Tema 2:
TEOREMAS ENERGÉTICOS

Supongamos que las cargas aplicadas al sólido crecen, progresivamente, desde cero hasta su valor final de una manera continua.

En ese caso, el trabajo ***W*** realizado por todas las cargas que actúan sobre el sólido quedaría almacenado como energía elástica de deformación **U** en el sólido y, por tanto:

$$U = W$$

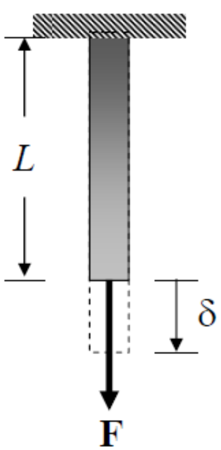
ENERGÍA INTERNA, ELÁSTICA O DE DEFORMACIÓN

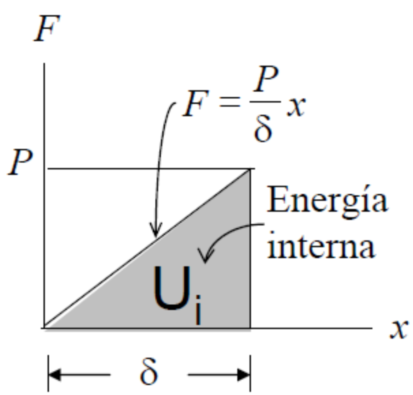
Trabajo externo y energía de deformación

La mayoría de los métodos energéticos en el cálculo de estructuras se basan en el ***Principio de la conservación de la energía***, que establece que el trabajo realizado por las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema estructural, W_e, coincide con laenergía de deformación que almacena dicho sistema, U_i.

$$\boxed{W_e = U_i}$$

Trabajo de una fuerza exterior





$$dW_e = F dx$$

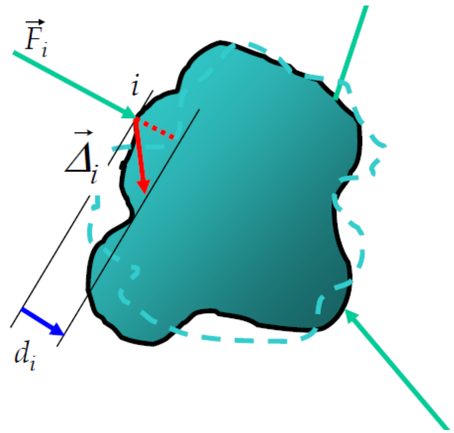
$$W_e = \int_0^x F dx$$

$$W_e = \int_0^{\Delta} \left(\frac{P}{\delta}x\right)dx$$

$$U_e = \left(\frac{P}{2\delta}x^2\right)\Big|_0^{\delta} = \frac{1}{2}P\delta$$

ENERGÍA INTERNA, ELÁSTICA O DE DEFORMACIÓN

El trabajo realizado por las cargas exteriores aplicadas a un sólido es la mitad de la suma del producto de dichas cargas por los desplazamientos de sus puntos de aplicación (en las dirección de las mismas).



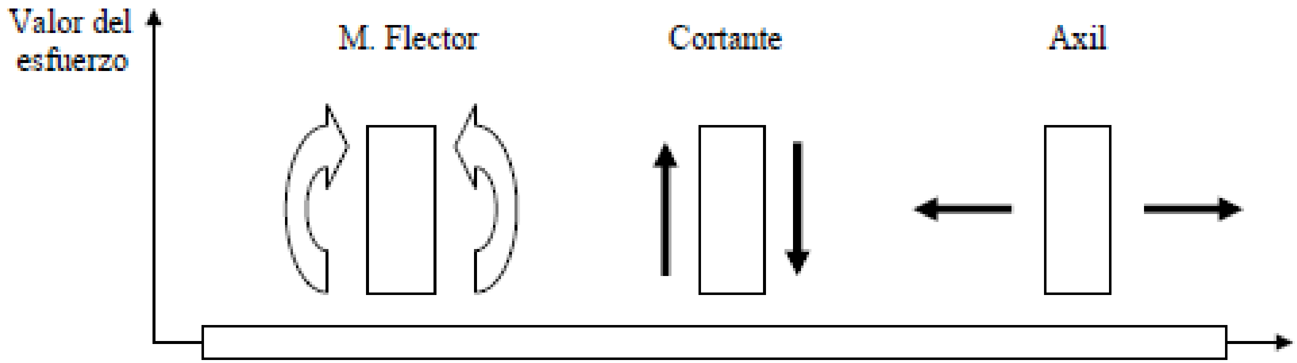
$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot d_i$$

Si entre las cargas aplicadas existiera algún momento, bastaría con tener en cuenta que:

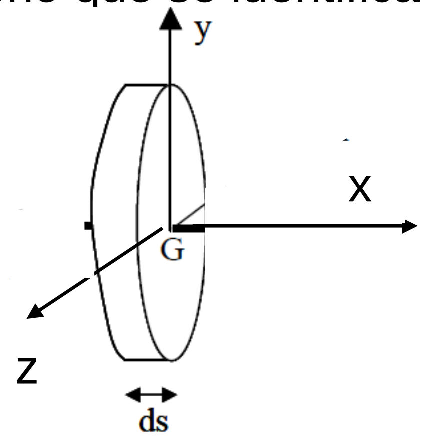
- donde se dijera fuerza se debería decir momento
- donde se dijera desplazamiento se debería decir giro
- donde se expresara trabajo (*W=Fd,* en el caso de fuerzas) se debería escribir *W=M*θ.

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

Esfuerzos en barras: criterio de signos

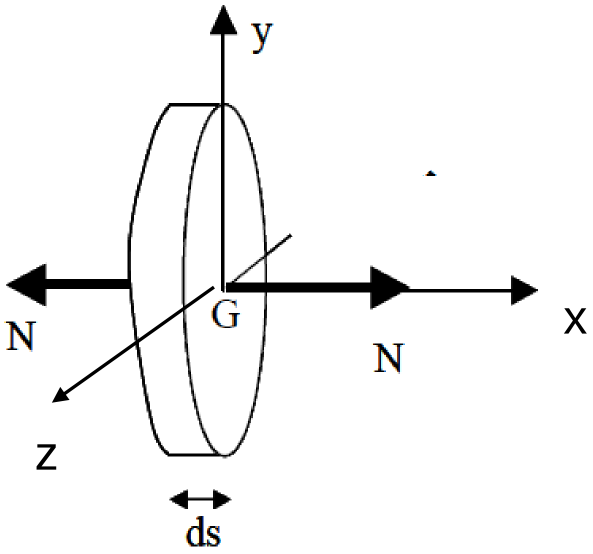


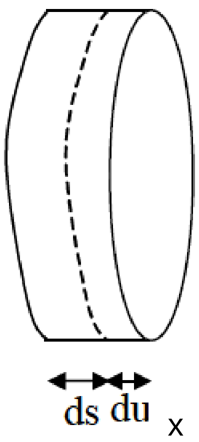
Energía de deformación en una rebanada: una rebanada en una pieza prismática o barra, es un segmento de la pieza delimitado por dos secciones (normales a la directriz de la pieza) y separadas una distancia **ds.** La rebanada es el elemento más pequeño que se identifica en la barra.



ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR ESFUERZO AXIL

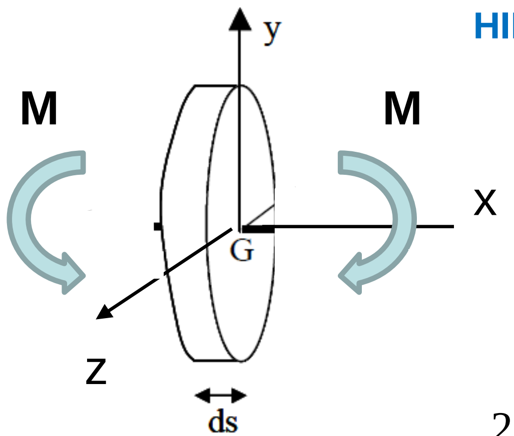


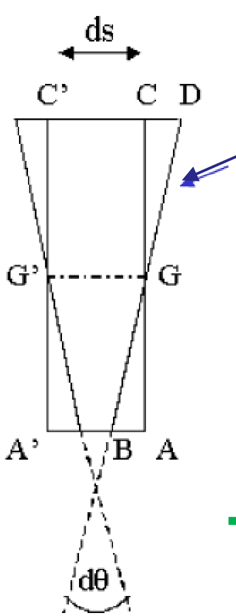


$$dU = \frac{1}{2} N \cdot du_x = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} ds$$

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR MOMENTO FLECTOR





HIPÓTESIS DE NAVIER

$$\sigma_A = \frac{M_Z AG}{I_Z} \quad \text{compresión}$$

$$\sigma_C = -\frac{M_Z CG}{I_Z} \quad \text{tracción}$$

$$\frac{d\theta_z}{2} = \frac{AB}{AG} = \frac{CB}{CG} = \frac{M_Z}{2EI_Z} ds$$

$$2AB = \varepsilon_{AA'} ds = \frac{\sigma_A}{E} ds = \frac{M_Z AG}{I_Z} ds$$

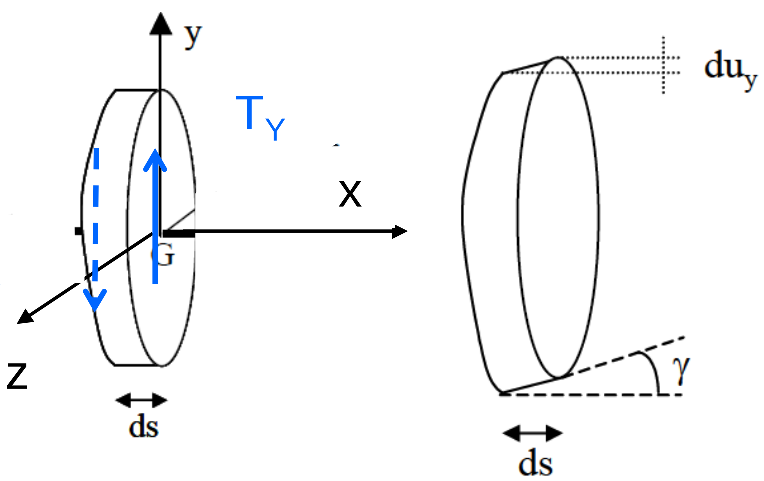
$$2CD = \varepsilon_{CC'} ds = \frac{\sigma_C}{E} ds = \frac{M_Z CG}{I_Z} ds$$

$$d\theta_z = \frac{M_Z}{EI_Z} ds$$

$$dU_i = \frac{1}{2} M_z d\theta_z = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{EI_Z} ds$$

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR ESFUERZO CORTANTE

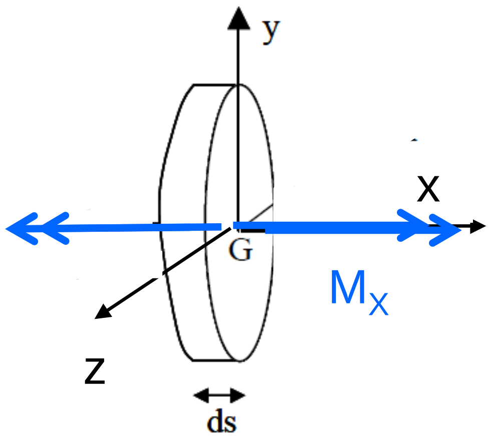


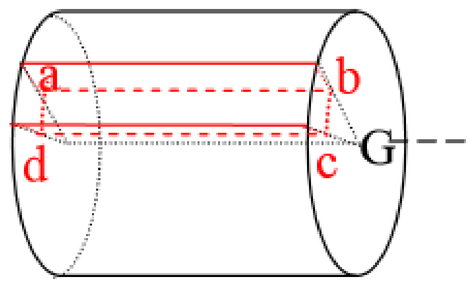
$$du_y = \gamma ds = \frac{\tau_m}{G} ds \quad \text{donde} \quad \tau_m = \frac{T_y}{A_c}$$

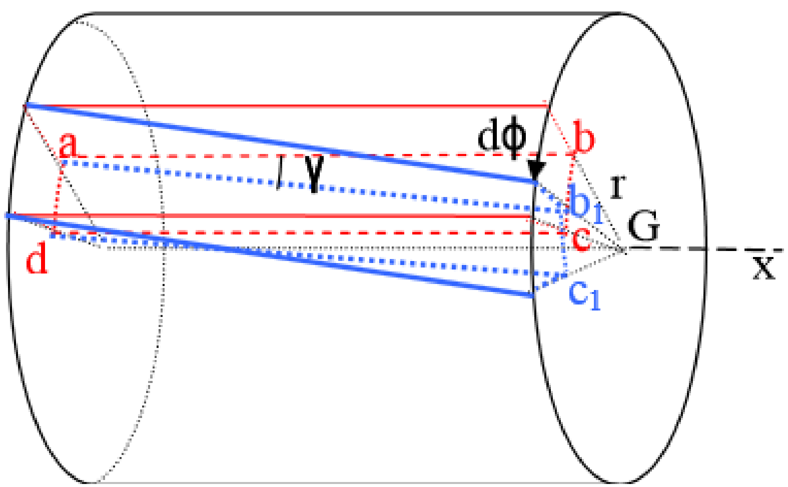
$$dU_i = \frac{1}{2} T_y du_y = \frac{1}{2} \frac{T_y^2}{GA_C} ds$$

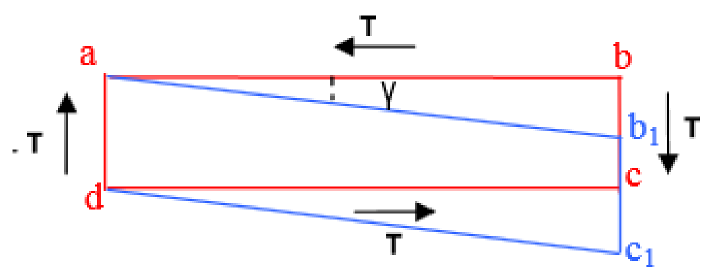
ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

DEFORMACIÓN DE UNA REBANADA POR MOMENTO TORSOR









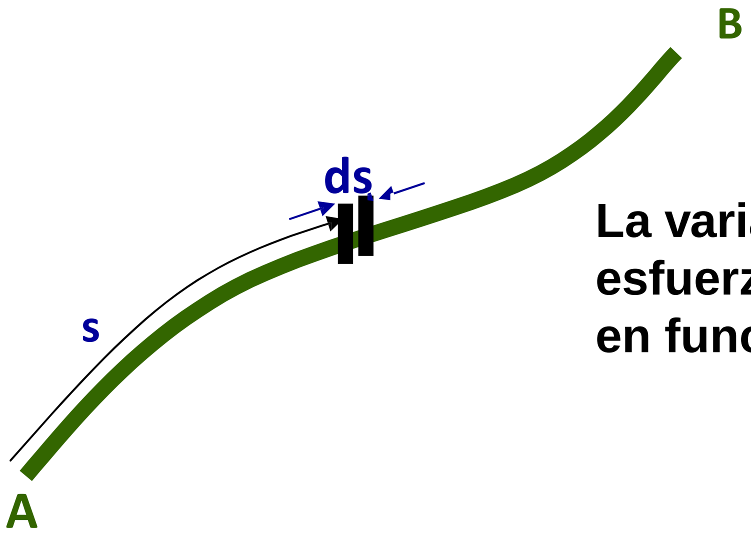
torsión $\theta = \dfrac{d\phi}{ds} = \dfrac{M_T}{GI_0} \rightarrow d\phi = \dfrac{M_T}{GI_0} ds$

$$\theta = \frac{d\phi}{ds} \qquad \gamma ds = r d\phi \rightarrow \gamma = r\frac{d\phi}{ds}$$

$$dU_i = \frac{1}{2} M_T d\phi = \frac{1}{2}\frac{M_T^2}{GI_0} ds$$

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

¿Qué energía interna se almacena en una pieza cargada en la que aparecen todos los tipos de esfuerzos en todas las secciones de la pieza?

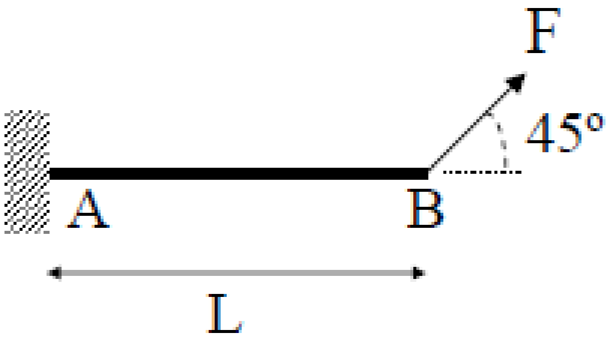


La variable "s" del integrando indica que los esfuerzos pueden variar a lo largo de la pieza en función del valor de dicha variables

$$U_i = \int_A^B \left(\frac{1}{2}\frac{N^2}{EA} + \frac{1}{2}\frac{T^2}{GA_C} + \frac{1}{2}\frac{M_f^2}{EI_z} + \frac{1}{2}\frac{M_T^2}{GI_0} \right) ds$$

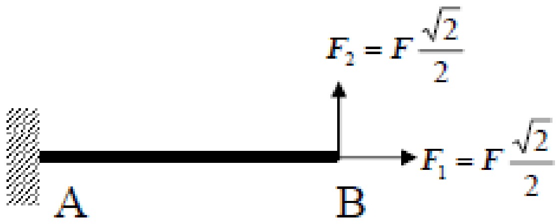
ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

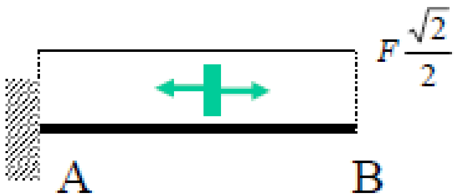
Ejemplo: ¿Podríamos calcular los ya desplazamientos en elementos estructurales cargados?



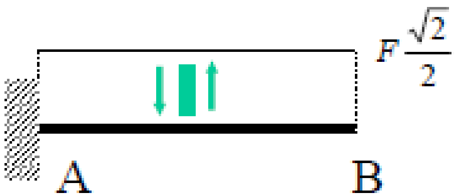
ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

Ejemplo: ¿Podríamos calcular los ya desplazamientos en elementos estructurales cargados?

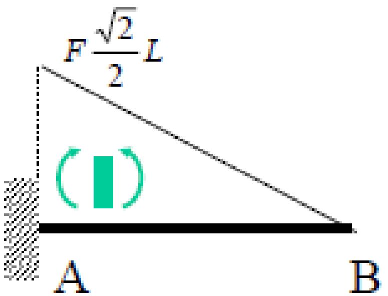




Ley de axiles



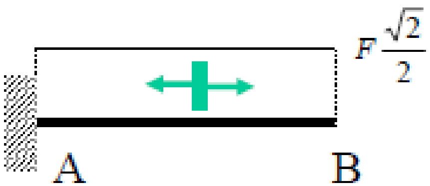
Ley de cortantes



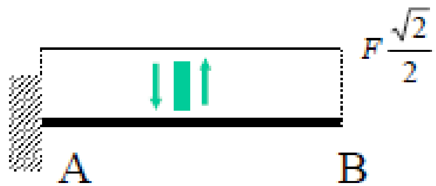
Ley de flectores

ENERGÍA INTERNA: esfuerzos y desplazamientos

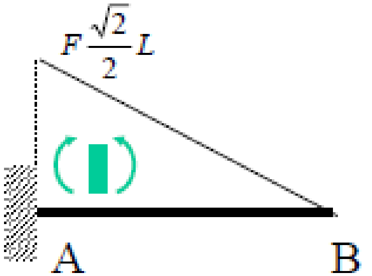
Ejemplo: ¿Podríamos calcular los ya desplazamientos en elementos estructurales cargados?



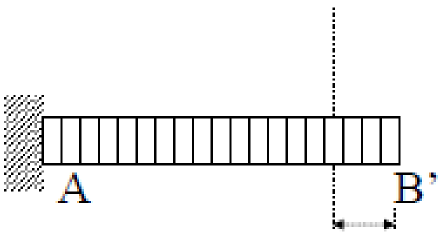
Ley de axiles

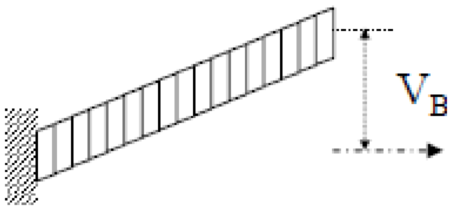


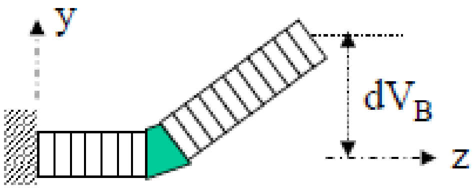
Ley de cortantes



Ley de flectores

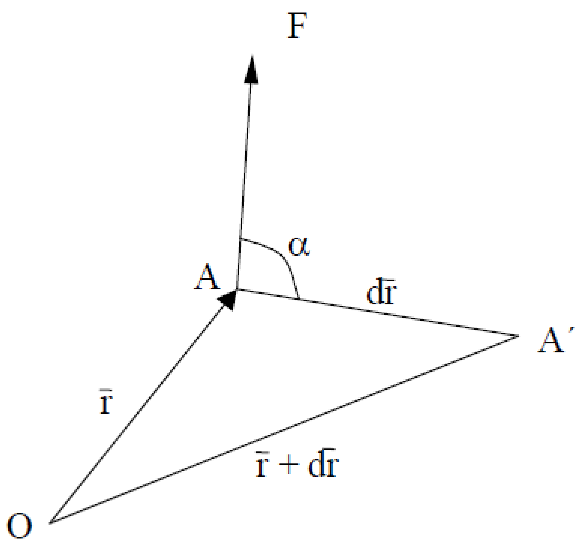


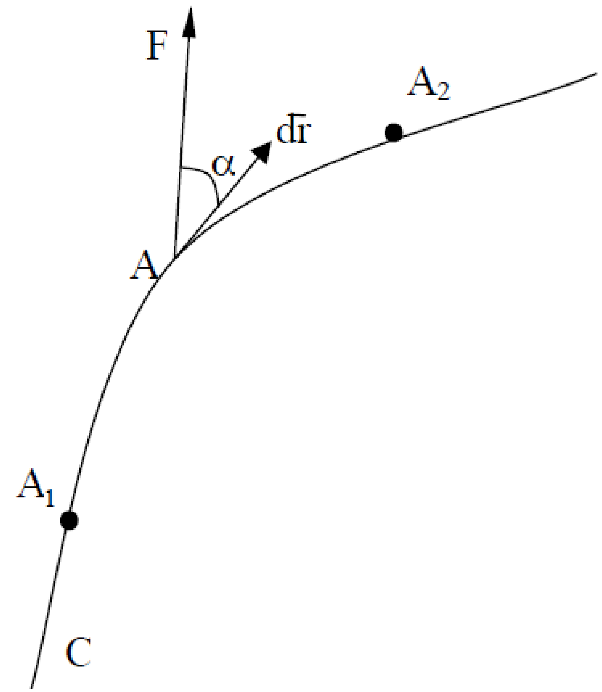




Teoremas energéticos: Principio de los Trabajos Virtuales

•**Trabajo de una fuerza**

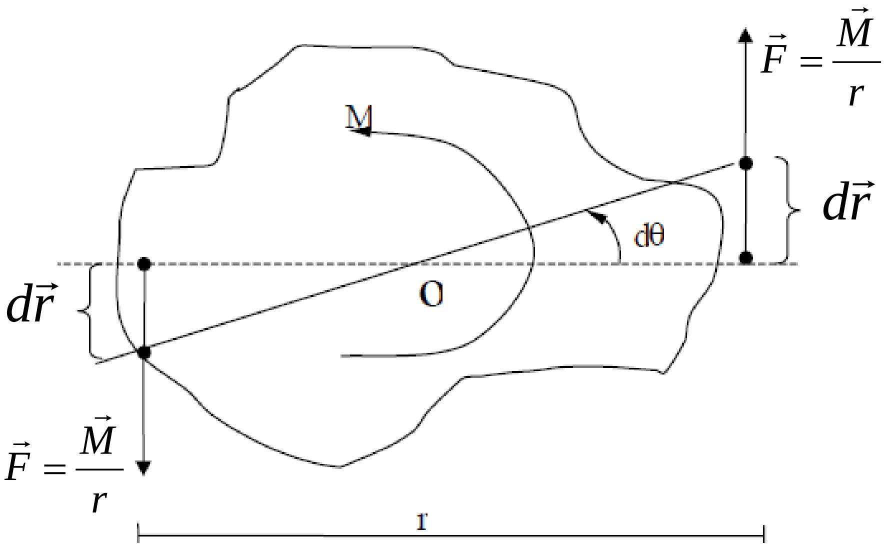




$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow W = \int_{A_1}^{A_2} dW = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A_1}^{A_2} F \cos\theta \, dr$$

Teoremas energéticos: Principio de los Trabajos Virtuales

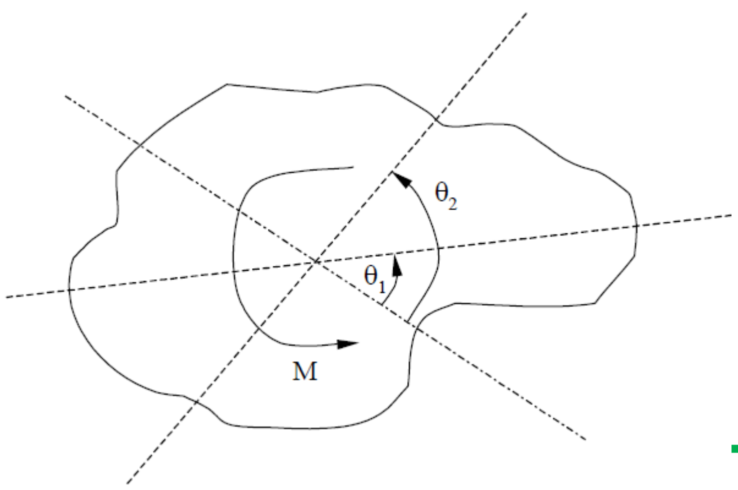
- **Trabajo de un par (momento)**



$$dW_1 = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Fdr = F\frac{r}{2}sen(d\theta) \approx F\frac{r}{2}d\theta$$

$$dW_2 = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\frac{r}{2}d\theta$$

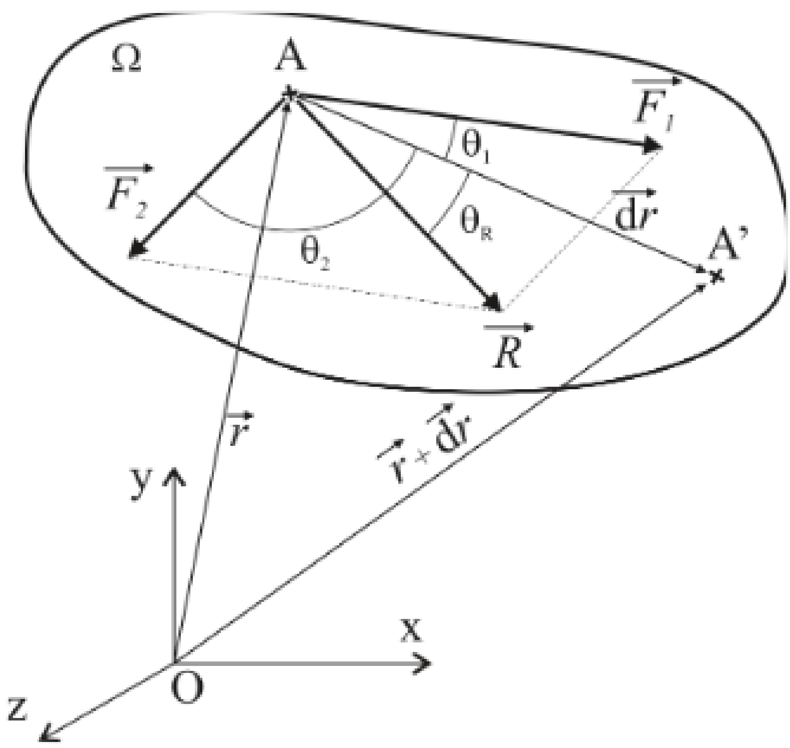
$$dW = dW_1 + dW_2 = 2F\frac{r}{2}d\theta = Frd\theta = \frac{M}{r}rd\theta = Md\theta$$



$$W = \int_{A_1}^{A_2} dW = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta$$

Teoremas energéticos: Principio de los Trabajos Virtuales

• **Trabajo de un sistema de fuerzas:** dado un sistema de fuerzas como el que se muestra en la figura, el trabajo desarrollado por un sistema de fuerzas aplicado sobre una partícula o cuerpo que sufre un desplazamiento es igual al trabajo de su resultante.

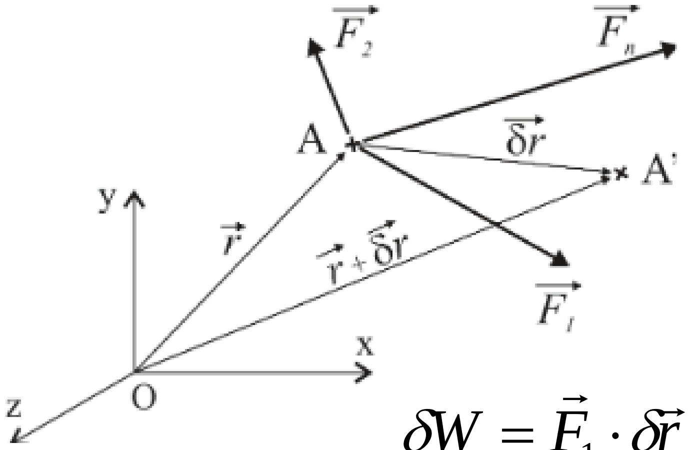


$$dW = dW_1 + dW_2 + \ldots + dW_n =$$
$$= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \ldots + \vec{F}_n \cdot d\vec{r} =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \vec{R} \cdot d\vec{r}$$

Teoremas energéticos: Principio de los Trabajos Virtuales

- **PTV para sólidos rígidos:**

Una partícula, sistema de fuerzas, desplazamiento virtual $\delta\vec{r}$



$$\delta W = \vec{F}_1 \cdot \delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \delta\vec{r} + \ldots + \vec{F}_n \cdot \delta\vec{r} = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \right) \cdot \delta\vec{r} = \vec{R} \cdot \delta\vec{r}$$

$$\vec{R} = \vec{0} \rightarrow \delta W = 0$$

“Si una partícula está en equilibrio, el trabajo virtual total de las fuerzas que actúan sobre ella es cero para cualquier desplazamiento virtual de la partícula”

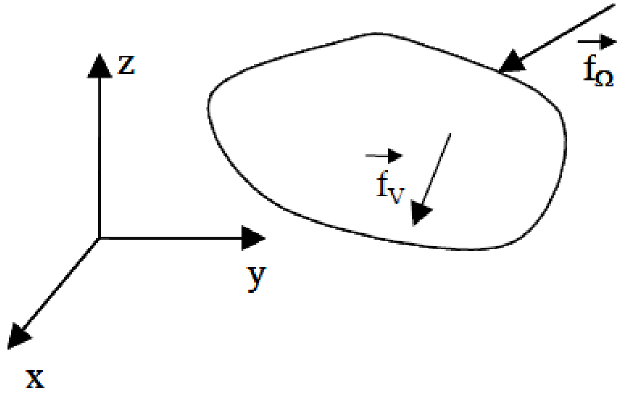
Teoremas energéticos: Principio de los Trabajos Virtuales

• **PTV para sólidos rígidos:**

UN SÓLIDO RÍGIDO, sistema de fuerzas, movimiento virtual $\delta\vec{r}$

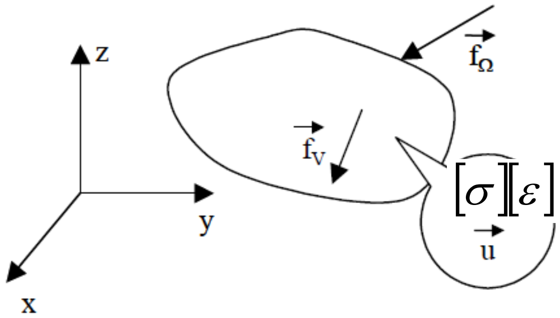
*Si un **sólido rígido** está en **equilibrio** bajo la acción de un sistema de fuerzas, el trabajo virtual total de las fuerzas externas que actúan sobre él es cero para cualquier desplazamiento virtual del sólido"*

El principio de los trabajos virtuales es también aplicable a un sistema de sólidos rígidos unidos, si el sistema permanece unido durante el desplazamiento virtual, pues el trabajo de las fuerzas internas es cero.



Teoremas energéticos: Principio de los Trabajos Virtuales

- **PTV para sólidos deformables:**



desplazamientos virtuales $\delta\vec{u}$

deformaciones virtuales ε^{δ}

$$W^{\delta} = \iiint_V \vec{f}_V \cdot \delta\vec{u}\, dVol + \iint_{\Omega} \vec{f}_\Omega \cdot \delta\vec{u}\, dSup =$$

$$= \iiint_V \left(\sigma_x \varepsilon_x^{\delta} + \sigma_y \varepsilon_y^{\delta} + \sigma_z \varepsilon_z^{\delta} + \tau_{xy}\gamma_{xy}^{\delta} + \tau_{xz}\gamma_{xz}^{\delta} + \tau_{yz}\gamma_{yz}^{\delta}\right) dVol =$$

$$= U_i^{\delta}$$

Sistemas de barras y elementos unidimensionales

$$W^{\delta} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{u}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_i \cdot \Delta\vec{u}_i = \int_L \left(N\delta u_x + T\delta u_y + M_f \delta\theta + M_T \delta\phi\right) ds =$$

$$= \int_L \left(N\frac{N^{\delta}}{EA} + T\frac{T^{\delta}}{GA_C} + M_f \frac{M_f^{\delta}}{EI_z} + M_T \frac{M_T^{\delta}}{GI_0} \right) ds = U_i^{\delta}$$

Teoremas energéticos: Teorema de Castigliano

- **Coeficientes de influencia:**
  relación entre las fuerzas exteriores y las deformaciones

- **Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti:** $d_{ij}=d_{ji}$

- **Teoremas de Castigliano**

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = d_i \qquad \frac{\partial U}{\partial d_n} = F_n$$

Teoremas energéticos: Teorema de Castigliano

- **Coeficientes de influencia:**
  relación entre las fuerzas exteriores y las deformaciones

- **Teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti:** $d_{ij}=d_{ji}$

- **Teoremas de Castigliano**

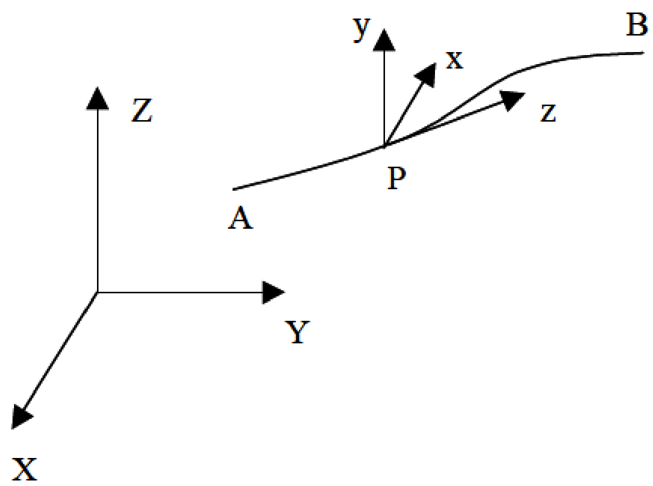
$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial F_i} = d_i} \qquad \frac{\partial U}{\partial d_n} = F_n$$

estructuras

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \frac{\partial \int_A^B \left(\frac{1}{2}\frac{N^2}{EA} + \frac{1}{2}\frac{T^2}{GA_C} + \frac{1}{2}\frac{M_f^2}{EI_z} + \frac{1}{2}\frac{M_T^2}{GI_0} \right) ds}{\partial F_i} =$$

$$= \int_A^B \left(\frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial F_i} + \frac{T}{GA_C}\frac{\partial T}{\partial F_i} + \frac{M_f}{EI_z}\frac{\partial M_F}{\partial F_i} + \frac{M_T}{GI_0}\frac{\partial M_T}{\partial F_i} \right) ds = d_i$$

Teoremas energéticos: Fórmulas de Navier-Bresse



$$\vec{r} = \overrightarrow{PB}$$

Giro sólido rígido

Suma de giros de las rebanadas

Desplazamiento inducido por los giros de las rebanadas

$$\vec{\theta}_B = \vec{\theta}_A + \int_A^B d\vec{\theta}$$

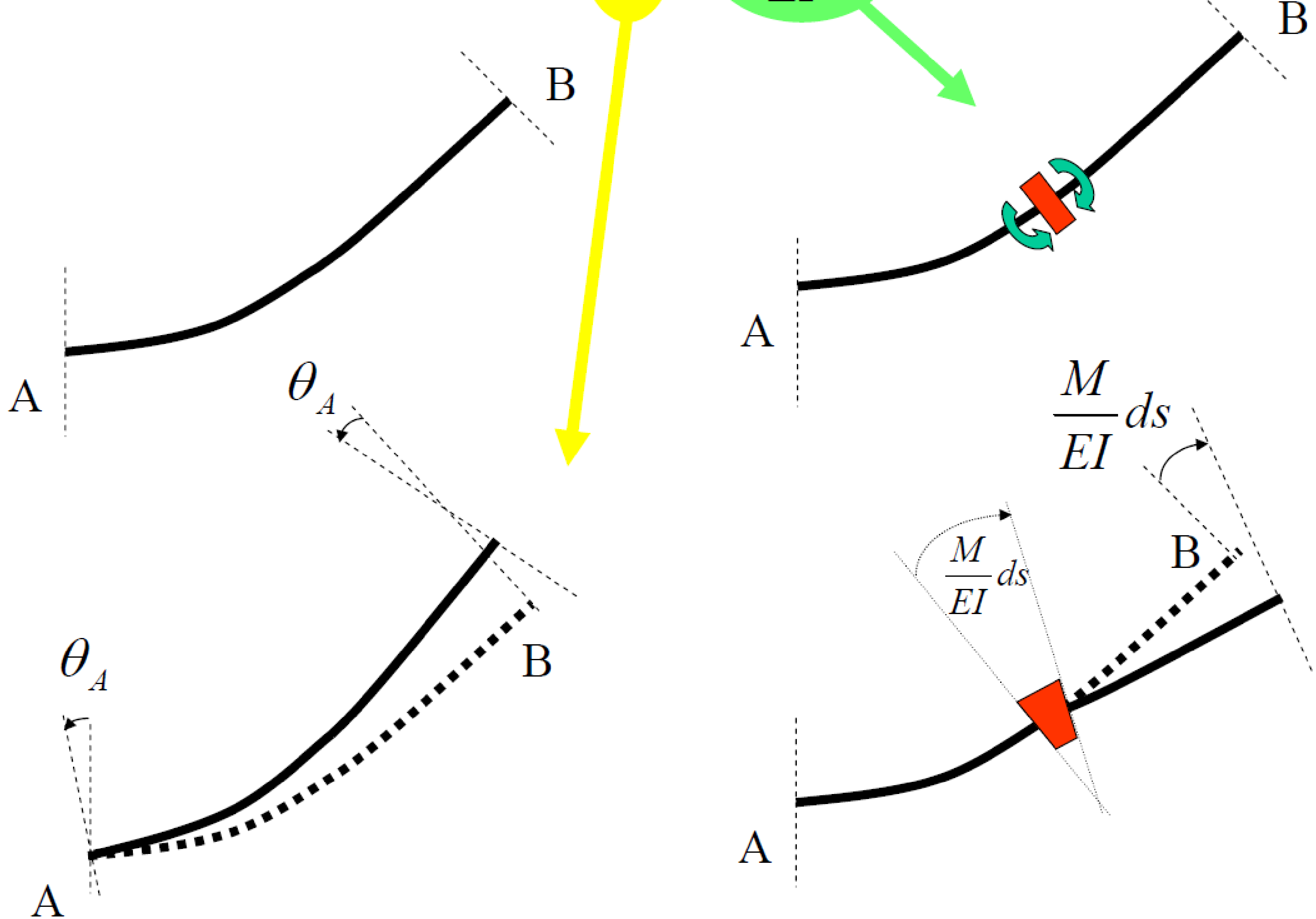
$$\vec{u}_B = \boxed{\vec{u}_A + \vec{\theta}_A \wedge \vec{r}_{AB}} + \int_A^B d\vec{u} + \int_A^B d\vec{\theta} \wedge \vec{r}$$

Desplazamiento sólido rígido

Desplazamiento inducido por los propios de las rebanadas

Teoremas energéticos: Fórmulas de Navier-Bresse

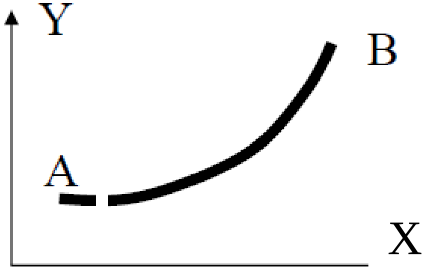
$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI}\,ds$$

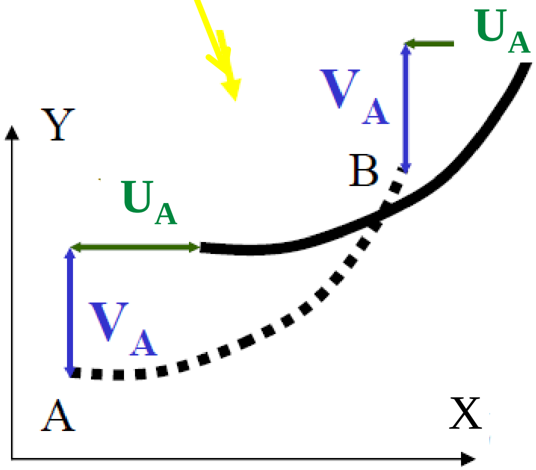


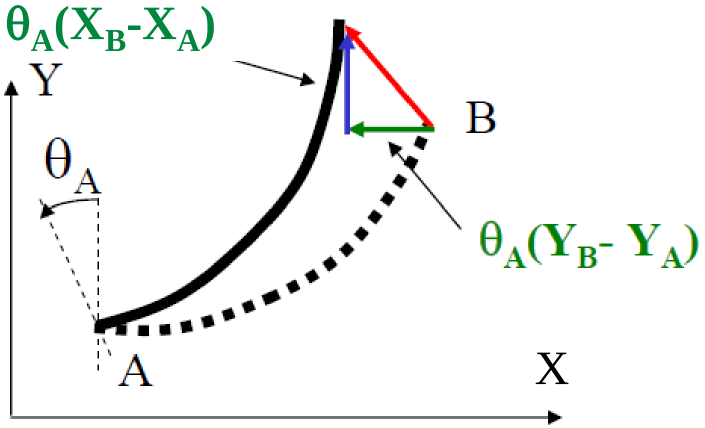
Teoremas energéticos: Fórmulas de Navier-Bresse

$$v_B = v_A + \theta_A(x_B - x_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dy - \frac{T}{GA_c} dx \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) ds$$

$$u_B = u_A - \theta_A(y_B - y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dx + \frac{T}{GA_c} dy \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (y_B - y) ds$$







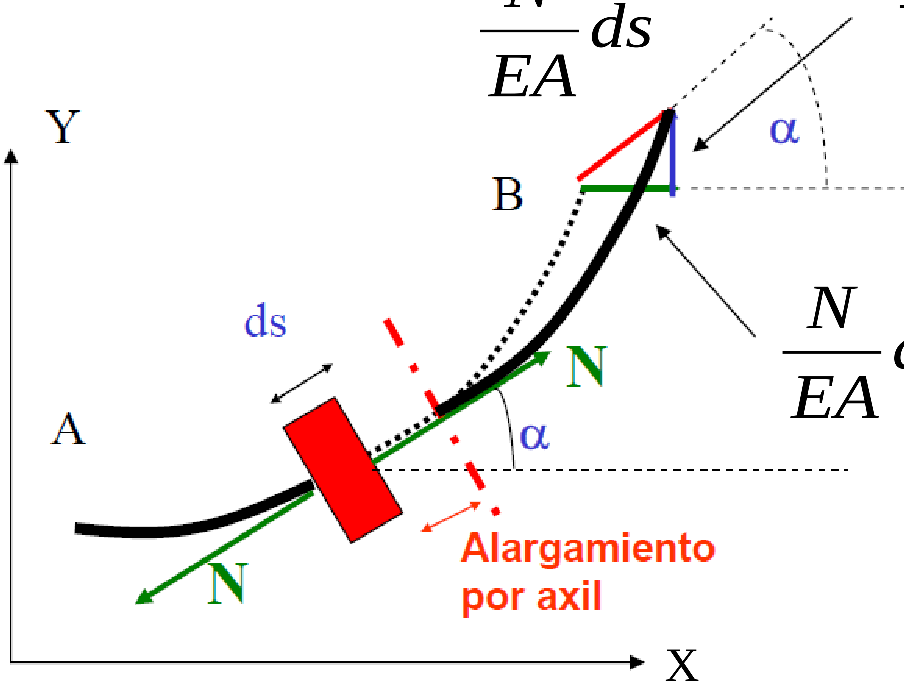
Teoremas energéticos: Fórmulas de Navier-Bresse

$$v_B = v_A + \theta_A\left(x_B - x_A\right) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA}dy - \frac{T}{GA_c}dx \right) + \int_A^B \frac{M}{EI}\left(x_B - x\right)ds$$

$$u_B = u_A - \theta_A\left(y_B - y_A\right) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA}dx + \frac{T}{GA_c}dy \right) - \int_A^B \frac{M}{EI}\left(y_B - y\right)ds$$

$$\frac{N}{EA}ds$$

$$\frac{N}{EA}ds \cdot sen\alpha = \frac{N}{EA}dy$$

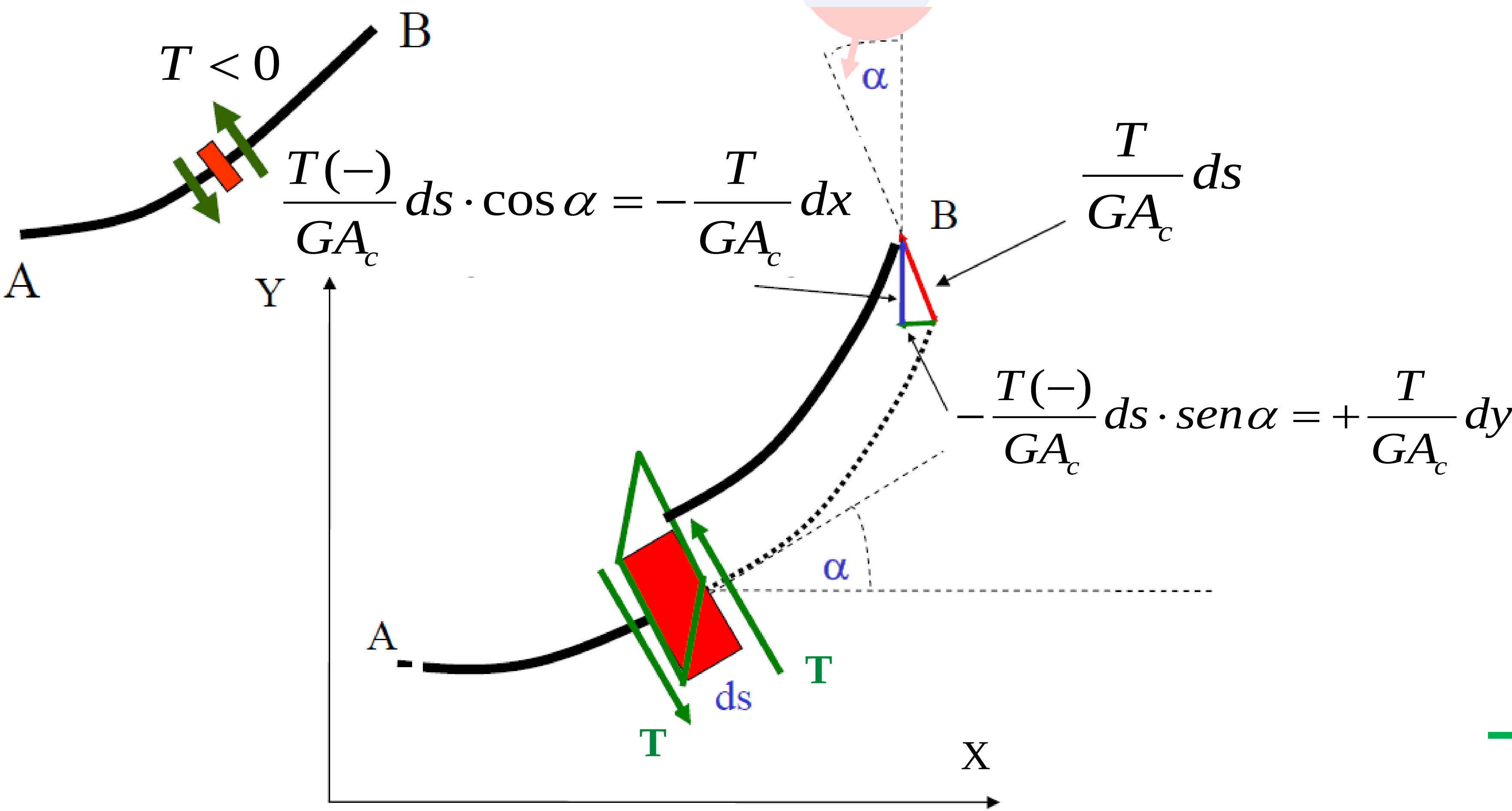


$$\frac{N}{EA}ds \cdot \cos\alpha = \frac{N}{EA}dx$$

Teoremas energéticos: Fórmulas de Navier-Bresse

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dy - \frac{T}{GA_c} dx \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) ds$$

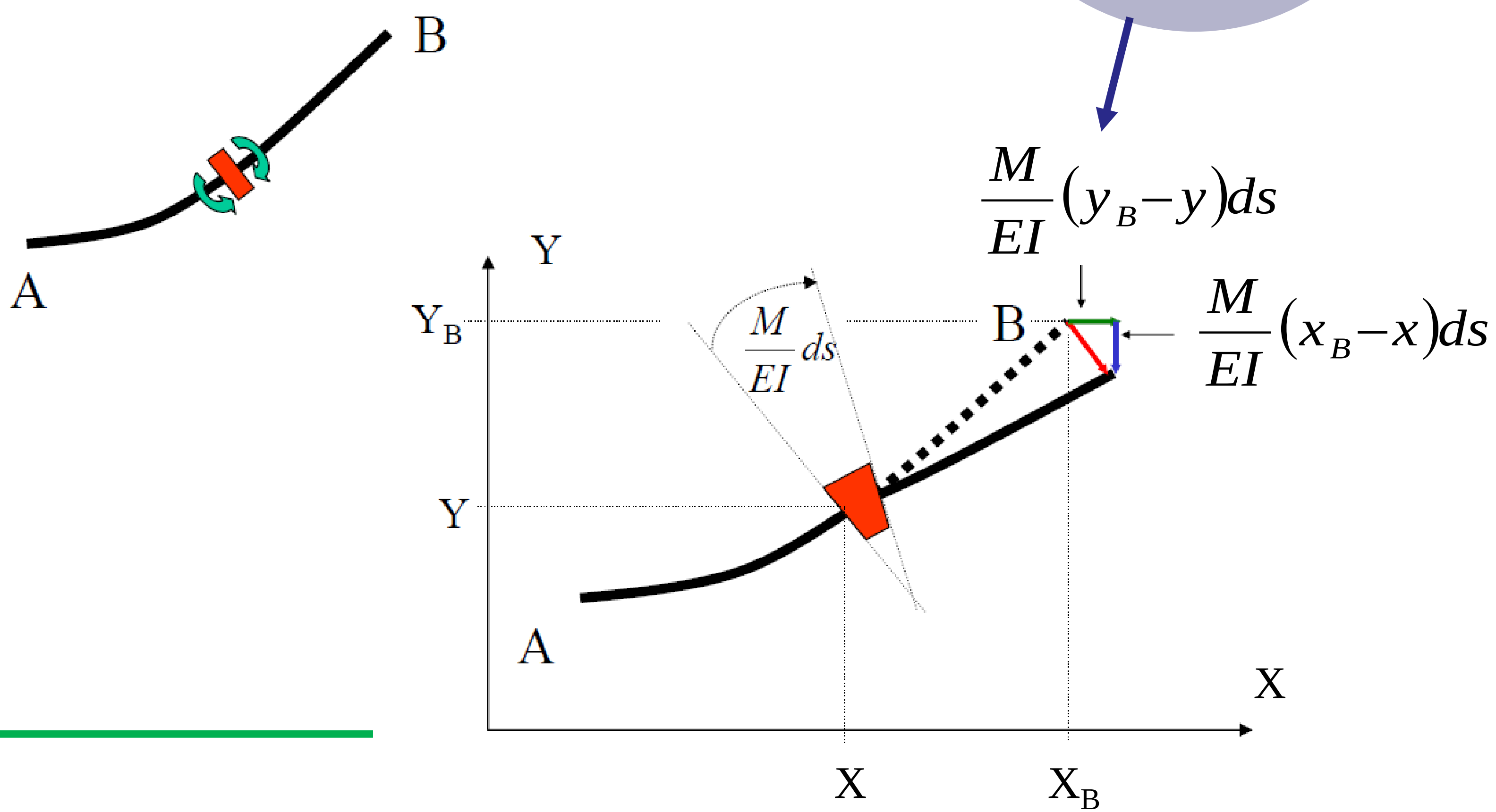
$$u_B = u_A - \theta_A (y_B - y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dx + \frac{T}{GA_c} dy \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (y_B - y) ds$$



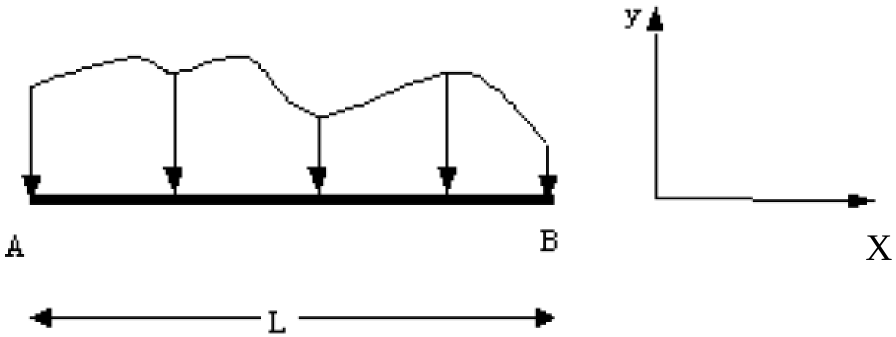
Teoremas energéticos: Fórmulas de Navier-Bresse

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dy - \frac{T}{GA_c} dx \right) + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) ds$$

$$u_B = u_A - \theta_A (y_B - y_A) + \int_A^B \left(\frac{N}{EA} dx + \frac{T}{GA_c} dy \right) - \int_A^B \frac{M}{EI} (y_B - y) ds$$



Teoremas energéticos: pieza recta con cargas en su plano



$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

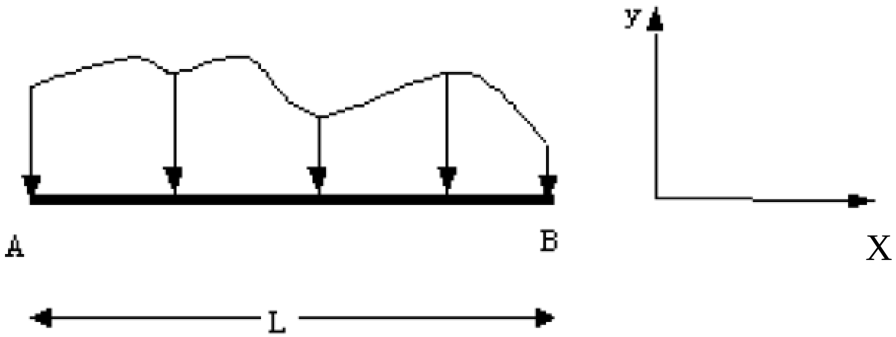
$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) - \int_A^B \frac{T}{GA_c} dx + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) dx$$

$$u_B = u_A + \int_A^B \frac{N}{EA} dx$$

En Cálculo de Estructuras se suele despreciar la contribución a los desplazamientos y giros debidos a los esfuerzos axil y cortante.

Esto, de ninguna manera, quiere decir que dichos esfuerzos sean nulos en la pieza.

Teoremas energéticos: pieza recta en su plano



$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) - \cancel{\int_A^B \frac{T}{GA_c} dx} + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) dx$$

$$u_B = u_A + \cancel{\int_A^B \frac{N}{EA} dx}$$

En Cálculo de Estructuras se suele despreciar la contribución a los desplazamientos y giros debidos a los esfuerzos axil y cortante.

Esto, de ninguna manera, quiere decir que dichos esfuerzos sean nulos en la pieza.

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) dx$$

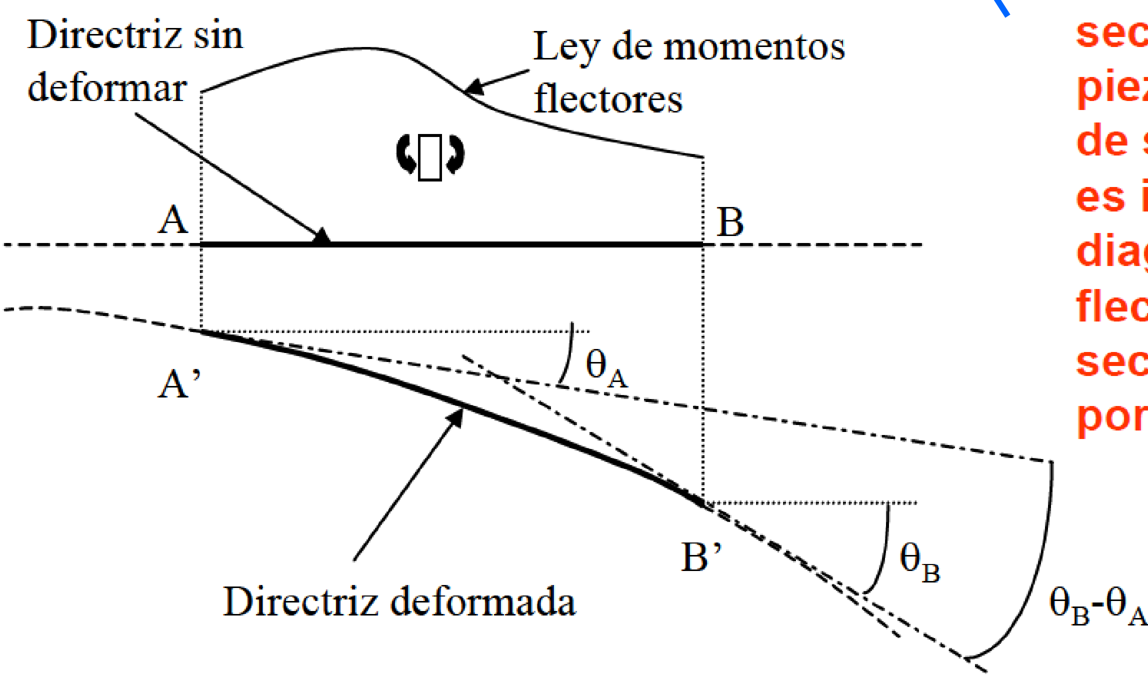
$$u_B = u_A$$

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

1er Teorema de Mohr

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI}dx \rightarrow \boxed{\theta_B - \theta_A = \int_A^B \frac{M}{EI}dx = \frac{M_{AB}}{EI}}$$

"El ángulo girado por la directriz entre dos secciones A y B de una pieza prismática recta de sección constante es igual al área del diagrama de momentos flectores entre ambas secciones dividido por el producto *EI*"

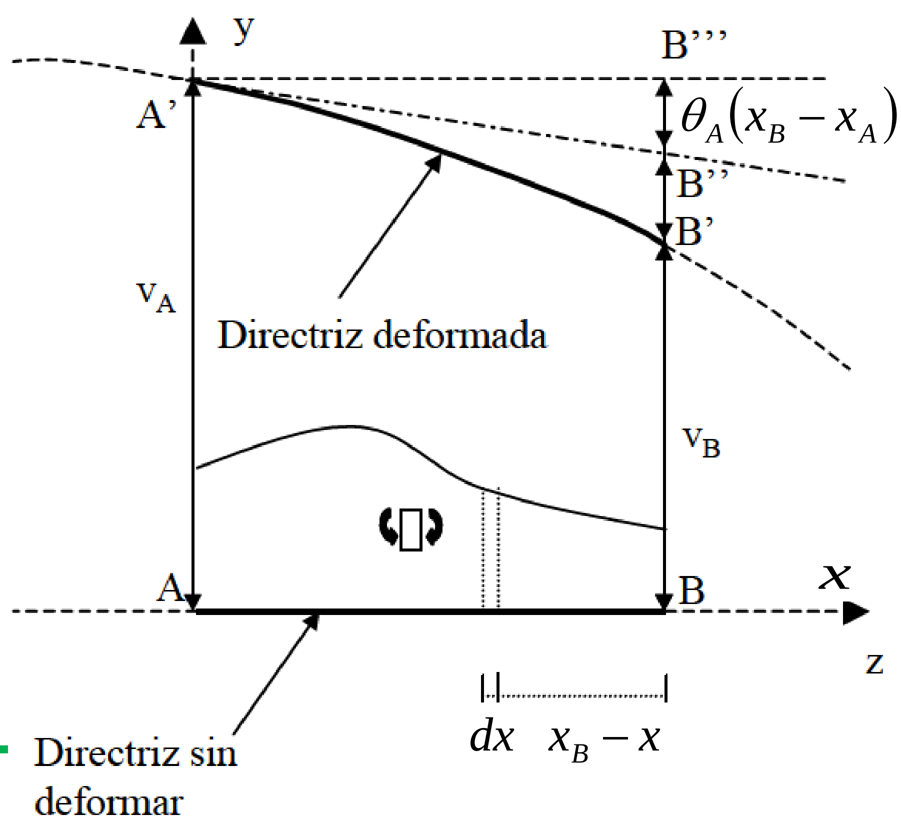


Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

2º Teorema de Mohr

$$t_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI}(x_B - x)dx \rightarrow \boxed{t_{B/A} = \frac{M_{AB}}{EI} d(cdg, B)}$$

$$v_B = v_A + \theta_A(x_B - x_A) + \int_A^B \frac{M}{EI}(x_B - x)dx \rightarrow v_B = v_A + \theta_A(x_B - x_A) + \frac{M_{AB}}{EI} d(cdg, B)$$

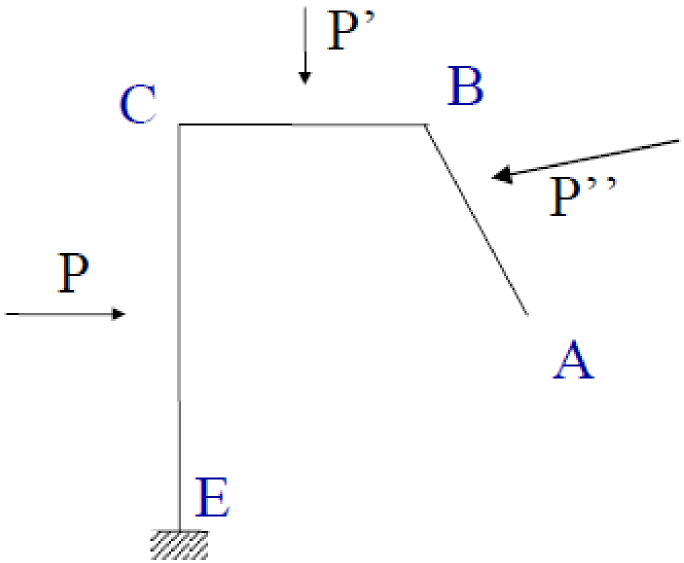


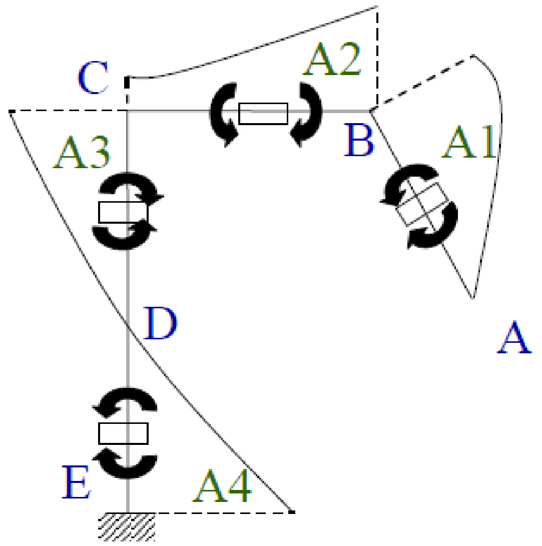
"La distancia, en dirección perpendicular a la directriz sin deformar, entre un punto B' de la directriz deformada a la recta tangente a la directriz deformada en otro (A) es igual al momento estático del área de momentos flectores entre las secciones A y B respecto del eje perpendicular a la directriz sin deformar que pasa por el punto B, dividido por el producto *EI*"

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

Piezas con puntos angulosos

θ_A ???



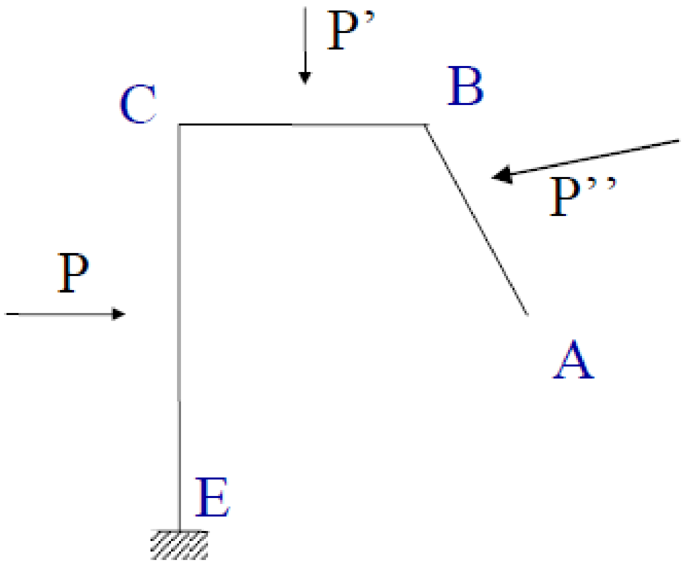


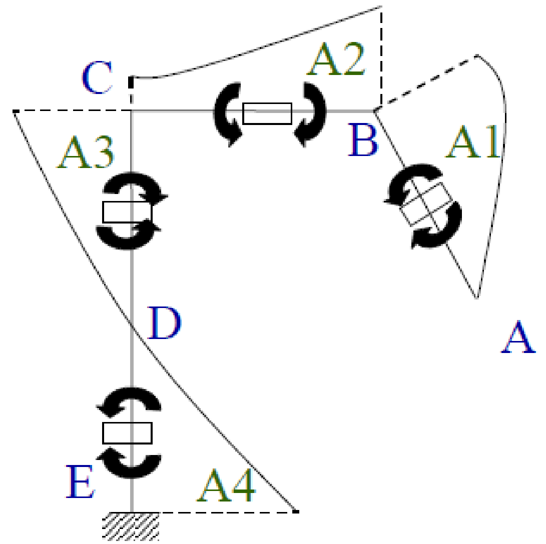
$$\theta_A - \theta_E = \theta_{AB} + \theta_{BC} + \theta_{CD} + \theta_{DE}$$

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

Piezas con puntos angulosos

$$\theta_A \ ???$$



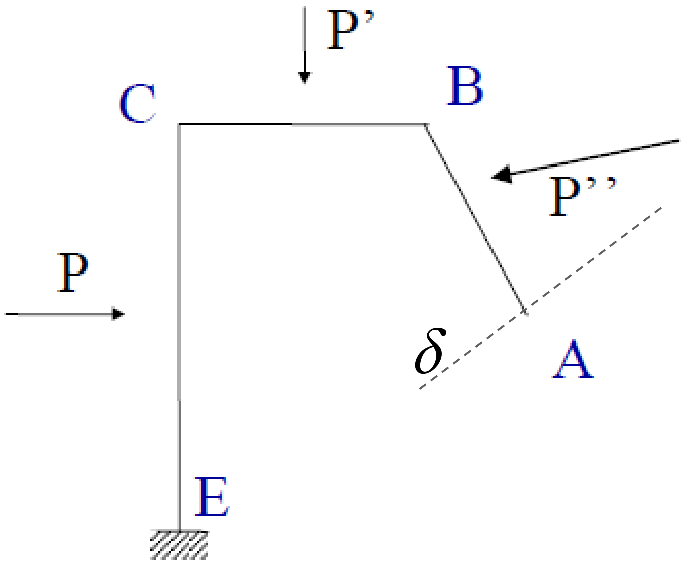


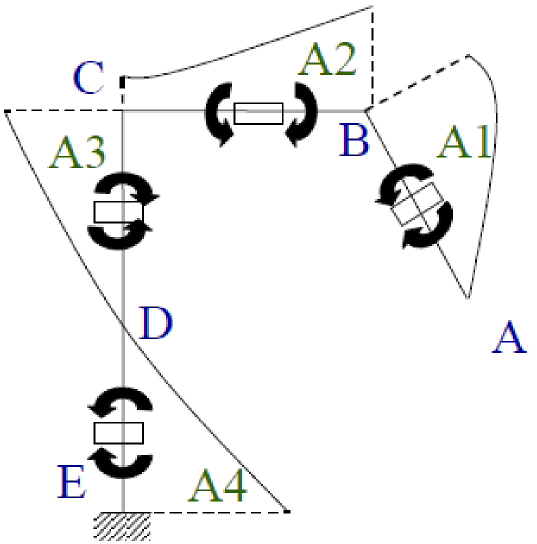
$$\theta_A - \theta_E = \theta_{AB} + \theta_{BC} + \theta_{CD} + \theta_{DE}$$

$$\theta_A - \cancelto{0}{\theta_E} = -\frac{M_{AB}}{(EI)_{AB}} - \frac{M_{BC}}{(EI)_{BC}} - \frac{M_{CD}}{(EI)_{CD}} + \frac{M_{DE}}{(EI)_{DE}}$$

Piezas con puntos angulosos

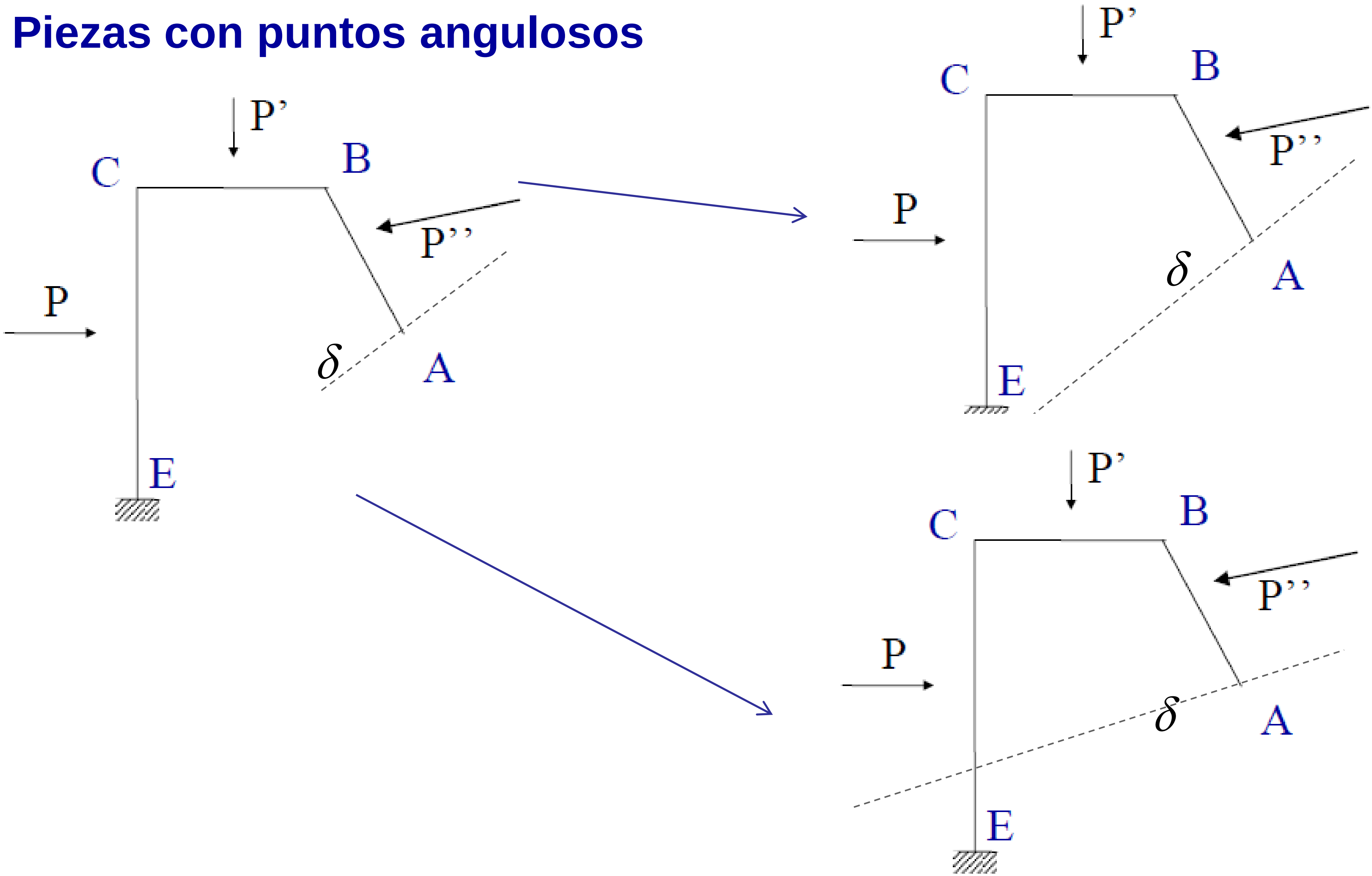
δ_A ???



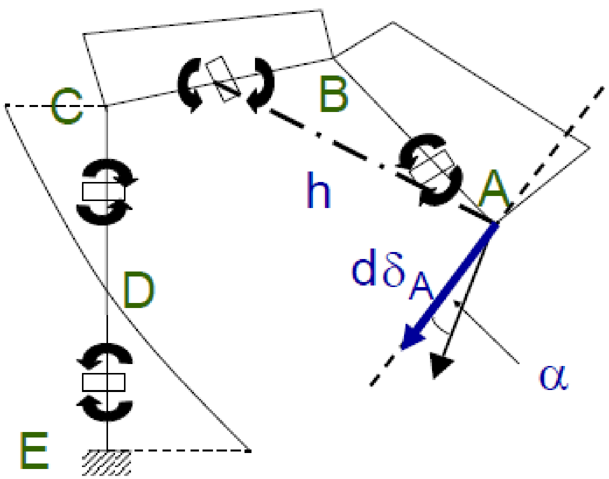


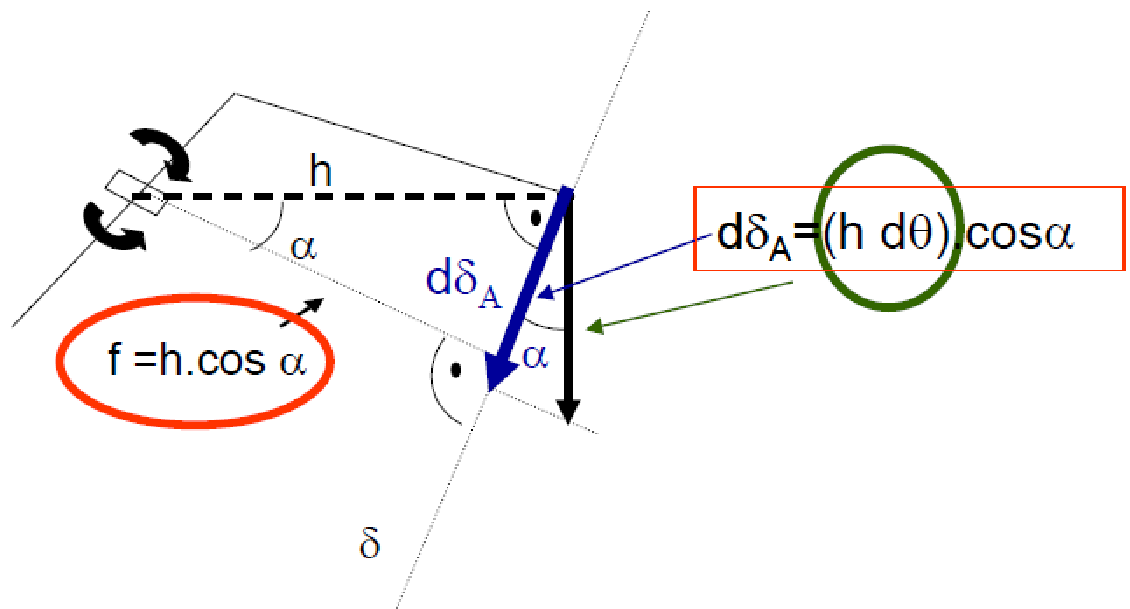
Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

Piezas con puntos angulosos

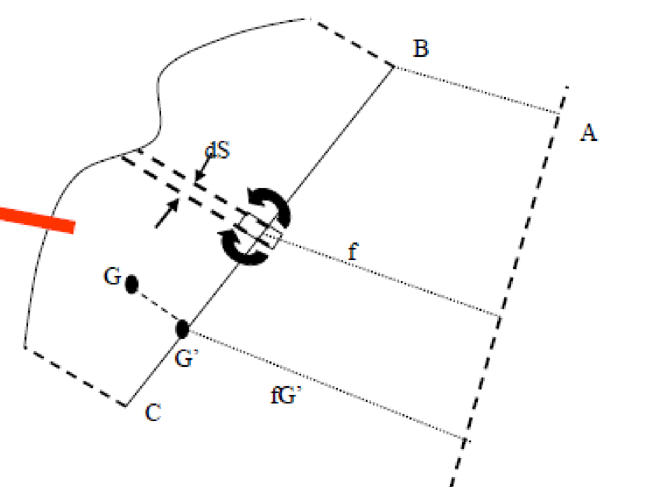


Piezas con puntos angulosos δ_A ???





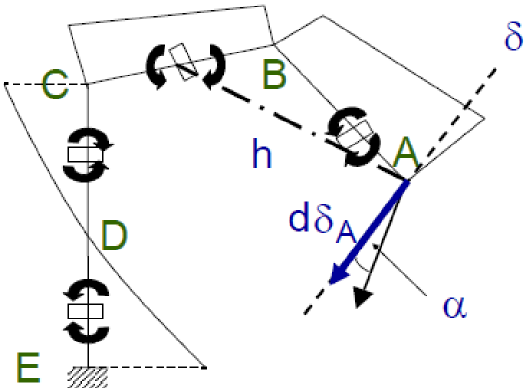
$$d\delta_A = f d\theta = f \frac{M_f}{EI} ds$$

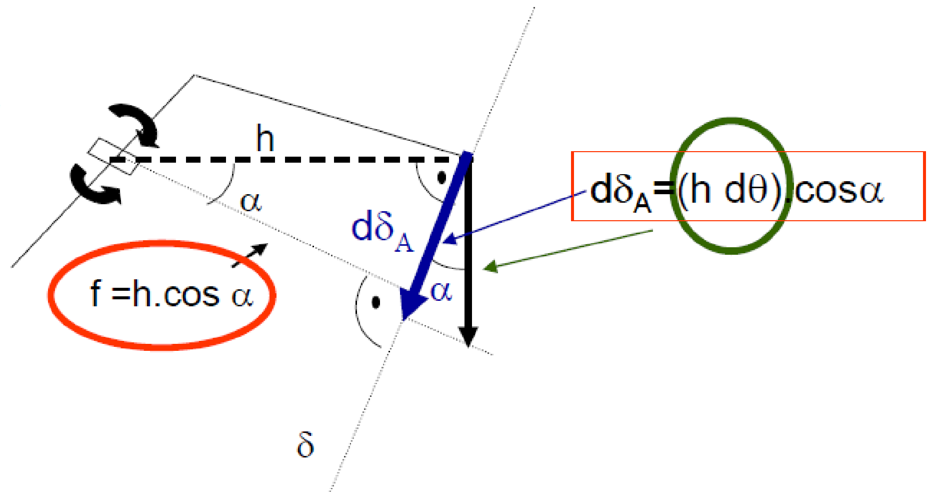


$$\delta_A = \int f d\theta = \int f \frac{M_f}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int f M_f ds$$

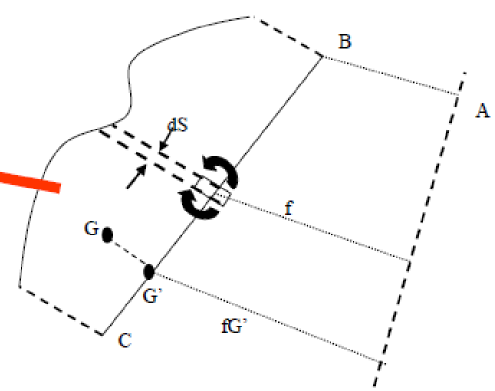
Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

Piezas con puntos angulosos δ_A ???





$$d\delta_A = f d\theta = f \frac{M_f}{EI} ds$$

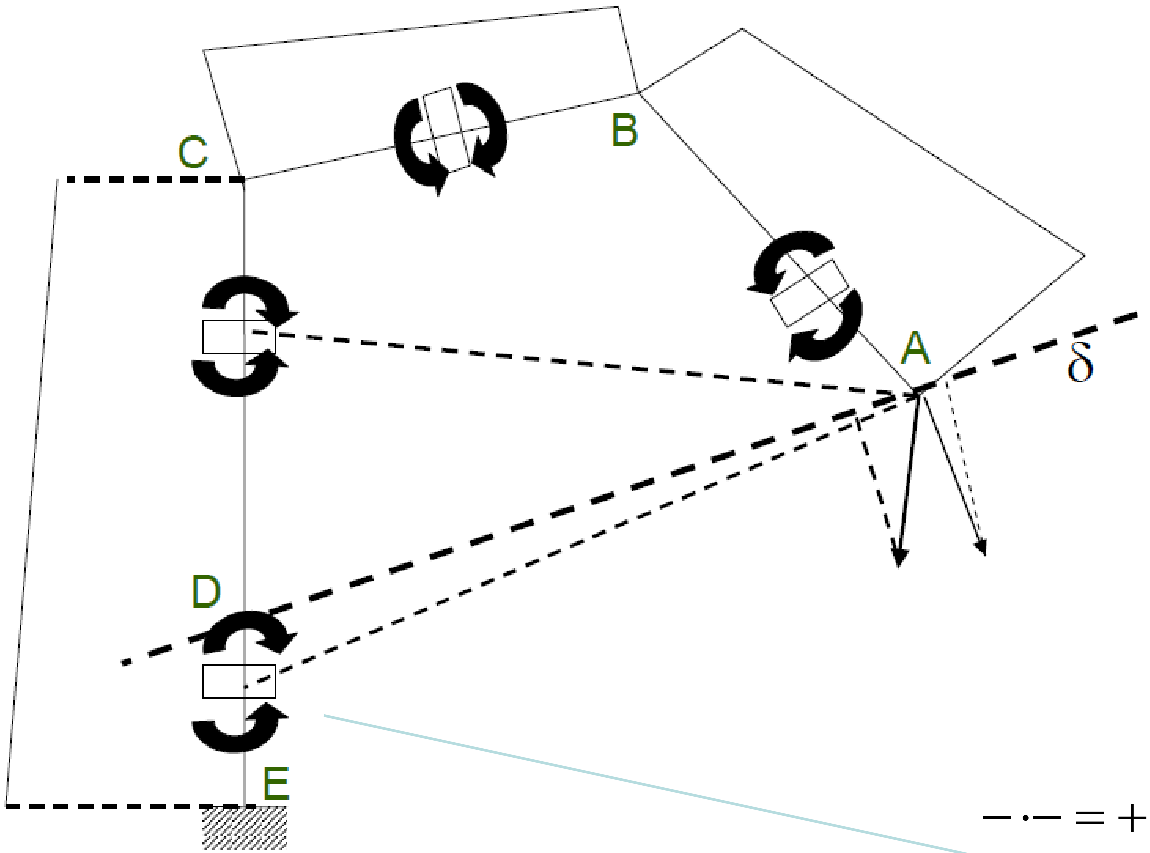


$$\delta_A = \int f d\theta = \int f \frac{M_f}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int f\, M_f ds$$

$$\delta_A = -\frac{M_{AB}}{(EI)_{AB}} d(g_{AB}', \delta) - \frac{M_{BC}}{(EI)_{BC}} d(g_{BC}', \delta) - \frac{M_{CD}}{(EI)_{CD}} d(g_{CD}', \delta) + \frac{M_{DE}}{(EI)_{DE}} d(g_{DE}', \delta)$$

Teoremas energéticos: Teoremas de Mohr

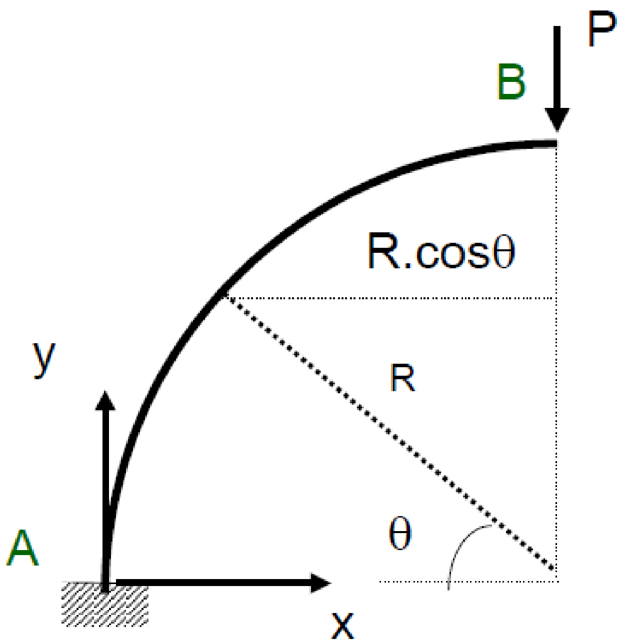
Piezas con puntos angulosos δ_A ???



$$- \cdot - = +$$

$$\delta_A = -\frac{M_{AB}}{(EI)_{AB}} d(g_{AB}´,\delta) - \frac{M_{BC}}{(EI)_{BC}} d(g_{BC}´,\delta) - \frac{M_{CD}}{(EI)_{CD}} d(g_{CD}´,\delta) + \frac{M_{DE}}{(EI)_{DE}} d(g_{DE}´,\delta)$$

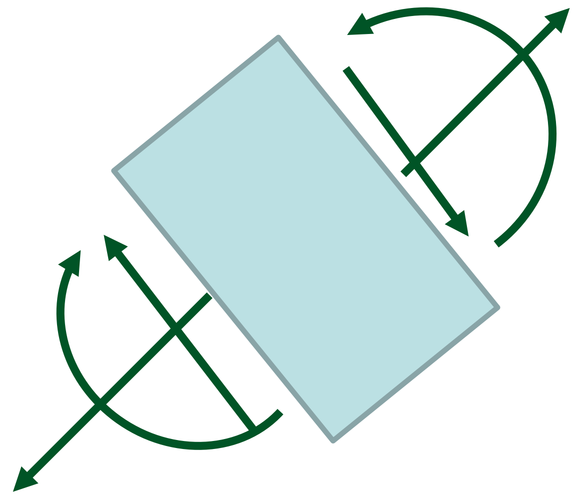
Piezas de directriz curva: ARCOS



$N = -\ P \cos \theta$

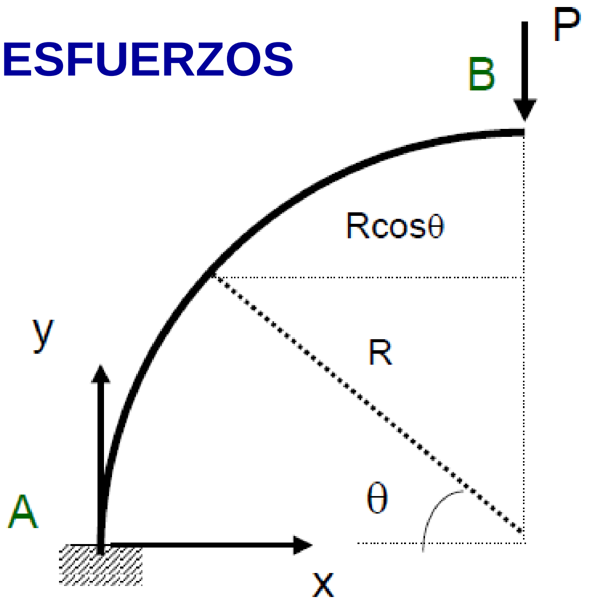
$T = \ \ P \text{ sen } \theta$

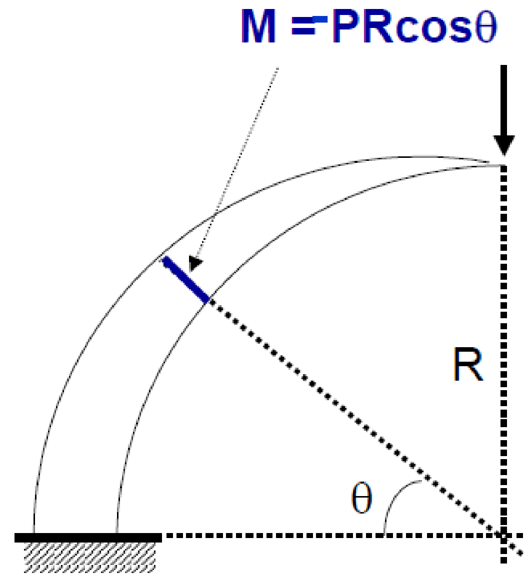
$M = -\ PR \cos \theta$



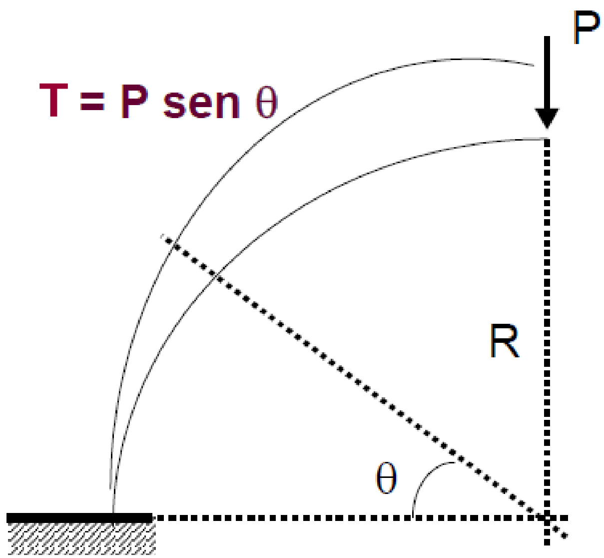
Piezas de directriz curva: ARCOS

LEYES DE ESFUERZOS

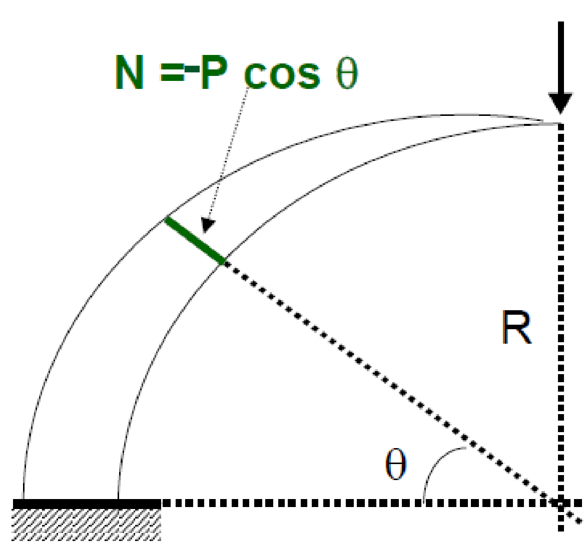




Momentos flectores



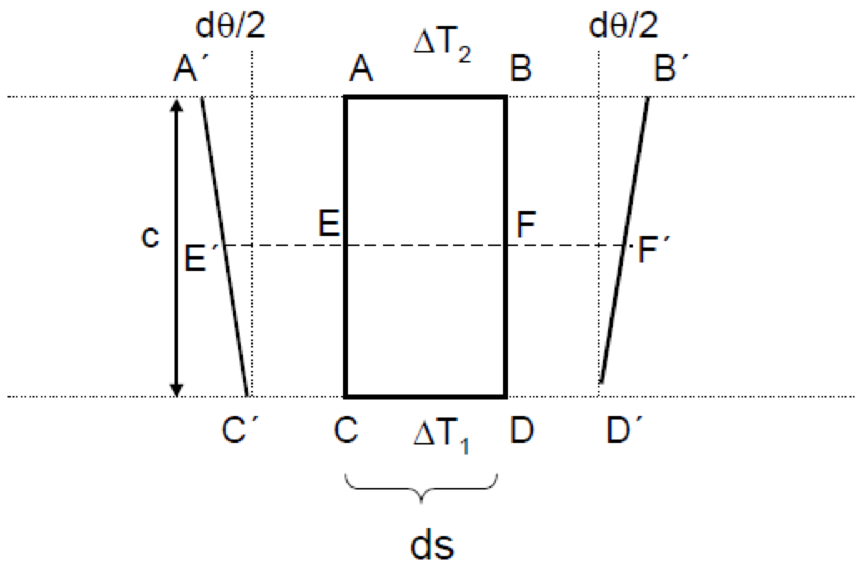
Esfuerzos cortantes



Esfuerzos axiles

Teoremas energéticos: Cargas térmicas

Deformación de una rebanada



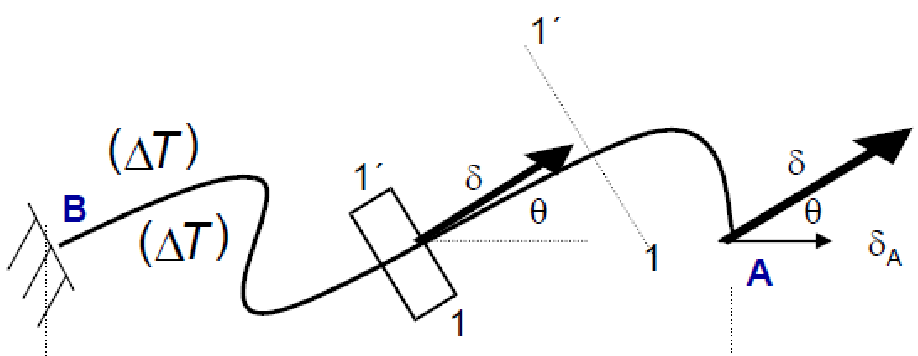
Alargamiento o acortamiento:

$$\boxed{EE' + FF' = \alpha ds \frac{\Delta T_2 + \Delta T_1}{2}}$$

Giro:

$$\boxed{d\theta = \frac{-\alpha \, ds}{c} (\Delta T_2 - \Delta T_1)}$$

Barras de directriz curvilínea sometidas a una variación uniforme de temperatura



"El movimiento en una dirección definida por un vector, del extremo de una barra curvilínea en ménsula se obtiene multiplicando el coeficiente de dilatación por el incremento de temperatura y por la proyección de la directriz de la viga en la dirección **u".**

$$u_A = \int_B^A (\alpha \, ds \, \Delta T) \cos\theta = \alpha \, \Delta T \int_B^A (ds) \cos\theta = \alpha \, \Delta T \, L$$