorbida tras 5 horas, y tras 10 horas.

   (b) Calcular $\lim_{t\to\infty} Q(t)$ e interpretar el resultado.

6. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

(a)	$y' + \frac{1}{x}y + x^2 = 0,$	(b)	$y' = \frac{xy}{x^2-1} - x,$
(c)	$y' - \frac{x+1}{x}y = x(1-x)$	(d)	$y' - \frac{y}{x} - \frac{3}{2x^2} = 0.$

7. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

(a)	$(3ye^{3x} - 2x)dx + e^{3x}dy = 0,$	(b)	$(y^2e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0,$
(c)	$(x+2y)dx = -(2x-3)dy,$	(d)	$\frac{1}{x^3y^2}dx + (\frac{1}{x^2y^3} + 2y)dy = 0.$

8. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a)	$(1+2y)dy - (4-x)dx = 0,$	(b)	$y' = \frac{x\cos y}{e^x\sin y},$
(c)	$(y\cos x + e^y)dx + (\sin x + xe^y + 1)dy = 0,$	(d)	$(\frac{1}{y^2} - \frac{y}{x^2})dx + (\frac{1}{x} - \frac{2x}{y^3} - 2)dy = 0,$
(e)	$4x^3ydx + x^4dy = 0,$	(f)	$y' + y = e^{-2x},$
(g)	$(3x^2 + 2y\sin 2x)dx + (2\sin^2 x + 3y^2)dy = 0$	(h)	$(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0,$
(i)	$e^ydx + x^2(2+e^y)dy = 0,$	(j)	$x^2dy - \cos^2 ydx = 0,$
(k)	$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0,$	(l)	$\sec^2 ydx + \cos^2 xdy = 0,$
(m)	$(3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 3y^2)dy = 0,$	(n)	$\ln(y^2+1)dx + \frac{2y(x-1)}{y^2+1}dy = 0$

SOLUCIONES

3. (a) $y^3 = \frac{x^3}{3} + 2x + C$ (b) $y = Cx$ (c) $2 + y^2 = k(4 + x^2)$ (d) $\sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+x^2} + C$
   (e) $y^2 = \frac{1}{6\cos^2(3x)} + C$ (f) $y = \tan(x - \frac{x^2}{2} + C)$

4. (a) $y(x) = 3e^{x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}$ (b) $\sqrt{\frac{1+y^2}{2}} = e^{\cos x - 1}$ (c) $\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} = x^2 + 8$ (d) $(\frac{a(b-y)}{b(a-y)})^{\frac{1}{b-a}} = e^{kx}$
   (e) $y = \arcsin\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}$ (f) $\arctan y = -\frac{1}{2}\arctan x^2 + \frac{\pi}{8}$

5. (a) $\approx 0{,}96,\ \approx 0{,}9995$ (b) 1.

6. (a) $y = -\frac{x^3}{4} + \frac{k}{x}$ (b) $y = -(x^2-1) + k\sqrt{x^2-1}$ (c) $y = x^2 + kxe^x$ (d) $y = -\frac{3}{4}\frac{1}{x} + kx$

7. (a) $ye^{3x} - x^2 = C$ (b) $e^{xy^2} + x^4 - y^3 = C$ (c) $\frac{x^2}{2} + 2yx - 3y = C$ (d) $-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2y^2} + y^2 = C$

8. (a) $y(1+y) = 4x - \frac{x^2}{2} + C$ (b) $\ln(\frac{1}{\cos y}) = xe^{-x} - e^{-x} + C$ (c) $y\sin x + xe^y + y = C$
   (d) $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x} - 2y = C$ (e) $y = \frac{1}{x^4C}$ (f) $y = (-e^{-x} + C)e^{-x}$ (g) $x^3 - y\cos 2x + y + y^3 = C$
   (h) $\frac{x^2}{2} + x^2y^2 + \frac{y^2}{2} = C$ (i) $\frac{1}{x} = -2e^{-y} + y + C$ (j) $\tan y = -\frac{1}{x} + C$
   (k) $\frac{x^2}{2}(1+y^2) + \frac{y^2}{2} = C$ (l) $\tan x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y + C$ (m) $2x^2y + y^3 + x^3 = C$
   (n) $(x-1)\ln(y^2+1) = C$