# Problemas del Tema 4

Vamos a aprovechar los ejercicios del Tema 4 para introducir algunos conceptos de probabilidad, que sin duda alguna serán útiles en el futuro. Supongamos que el resultado de un experimento viene descrito por una variable aleatoria $x$, cuyos valores posibles son $x_i$ con $i = 1, 2, 3, \ldots, N$. La probabilidad de obtener cada uno de estos resultados posibles viene dada por un número positivo $P(x_i)$, definido por el límite cuando el experimento se realiza un gran número de veces del cociente entre el número de veces que obtendremos cada resultado $x_i$, dividido por el número total de veces que se realiza en el experimento: es decir

$$P(x_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\text{ veces que obtenemos } x_i}{n}$$

siendo $n$ el número de veces que se realiza el experimento. En otras palabras, la probabilidad de $x_i$ es el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles. La función $P(x_i)$ es la función de probabilidad, y debe cumplir:

$$P(x_i) \geq 0, \qquad P(x_i) \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} P(x_i) = 1$$

La primera condición expresa que la probabilidad de un suceso no puede ser menor que cero (probabilidad cero implica que el suceso es imposible) ni mayor que la unidad (probabilidad 1 implica certeza absoluta) y la segunda que la probabilidad de todo el conjunto de sucesos posibles es la unidad.

Uno de los conceptos más empleados en física en relación a variables aleatorias y probabilidad es el de *valor medio*. Si repetimos el experimento un número $n$ elevado de veces, ¿qué valor de $x$ obtendremos en promedio? En principio cada uno de los resultados $x_i$ se obtendrá un número $nP(x_i)$ de veces (por definición esto es lo que encontraremos el el límite $n \to \infty$), de modo que el valor promedio que obtendremos está dado por

$$\langle x \rangle = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i n P(x_i)}{n} = \sum_{i=1}^{N} x_i P(x_i)$$

De manera análoga a como se calcula el promedio de $x$ podemos calcular el promedio de cualquier función de la variable $x$ (p. ej. el promedio de una función cualquiera $h(x)$), por medio de

$$\langle h(x) \rangle = \sum_{i=1}^{N} h(x_i) P(x_i)$$

en particular podemos calcular los promedios de todas las potencias positivas de $x$

$$\left\langle x^k \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i^k P(x_i), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

El promedio de $\left\langle x^k \right\rangle$ se suele definir como momento de orden $k$ de $x$, y se suele denotar por $\mu_k$.

Una vez que sabemos calcular promedios de cualquier función, podemos aplicar esta definición para calcular la distancia promedio entre el resultado de una medida y el resultado promedio. Si el resultado de una medida es $x_i$, la diferencia entre este resultado y el promedio es $x_i - \langle x \rangle$, el promedio de esta diferencia no es una medidad significativa de "la distancia promedio al promedio" ya que puede haber cancelación de valores negativos y positivos de esta diferencia. La forma correcta de estimar dicha distancia es calculando el valor promedio de la distancia al cuadrado

$$\sigma^2 = \left\langle (x_i - \langle x \rangle)^2 \right\rangle$$

que puede comprobarse muy fácilmente que está dada por

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

Este resultado se suele definir como *desviación cuadrática media* o *varianza*. A partir de este resultado la distancia promedio entre el resultado de una medida y el resultado promedio se estima por medio de $\sigma \equiv \sqrt{\sigma^2}$, y se suele definir como *desviación estándar*. De forma que si la desviación estándar de nuestra función de probabilidad es pequeña sabemos que es muy probable que el resultado de una medida individual sea próximo al promedio, mientras que si $\sigma$ es grande esto no tiene porqué cumplirse.

En particular, la desigualdad de Chebyshev muestra que la probabilidad de que nuestro resultado caiga fuera de un entorno de amplitud $m\sigma$ centrado en el promedio está dada por

$$P\left(|x - \langle x \rangle| \geq m\sigma\right) \leq \frac{1}{m^2}.$$

y por tanto disminuye rápidamente si $m$ aumenta.

Hasta ahora sólo hemos considerado variables aleatorias *discretas*, es decir, variables que sólo pueden tomar valores en un conjunto discreto (p. ej. un subconjunto de los números naturales). Si nuestra variable $x$ puede tomar valores en un conjunto *continuo* (p. ej. en un intervalo $[a, b]$ de la recta real), entonces la probabilidad por unidad de $x$ se define como *densidad de probabilidad* $f(x)$, de tal forma que la probabilidad de que obtengamos un resultado en el intervalo $[x, x + dx]$ está dada por

$$P[x, x + dx] = f(x)dx$$

Si la variable continua $x$ puede tomar valores en el intervalo $[a, b]$ de la recta real, entonces la densidad de probabilidad $f(x)$ debe cumplir (además de ser positiva) la condición de normalización

$$\int_a^b f(x)\, dx = 1.$$

Todos los conceptos introducidos antes para *variables discretas* se aplican directamente al caso de *variables continuas*, lo único que cambia (un poco) es la forma de hacer los cálculos. De tal forma que en el caso de una variable aleatoria $x$ con densidad de probabilidad $f(x)$, que puede tomar valores en el intervalo $[a,b]$ de la recta real, el promedio está dado por

$$\langle x \rangle = \int_a^b x\, f(x)\, dx$$

los momentos de la función de densidad de probabilidad están dados por

$$\mu_k = \left\langle x^k \right\rangle = \int_a^b x^k\, f(x)\, dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

y la desviación estándar $\sigma$ se calcula como $\sqrt{\sigma^2}$, donde la varianza está dada por

$$\sigma^2 = \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle = \mu_2 - \mu_1^2$$

Para verificar la última igualdad de forma rápida tenga en cuenta que la operación "calcular el promedio" es una operación lineal ($\langle a h(x) + b g(x) \rangle = a \langle h(x) \rangle + b \langle g(x) \rangle$).

Por último, en el caso de las funciones de probabilidad continuas aparece un problema interesante que no se daba en el caso de variables discretas:

⋆ Dada la función de probabilidad $f(x)$ y el cambio de variable $y = y(x)$ ¿cuál es la función de densidad de probabilidad ($g(y)$) en términos de la variable $y$?

Para hallar esta función de densidad de probabilidad en términos de $y$ sencillamente partimos de la probilidad de obtener un resultado en el entorno diferencial $[x, x + dx]$, dada por

$$dP = f(x)dx$$

El cambio de variable $x \to y = y(x)$ debe ser invertible, es decir, debe existir el cambio inverso $y \to x = x(y)$. Análogamente el elemento diferencial $dx$ se puede poner como $dx = \frac{dx(y)}{dy}dy$, lo que nos lleva a

$$dP = f[x(y)]\frac{dx(y)}{dy}dy$$

identificando este resultado con $g(y)dy$ obtenemos la regla para aplicar cambios de variable a funciones de densidad de probabilidad:

$$g(y) = f[x(y)]\frac{dx(y)}{dy}$$

## Ejercicio 1

Escriba una función en Maxima que calcule valores promedio de variables aleatorias discretas

*input*:
- Función de probabilidad de la variable discreta.
- Conjunto de valores posibles de la variable discreta.

*output*:
- Promedio.

## Ejercicio 2

Escriba una función en Maxima que calcule la desviación estándar de variables aleatorias discretas

*input*:
- Función de probabilidad de la variable discreta.
- Conjunto de valores posibles de la variable discreta.

*output*:
- Desviación estándar.

## Ejercicio 3

Escriba una función en Maxima que calcule el valor promedio de una variable aleatoria continua

*input*:
- Función de densidad de probabilidad de la variable continua.
- Intervalo de la recta real donde puede tomas valores la variable continua.

*output*:
- Promedio.

## Ejercicio 4

Escriba una función en Maxima que calcule la desviación estándar de una variable aleatoria continua

*input*:
- Función de densidad de probabilidad de la variable continua.
- Intervalo de la recta real donde puede tomas valores la variable continua.

*output*:
- Desviación estándar.