

# Tema 2: Respuesta temporal de sistemas continuos (II)

Especificaciones de la respuesta transitoria ( $T_p$ , %OS,  $T_s$ ) de un sistema de segundo orden subamortiguado a una entrada constante

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

Las siguientes expresiones relacionan los parámetros  $T_p$ , %OS,  $T_s$  con el coeficiente de amortiguamiento ( $\zeta$ ) y la frecuencia de oscilación natural del sistema ( $\omega_n$ )

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$\omega_d$       parte imaginaria de los polos ( $\omega_d$ )

$$\%OS = \frac{C_{max} - C_{final}}{C_{final}} \cdot 100 \implies \%OS = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

$\sigma_d$       parte real de los polos ( $\sigma_d$ )

La duración del periodo transitorio ( $T_s$ ) puede variarse ajustando  $\omega_n$  sin cambiar %OS

Para una respuesta rápida  $\omega_n$  debe ser grande

Para limitar %OS y hacer  $T_s$  pequeño  $\zeta$  no debe ser muy pequeño:  
 $0.4 < \zeta < 0.7 \implies 4\% < \%OS < 25\%$

líneas de  $T_p$ ,  $T_s$  y %OS constante

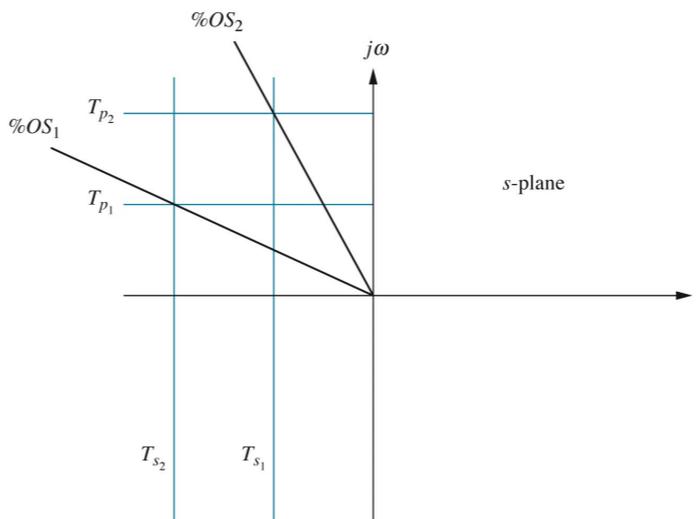


Figure 4.18 © John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

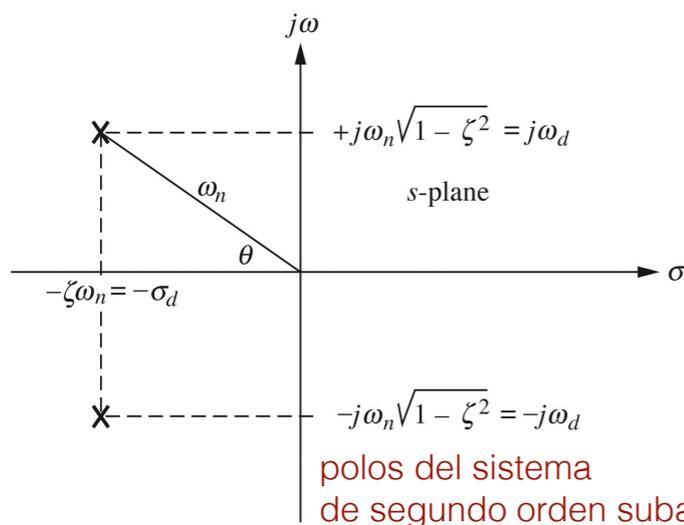
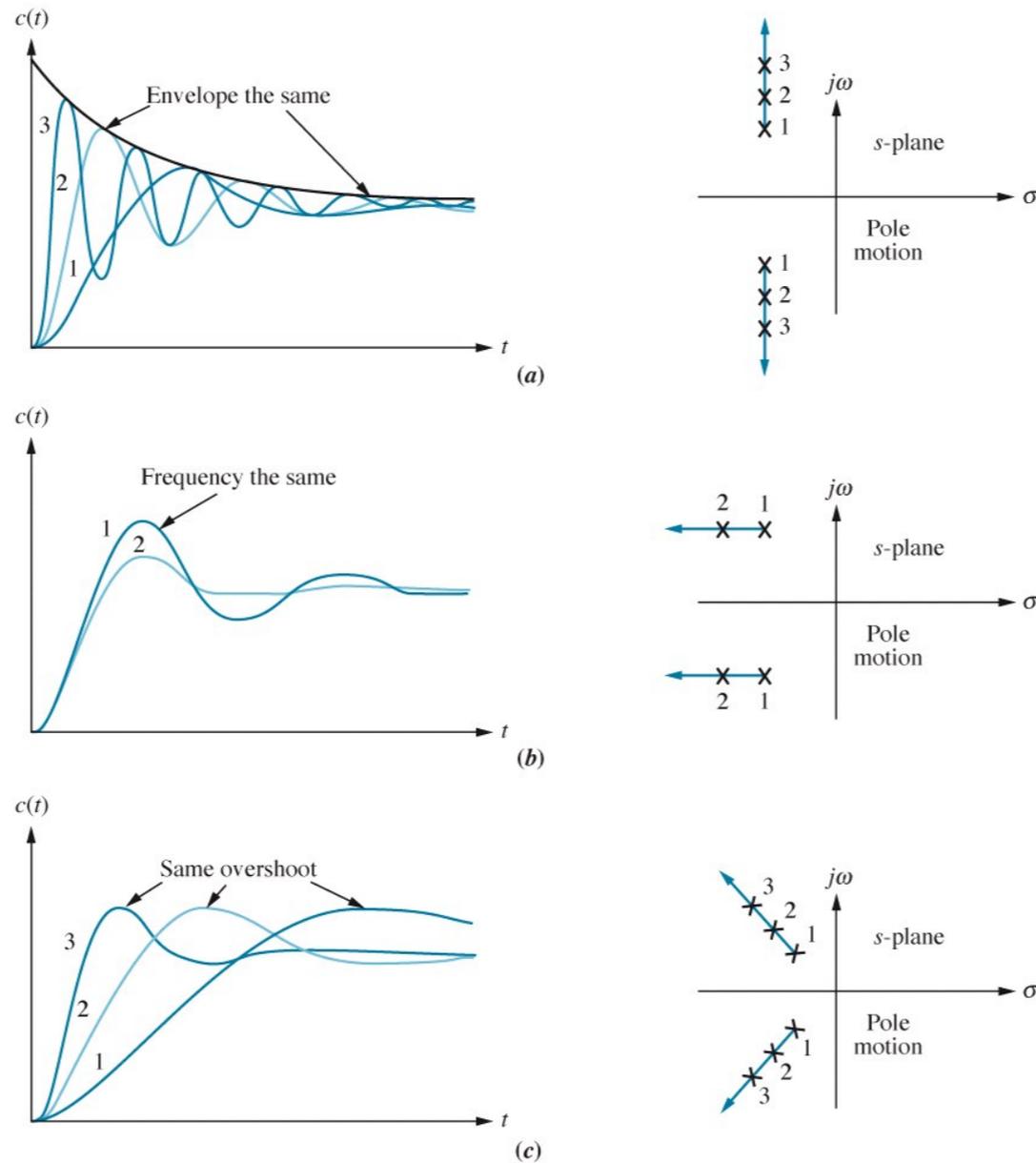


Figure 4.17 © John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.



**Figure 4.19**  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

respuesta de un sistema de segundo orden subamortiguado a una entrada constante cuando los polos varían  
 (a) manteniendo la parte real constante  
 (b) manteniendo la parte imaginaria constante  
 (c) manteniendo el coeficiente de amortiguamiento constante

## Especificaciones en el diseño de un sistema de control:

- especificaciones de la respuesta transitoria ✓
- estabilidad
- especificaciones de errores de estado estacionario

Estabilidad es el requisito más importante de un sistema de control

¿Cómo definirla?

A partir de la respuesta natural del sistema:

Un sistema lineal, invariante en el tiempo es

estable si su respuesta natural tiende a cero cuando el tiempo se hace infinitamente grande

inestable si su respuesta natural crece sin límite cuando el tiempo se hace infinitamente grande

marginalmente estable si la respuesta natural ni crece ni decae sino que permanece constante u oscila cuando el tiempo se hace infinitamente grande

## Definición alternativa

Un sistema es estable si toda entrada acotada da una salida acotada  
Entonces,

A partir de la respuesta total del sistema:

Un sistema es inestable si una entrada cualquiera acotada produce una respuesta no acotada

Esto clarifica la definición previa de marginalmente inestable:

el sistema es estable para algunas entradas acotadas e inestable para otras, luego según este segundo criterio es considerado inestable

¿Cómo determinar si un sistema es estable?

Los sistemas estables tienen función de lazo cerrado con polos cuya parte real es negativa (semiplano izquierdo del plano  $s$ )

Los sistemas inestables tienen función de transferencia de lazo cerrado con al menos 1 polo cuya parte real es positiva y/o polos de multiplicidad mayor que 1 en el eje imaginario

Los sistemas marginalmente estables tienen función de transferencia de lazo cerrado con polos imaginarios puros de multiplicidad 1

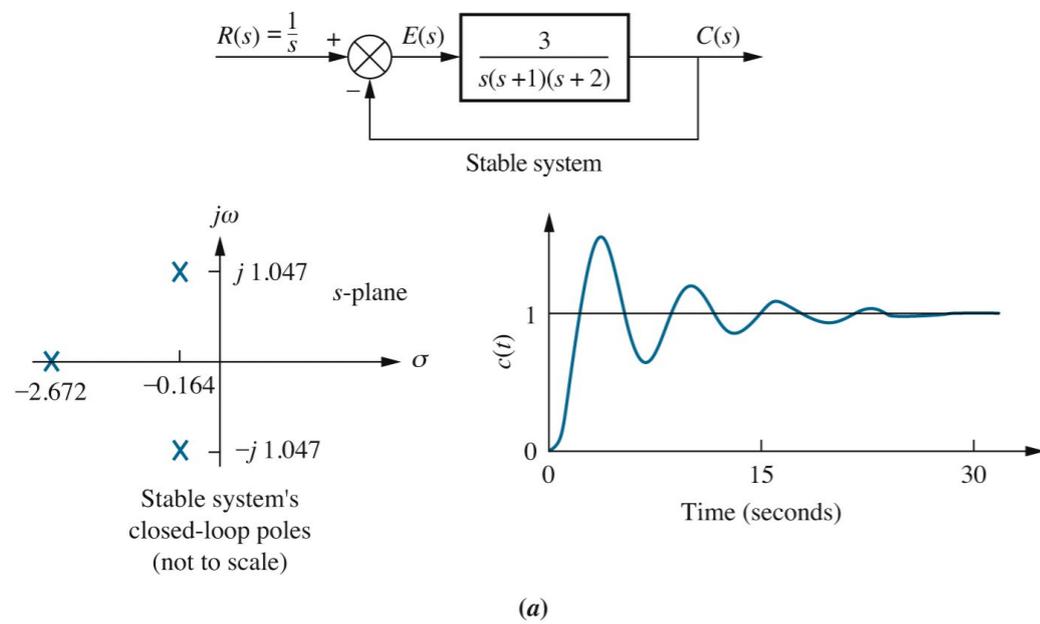


Figure 6.1a  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

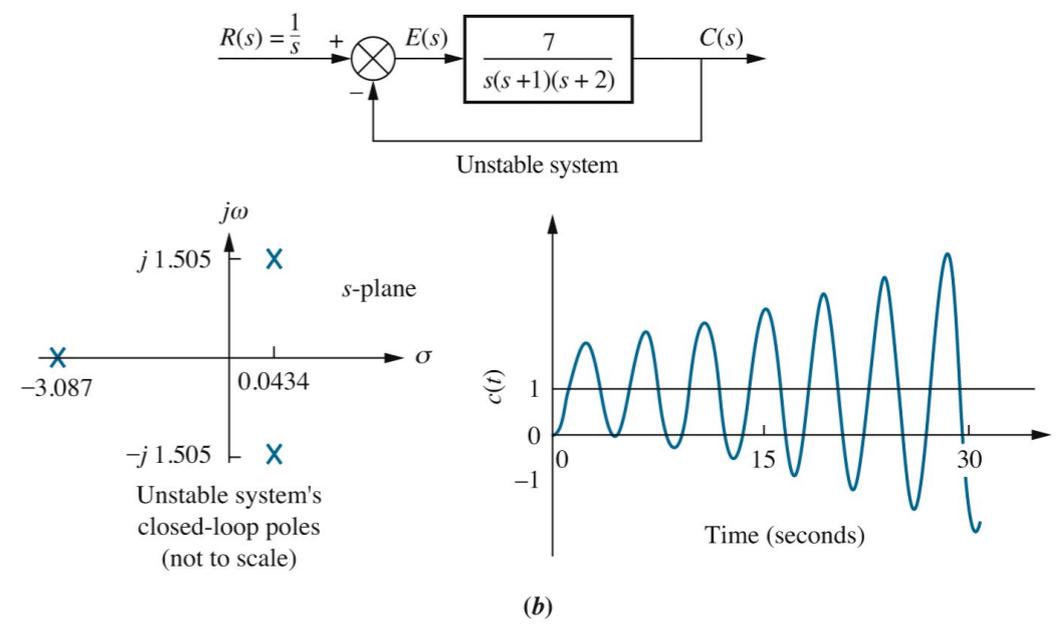


Figure 6.1b  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

No es simple determinar si un sistema de control con retroalimentación es estable. Puede que conozcamos los polos de la función de transferencia de lazo abierto pero no los polos de la función de transferencia del sistema de lazo cerrado:

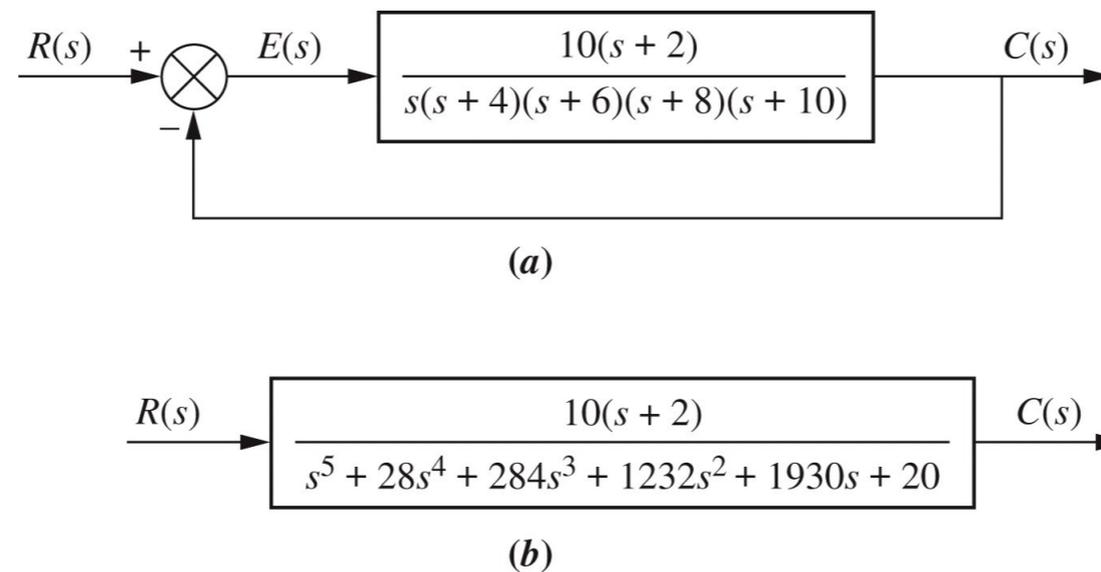


Figure 6.2  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

# Criterio Routh-Hurwitz (método para conocer la estabilidad del sistema sin resolver los polos)

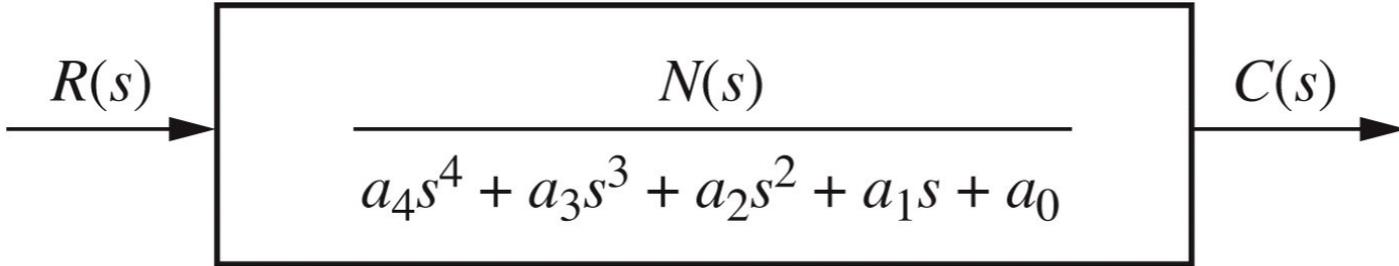


Figure 6.3  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Utilizamos los coeficientes del denominador para formar la tabla R-H:

TABLE 6.1 Initial layout for Routh table

$s^4$	$a_4$	$a_2$	$a_0$
$s^3$	$a_3$	$a_1$	0
$s^2$			
$s^1$			
$s^0$			

Table 6.1  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

3 2ª fila: siguiente coeficiente de mayor potencia; y, el resto de la fila: los que hemos saltado en la 1ª fila

2 1ª fila: coeficiente de mayor potencia; y, el resto de la fila: coeficientes alternos

1 1ª columna: etiquetamos cada fila con las potencias de s, desde la más alta hasta  $s^0$

TABLE 6.2 Completed Routh table

$s^4$	$a_4$	$a_2$	$a_0$
$s^3$	$a_3$	$a_1$	0
$s^2$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
$s^1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
$s^0$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Table 6.2  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

- 4 El resto de entradas de la tabla:
- numerador: determinante negativo (2x2) cuya columna de la izquierda es la primera columna de las dos filas precedentes; la columna de la derecha está formada por los elementos de la columna de la derecha de las dos filas precedentes
  - denominador: elemento de la primera columna de la fila precedente

## Interpretación de la tabla de Routh-Hurwitz

El número de polos en el semiplano derecho del plano  $s$  es igual al número de veces que cambia el signo en la primera columna de la tabla de Routh

El sistema es estable si no hay cambios de signo en la primera columna de la tabla

# Casos especiales del criterio Routh-Hurwitz

1. La tabla R-H tiene un cero sólo en la primera columna de una fila
2. La tabla R-H tiene una fila entera de ceros

## Cero sólo en la primera columna de una fila

Ejemplo: f.t del sistema:

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

MATLAB:  
 0.34±1.51j  
 -1.67  
 -0.51±0.70j

**TABLE 6.4** Completed Routh table for Example 6.2

$s^5$	1	3	5
$s^4$	2	6	3
$s^3$	$\emptyset \quad \epsilon$	$\frac{7}{2}$	0
$s^2$	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	3	0
$s^1$	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	0	0
$s^0$	3	0	0

Table 6.4  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

**TABLE 6.5** Determining signs in first column of a Routh table with zero as first element in a row

Label	First column	$\epsilon = +$	$\epsilon = -$
$s^5$	1	+	+
$s^4$	2	+	+
$s^3$	$\emptyset \quad \epsilon$	+	-
$s^2$	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	-	+
$s^1$	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	+	+
$s^0$	3	+	+

Table 6.5  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Resultado: sistema inestable con 2 polos en el lado derecho del plano  $s$

si resolvemos los polos

# Fila entera de ceros

Ejemplo: f.t del sistema:

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$$

**TABLE 6.7** Routh table for Example 6.4

$s^5$		1		6		8	
$s^4$	7	1	42	6	56	8	
$s^3$	$\emptyset$	4	$\emptyset$	12	3	$\emptyset$	$\emptyset$
$s^2$		3		8		0	
$s^1$		$\frac{1}{3}$		0		0	
$s^0$		8		0		0	

Table 6.7  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

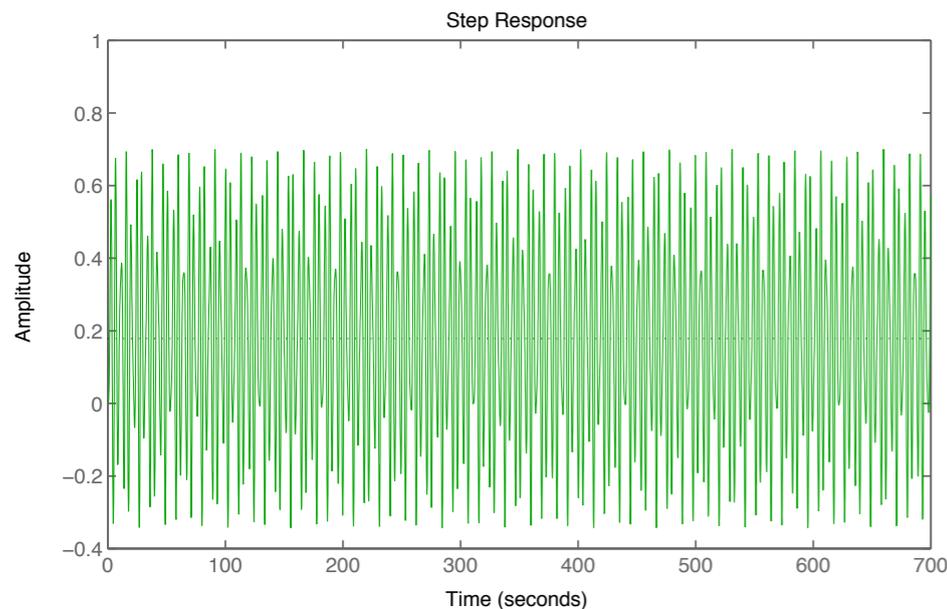
polinomio auxiliar  $P(s) = s^4 + 6s^2 + 8$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s + 0$$

coeficientes que reemplazan la fila de ceros  
(luego hemos dividido toda la fila por 4)

Resultado R-H:

- desde la fila  $s^4$  hacia abajo, analizamos el polinomio  $P(s)$  y vemos que no tiene polos en el semiplano derecho del plano  $s$ . Por simetría (ver siguiente diapositiva), tampoco los tiene en el semiplano izquierdo. Luego, sus cuatro polos son imaginarios puros
- el polo que falta está en el semiplano negativo (ya que no hay cambio de signo en la primera columna entre  $s^5$  y  $s^4$ )



**MATLAB:**  
 $\pm 2j$   
 $-7$   
 $\pm 1.41j$

## ¿Cuándo se da el caso de una fila entera de ceros en la tabla H-R?

Este caso en la tabla H-R ocurre cuando un polinomio par es un factor del polinomio original. Y los polinomios pares sólo tienen raíces simétricas respecto al origen.

Esto puede ocurrir de 3 formas:

- a) raíces reales simétricas;
- b) raíces imaginarias puras;
- c) raíces que forman un cuadrante alrededor del origen

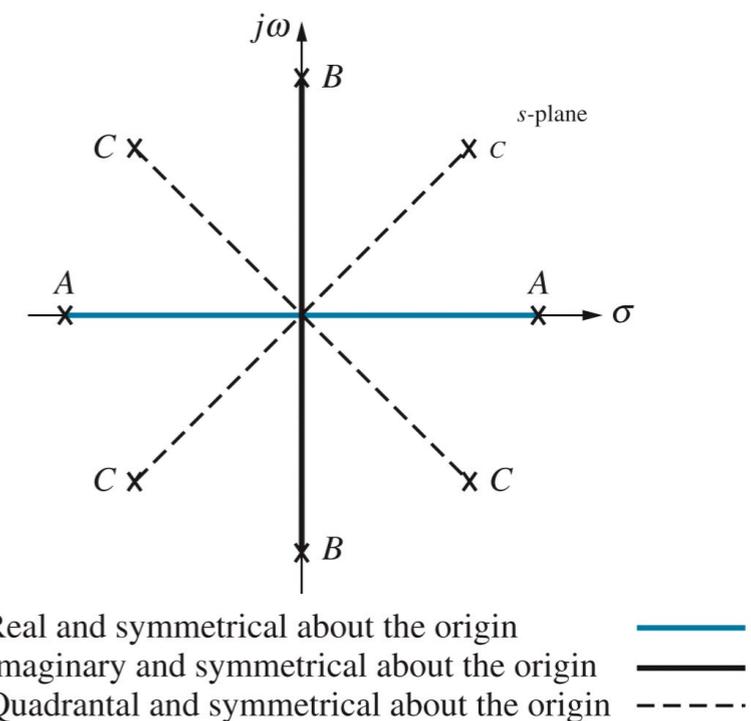


Figure 6.5  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

# Más ejemplos

## Tabla R-H standard

f.t del sistema:

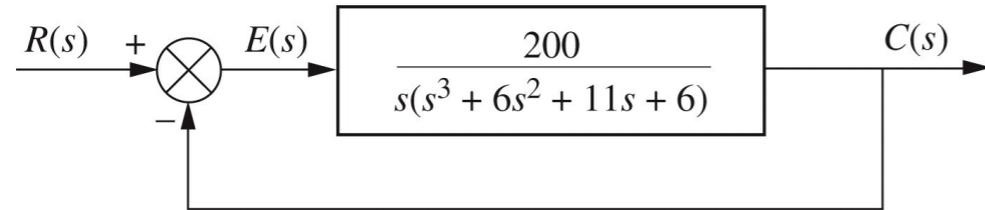


Figure 6.6  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

$$T(s) = \frac{200}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 200}$$

**MATLAB:**  
-4.28±2.54j  
1.28±2.54j

**TABLE 6.10** Routh table for Example 6.6

$s^4$	1	11	200
$s^3$	<del>6</del>	1	<del>6</del> 1
$s^2$	<del>10</del>	1	<del>200</del> 20
$s^1$	-19		
$s^0$	20		

Table 6.10  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Resultado:

sistema inestable, hay 2 polos en el semiplano derecho del plano  $s$ . No hay polos imaginarios puros porque no aparece una fila de ceros en la tabla H-R

# Tabla R-H con un cero en la primera columna de una fila

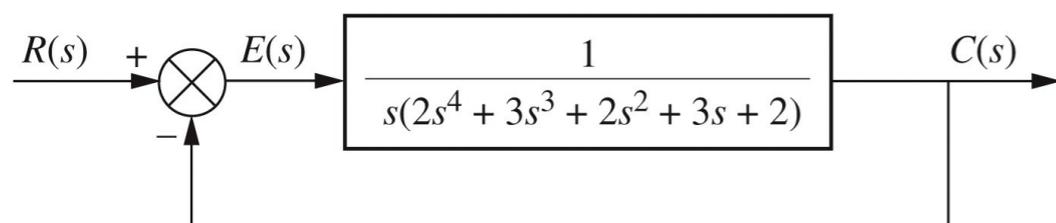


Figure 6.7  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

f.t del sistema:

$$T(s) = \frac{1}{2s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

MATLAB:  
-2.58  
0.24±0.93j  
-0.45±0.47j

**TABLE 6.11** Routh table for Example 6.7

$s^5$	2	2	2
$s^4$	3	3	1
$s^3$	$\theta$	$\epsilon$	$\frac{4}{3}$
$s^2$	$\frac{3\epsilon - 4}{\epsilon}$	1	
$s^1$	$\frac{12\epsilon - 16 - 3\epsilon^2}{9\epsilon - 12}$		
$s^0$	1		

Table 6.11  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Resultado:

sistema inestable, hay 2 polos en el semiplano derecho del plano  $s$

# Tabla R-H con una fila de ceros

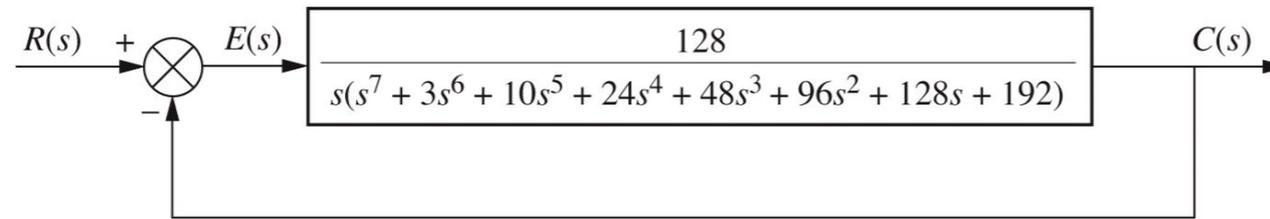


Figure 6.8  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

f.t del sistema:

$$T(s) = \frac{128}{s^8 + 3s^7 + 10s^6 + 24s^5 + 48s^4 + 96s^3 + 128s^2 + 192s + 128}$$

TABLE 6.13 Routh table for Example 6.8

$s^8$	1	10	48	128	128
$s^7$	<del>3</del> 1	<del>24</del> 8	<del>96</del> 32	<del>192</del> 64	
$s^6$	<del>2</del> 1	<del>16</del> 8	<del>64</del> 32	<del>128</del> 64	
$s^5$	<del>0</del> <del>6</del> 3	<del>0</del> <del>32</del> 16	<del>0</del> <del>64</del> 32	<del>0</del> <del>0</del> 0	
$s^4$	<del>8</del> <del>3</del> 1	<del>64</del> <del>3</del> 8	<del>64</del> 24		
$s^3$	<del>8</del> -1	<del>40</del> -5			
$s^2$	<del>3</del> 1	<del>24</del> 8			
$s^1$	3				
$s^0$	8				

Table 6.13  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

aparece fila de ceros en la fila  $s^5 \Rightarrow$   
volvemos a fila  $s^6$  y formamos el polinomio auxiliar

$$P(s) = s^6 + 8s^4 + 32s^2 + 64$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 6s^5 + 32s^3 + 64s + 0$$



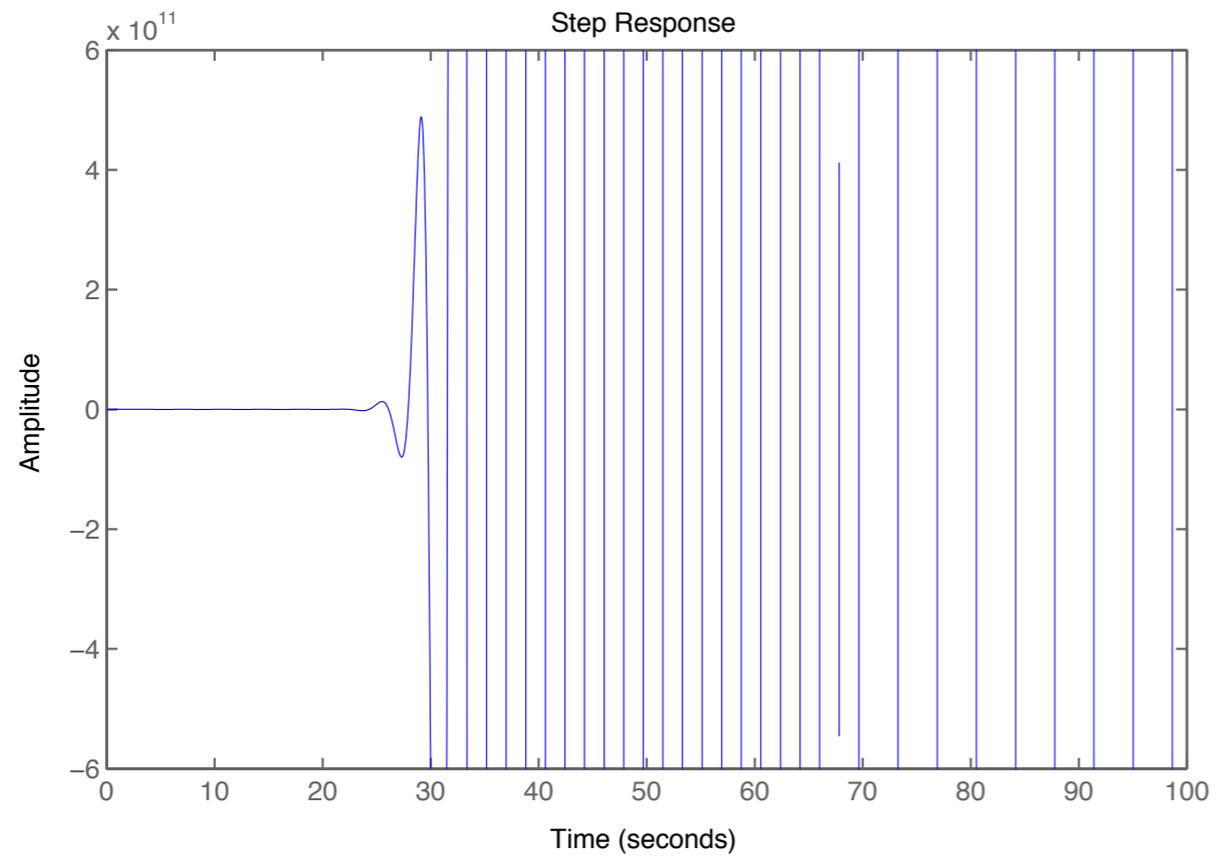
reemplazamos los ceros de la fila  $s^5$  por los coeficientes de la derivada de  $P(s)$  (luego simplificamos toda la fila dividiendo por 2); y, continuamos el resto de la tabla

Resultado R-H:

- desde la fila  $s^6$  hacia abajo: el polinomio  $P(s)$  tiene dos polos en el semiplano derecho del plano  $s \Rightarrow$  tiene que tener dos polos en el semiplano izquierdo. Además, como es un polinomio de orden 6, tiene que tener dos polos imaginarios puros.

- antes de la fila  $s^6$  no hay cambios de signo: hay otros dos polos en el semiplano izquierdo del plano  $s$

*(resolución con MATLAB en la siguiente diapositiva) ==>*



MATLAB:  
 $1 \pm 1.73j$   
 $\pm 2j$   
 $-1 \pm 1.73j$   
 $-2$   
 $-1$

# Errores en estado estacionario

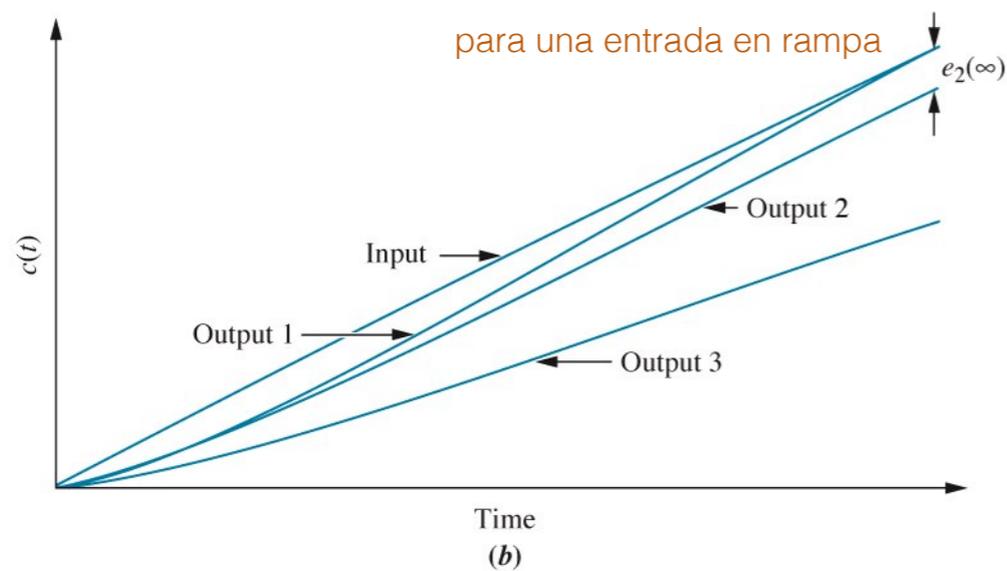
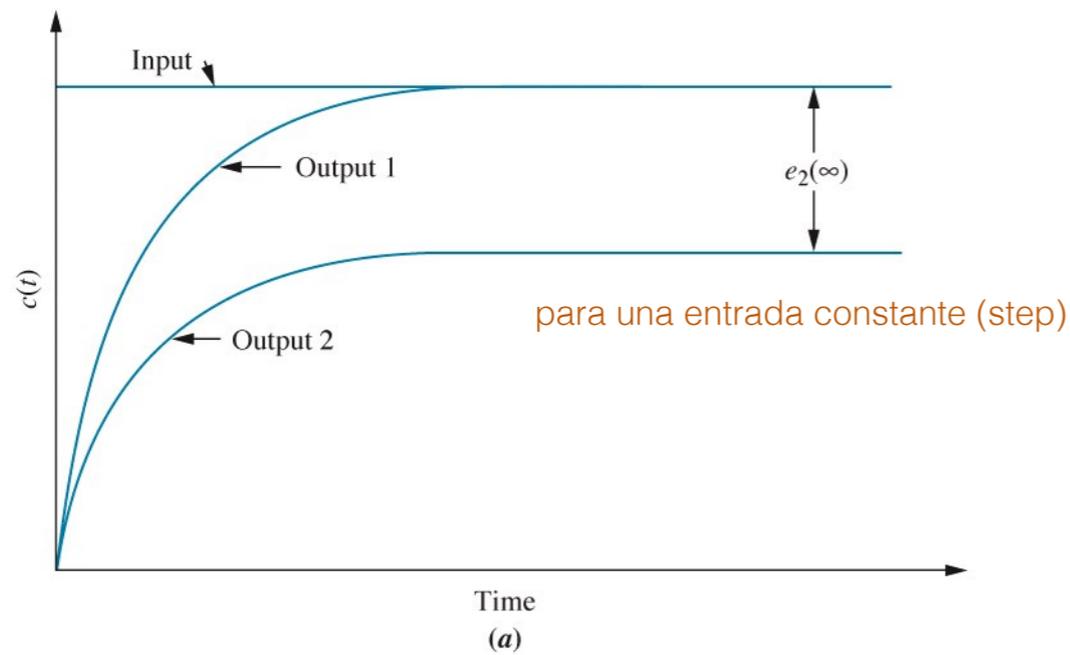


Figure 7.2  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

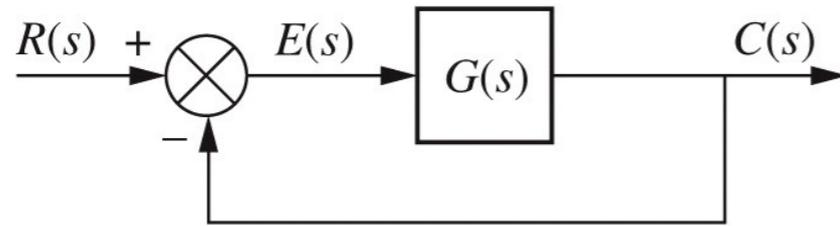
tipos de señales utilizadas en sistemas de control para evaluar errores estacionarios:

TABLE 7.1 Test waveforms for evaluating steady-state errors of position control systems

Waveform	Name	Physical interpretation	Time function	Laplace transform
	Step	Constant position	1	$\frac{1}{s}$
	Ramp	Constant velocity	$t$	$\frac{1}{s^2}$
	Parabola	Constant acceleration	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$

Table 7.1  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

## Errores en estado estacionario de sistemas con retroalimentación unidad



$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - C(s) \\ C(s) &= E(s)G(s) \end{aligned} \Rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

(previamente comprobamos estabilidad del sistema de lazo cerrado)

$$\boxed{e(\infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \boxed{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}} \quad \text{Eq. (I)}$$

particularizando la Eq. (I) para los diferentes tipos de señales de entrada:

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow e_{step}(\infty) = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$R(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow e_{ramp}(\infty) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{K_v}$$

el error estacionario disminuye al aumentar las constantes de error estático!!

$$R(s) = \frac{1}{s^3} \Rightarrow e_{parabola}(\infty) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{K_a}$$

definimos constantes de error estático  $K_p$  (de posición),  $K_v$  (de velocidad),  $K_a$  (de aceleración). Utilizamos estas constantes de error estático para definir especificaciones sobre el sistema de control (igual que definimos especificaciones de un sistema a partir de los parámetros de la respuesta transitoria: %OS,  $T_p$ ,  $T_s$ ,...)

Además, definimos el tipo de sistema a partir de estas constantes:

**TABLE 7.2** Relationships between input, system type, static error constants, and steady-state errors

Input	Steady-state error formula	Type 0		Type 1		Type 2	
		Static error constant	Error	Static error constant	Error	Static error constant	Error
Step, $u(t)$	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p = \text{Constant}$	$\frac{1}{1 + K_p}$	$K_p = \infty$	0	$K_p = \infty$	0
Ramp, $tu(t)$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = 0$	$\infty$	$K_v = \text{Constant}$	$\frac{1}{K_v}$	$K_v = \infty$	0
Parabola, $\frac{1}{2}t^2u(t)$	$\frac{1}{K_a}$	$K_a = 0$	$\infty$	$K_a = 0$	$\infty$	$K_a = \text{Constant}$	$\frac{1}{K_a}$

Table 7.2  
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.