Tema 6

Funciones reales de varias variables

6.1 Continuidad y límites

6.1.1 Introducción.

Existen muchos procesos en la naturaleza que dependen de dos o más variables. Por ejemplo, el volumen de un sólido o el trabajo realizado por una fuerza.

Definición 6.1 *Una función real de n variables reales es una aplicación f definida en un subconjunto D de* $\mathbb{R}^n$ *que asigna a cada n-tupla un número real.*

$$f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Al conjunto D se le dice ***dominio*** *y al conjunto de imágenes de f se le dice* ***rango*** *o* ***recorrido*** *de f.*

Nuestro estudio se va centrar en el caso de dos variables, pudiéndose se generalizar a n variables. Una función de dos variables involucra a tres variables, a las variables $(x, y) \in D$ se les denomina **variables independientes**, a la variable $z = f(x, y)$ se le denomina **variable dependiente**.

Si se describe la función mediante de una ecuación que involucre a las variables, se considera, salvo que se diga explícitamente lo contrario, que el dominio es todo el conjunto de puntos para los que está definida la ecuación.

Ejemplo 6.2 *Hallar el dominio de la función de dos variables* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

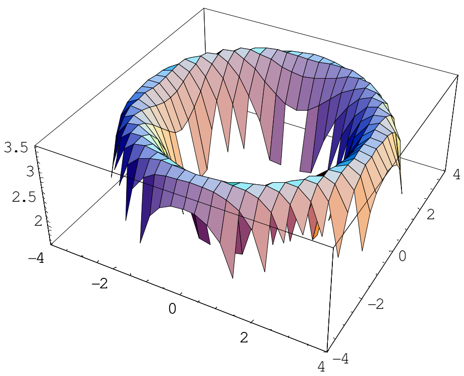
Esta expresión tiene sentido para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para los que no se anula el denominador.

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ■

Ejemplo 6.3 *Hallar el dominio de la función de dos variables* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x, y) = Ln\,((16 - x^2 - y^2)\,(x^2 + y^2 - 4))$$

Esta expresión tiene sentido para argumentos del Ln positivos



$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ((16 - x^2 - y^2)\,(x^2 + y^2 - 4)) > 0\}$

$((16 - x^2 - y^2)\,(x^2 + y^2 - 4)) > 0 \Leftrightarrow$

signo $(16 - x^2 - y^2)$ = signo $(x^2 + y^2 - 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - x^2 - y^2 > 0 \\ x^2 + y^2 - 4 > 0 \end{cases} \text{ó} \begin{cases} 16 - x^2 - y^2 < 0 \\ x^2 + y^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 4 < x^2 + y^2 < 16$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 4 < x^2 + y^2 < 16\}$ ■

Definición 6.4 *La gráfica de una función de dos variables f es el conjunto*

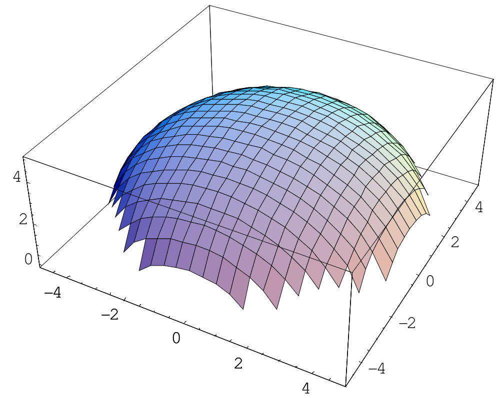
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{ donde } z = f(x, y)\ \}$$

Geométricamente esta gráfica se puede considerar como una superficie en el espacio.

Ejemplo 6.5 *Dada la función* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Encontrar el dominio y el recorrido.



Dominio: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 25 - x^2 - y^2 > 0\}$

$25 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 5^2 \geq x^2 + y^2$: El círculo cerrado (incluye la circunferencia) de centro (0, 0) y radio 5.

Rango:

$25 - x^2 - y^2 < 25 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{25 - x^2 - y^2} \leq 5$:

El segmento [0,5]

La gráfica de f es la mitad superior de la esfera de centro (0, 0, 0) y radio 5. ■

6.1.2 Límites y continuidad

Definición 6.6 (Entorno abierto en el plano) *Se llama entorno abierto de centro A(a,b) y radio* δ *al conjunto de puntos del plano cuya distancia a A es menor que* δ.

$$B_\delta(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } d(P, A) < \delta\ \}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta\}$$

Es el círculo abierto de centro A y radio δ

Definición 6.7 *Sea una función* $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *un punto* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *y un número real L. Se dice que L es el límite de la función f cuando* (x, y) *tiende a* $A(a, b)$,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \text{ se verifica } |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Observaciones:

- El punto $A(a,b)$ puede no pertenecer al dominio.
- Tiene que existir un entorno abierto del punto A que tenga todos sus puntos, excepto quizá el propio A, que pertenezcan al dominio.

Ejemplo 6.8 *Calcular* $\lim\limits_{(x.y)\to(4,3)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Usando los límites de sumas y productos se tiene:

$\lim\limits_{(x.y)\to(4,3)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2*4*3}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{24}{5}$ ■

La función puede aproximarse al punto *A* por cualquier dirección. Si el si el valor obtenido no es el mismo al aproximarse por cualquier trayectoria, entonces el límite no existe.

Ejemplo 6.9 *Calcular* $\lim\limits_{(x.y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\lim\limits_{(x.y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{0}$, no se puede determinar si existe o no el límite

Veamos cuál es el valor del límite al aproximarnos por distintas rectas que pasan por (0,0). Estas rectas son de la forma $y = mx$

$\lim\limits_{\substack{(x.y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2xmx}{\sqrt{x^2+(mx)^2}} = \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}}$, depende de la recta por la que nos aproximemos. Por tanto, no existe límite. ■

Ejemplo 6.10 *Calcular* $\lim\limits_{(x.y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{(x.y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}$, no se puede determinar si existe o no el límite

Para tantear un posible valor veamos cuál es el valor del límite al aproximarnos por recta que pasan por (0,0). Estas rectas son de la forma $y = mx$

$$\lim_{(x.y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(1+m^2)x^2} = \lim_{(x.y)\to(0,0)} \frac{x}{(1+m^2)} = 0$$

Vamos a demostrar que ese límite es 0, para ello veamos cómo es δ dependiendo de ε:

$x^2 < x^2 + y^2 \Rightarrow \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2} < 1 \Rightarrow \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|\, x^2}{x^2+y^2} < |x|$

$x^2 < x^2 + y^2 \Rightarrow |x|^2 = x^2 < x^2+y^2$. Por tanto si $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, se verifica $|x|^2 < \delta^2$ $\Rightarrow |x| < \delta$. Con lo cual $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2} - 0\right| < |x| < \delta$, bastará considerar $\delta = \varepsilon$ ■

Definición 6.11 *Sea una función* f*:* $D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *un punto* $A(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *verificando que la función está definida en un entorno abierto de A. Se dice que f es continua en el punto A si verifica:*

a) *Existe* $f(a, b)$
b) *Existe el límite real cuando P tiende A*
c) *Y ambos coinciden, esto es,* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

Ejemplo 6.12 *La función* $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ *es continua en el punto* (0,0)

$f(0,0)=0=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{x^2+y^2}$ ■

6.2 Derivadas parciales

Sea $f\colon D\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de dos variables. Nos podemos preguntar cómo afectaría a la función variar una de las variables independientes, manteniendo constante la otra. Se presentan dos situaciones: variar *x* manteniendo *y* constante ó variar *y* manteniendo *x* constante.

Definición 6.13 *Sea una función* $f\colon D\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, *se define:*

a) ***Derivada parcial de f respecto de x*** *en* $M(a,b)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=f_x(a,b)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

b) ***Derivada parcial de f respecto de y*** *en* $M(a,b)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=f_y(a,b)=\lim_{h\to0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

Para procede al cálculo de la derivada parcial respecto de una variable, se mantiene la otra como constante, y se deriva respecto a la variable considerada.

Ejemplo 6.14 *Calcular las derivadas parciales de la función* $f(x,y)=x^2\ sen\ y^2$

Su dominio es $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\ seny^2$ Considerar *y* como constante y derivar respecto de *x*

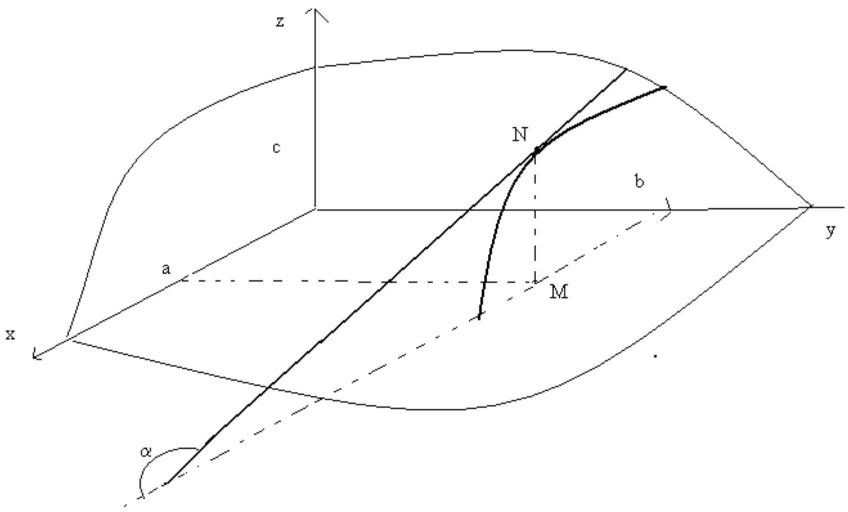
$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2\ 2y\ cosy^2$ Considerar *x* como constante y derivar respecto de *y* ■

Observación 6.15 **(Interpretación geométrica)**

Las derivadas parciales se pueden interpretar como las pendientes de la superficie que define la función en las direcciones de *x* e *y*.

Sea $f\colon D\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $M(a,b)\in D$, se considera la curva *C* formada por la intersección de las superficies $\begin{cases}superficie\ z=f(x,y)\\ plano\ paralelo\ al\ XOZ,\ \ y=b\end{cases}$ y el punto $N(a,b,c)$ con $c=f(a,b)$, $N\in C$

$\frac{\partial f}{\partial x}(M)$ es la pendiente en el punto *N* de la recta tangente a la curva *C* en el plano considerado = $tag\ \alpha$



■

El proceso de cálculo de derivadas parciales se puede repetir sobre las derivadas obtenidas. A las derivadas f_{xy} y f_{yx} se les denomina derivadas parciales cruzadas.

Ejemplo 6.16 *Calcular las derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x, y) = x^2\ sen\ y^2$.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\ sen\ y^2\ :\ f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2\ seny^2\ ,\ f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4xy\cos y^2$$

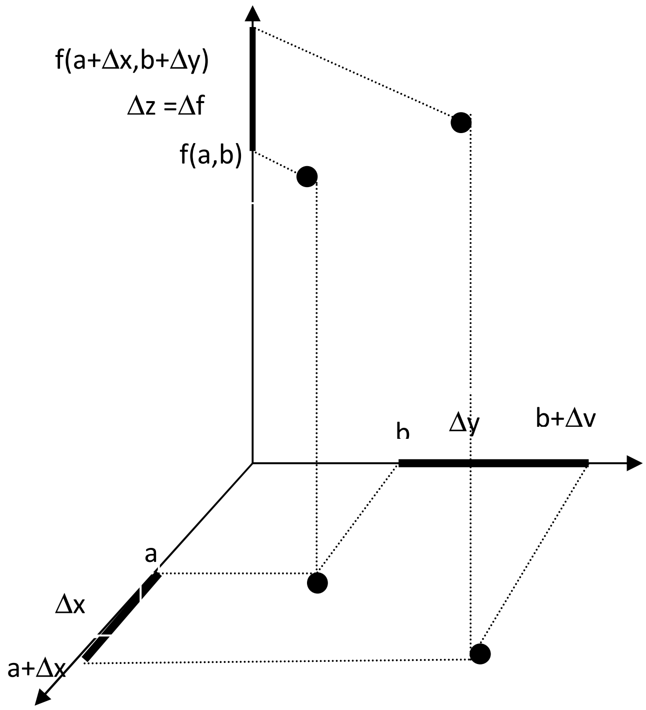
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2\ 2y\ cosy^2\text{:}\quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 4xy\ cos\ y^2,$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2x^2\ cos\ y^2 -\ 4x^2\ y^2 sen\ y^2$$

■

Proposición 6.17 *Si las derivadas cruzadas existen y son continuas en un entorno abierto de un punto M(a,b), entonces, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$ en todo el entorno.*

6.3 Diferencial total.



Definición 6.18 *Sea una función $z = f(x,y)$. Si Δx y Δy son los incrementos de x e y, el incremento de z viene dado por $\Delta z = \Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$*

Definición 6.19 *Sea una función $z = f(x,y)$ y Δx y Δy los incrementos de x e y, se definen las diferenciales de las variables independientes como $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$ y la **diferencial total** de la variable dependiente z como*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

Ejemplo 6.20 *Hallar la diferencial total de la función $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$*

$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy$$

Definición 6.21 *Una función $z = f(x,y)$ es **diferenciable** en un punto $M(a,b)$ si*

$$\Delta f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y + \delta_1\Delta x + \delta_2\Delta y$$

donde δ_1 y $\delta_2 \to 0$ *cuando* $(\Delta x, \Delta y) \to 0$.

La función es diferenciable en una región R si es diferenciable en todo punto de R.

Teorema 6.22 *Sea $f(x,y)$ una función de x e y si f_x y f_y son continuas en un entorno abierto de $M(a,b)$, entonces f es diferenciable en todo el entorno.*

Teorema 6.23 *Sea $f(x, y)$ una función de x e y si f es diferenciable en $M(a, b)$, entonces f es continua en M.*

La diferencial total se puede usar para aproximar funciones: Al ser δ_1 y $\delta_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to 0$, Δf se puede aproximar por df. Veamos algún ejemplo:

Ejemplo 6.24 *Hallar, mediante la diferencial, el valor aproximado de*

$$\sqrt{6'25^2 + 7'875^2}$$

Se trata de evaluar la función $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto (6'25, 7'875), considerando incrementos en (6, 8).

$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, estas funciones son continuas en un entorno abierto del punto $M(6, 8)$. Por tanto, f es diferenciable en ese punto M.

Los incrementos son: $\Delta x = dx = 0'25$, $\Delta y = dy = -0'125$ y $f(6, 8) = 10$

$f_x(M) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(M) = = \frac{3}{5}$, $f_y(M) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(M) = \frac{4}{5}$, $f(6,7) =$

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

Por tanto Δf se puede aproximar por $\frac{3}{5}\,0'25 - \frac{4}{5}0'125 = \frac{1}{20} = 0'05$

$f(6'25, 7'875) = f(6, 7) + \Delta f \Rightarrow f(6'25, 7'875) \approx f(6, 7) + \Delta f = 10 + 0'05 = 10'05.$ ■

Ejemplo 6.25 *Hallar, mediante la diferencial, un valor aproximado del área de un rectángulo de dimensiones 35'02m por 24'97m.*

El área del rectángulo viene dada por la función $f(x, y) = x.y$ siendo x e $y > 0$.

Se desea calcular un valor aproximado para f(35'02, 24'97)

$df = f_x\, dx + f_y\, dy = y\, dx + x\, dy$

Si $M(35, 25)$, los incrementos son $dx = 0'02$, $dy = -0'97$. Además $f(35, 25) = 875$

Por tanto $df = 25*0'02 + 35*(-0'03) = - 0'55$

Por tanto $f(35'02,24'97) \approx f(35, 25) + df = 875 - 0'55 = 874'45\ m^2$. ■

6.4 Derivada direccional.

Se trata de estudiar la rapidez con la que varía una función cuando nos movemos en una dirección cualquiera.

Sea $f(x, y)$ un función de dos variables con dominio D y $M(a, b) \in D$.

Definición 6.26 *Dada una función $f(x,y)$ y un vector unitario $\vec{u}(\alpha,\beta)$. La* ***derivada direccional*** *de f en la dirección de $\vec{u}$, se denota por $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M)$, es*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\alpha, b+h\beta) - f(a,b)}{h}$$

Observación: Si P es un punto cualquiera de la recta que pasa por M y tiene por vector direccional $\vec{u}$, se verifica $P = M + h\vec{u}$, $h \in \mathbb{R}$, así $(x, y) = (a, b) + h(\alpha,\beta)$. Por tanto las coordenadas de un punto P genérico en dicha recta son $(a + h\alpha, b + h\beta)$.

Geométricamente la derivada direccional en un punto $M(a, b)$ es la pendiente en el punto $f(M)$ de la recta tangente de la curva que define la superficie $z = f(x, y)$ en el plano que pasa por el punto P y es paralelo a $\vec{u}$.

Definición 6.27 *Sea la función $f(x, y)$ se define* ***vector gradiente*** *al vector*

$$\overrightarrow{\nabla f} = (f_x, f_y)$$

Teorema 6.28 (Cálculo de la derivada direccional) *Si $f(x, y)$ es diferenciable, entonces la derivada direccional en la dirección del vector unitario $\vec{u}$ es igual al producto escalar del vector gradiente en el punto por el vector unitario $\vec{u}$:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) = \overrightarrow{\nabla f}(M) . \vec{u}$$

Demostración.

Si f es diferenciable, $\Delta f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y + \delta_1 \Delta x + \delta_2 \Delta y$, *donde* δ_1 y $\delta_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to 0$

Por otra parte, sea $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ y el incremento de f, $\Delta f = f(a + h\alpha,\ b + h\beta) - f(a, b)$, donde $\Delta x = h\alpha$ y $\Delta y = h\beta$. Cuando $h \to 0$ se verifica $(\Delta x, \Delta y) \to 0$ y, por tanto, δ_1 y $\delta_2 \to 0$

Así, $\Delta f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\ h\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\ h\beta + \delta_1 h\alpha + \delta_2 h\beta$

Si $h \neq 0$, $\frac{\Delta f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\ \alpha, + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\ \beta + \delta_1 \alpha + \delta_2 \beta$.

Por tanto, $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(a,b)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\ \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\ \beta\right) + \lim_{h\to 0}(\delta_1\alpha + \delta_2\beta)$

El primer límite no depende de h y el segundo es 0. En consecuencia,

$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(a,b)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\ \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\ \beta$.

Así, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\ \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\ \beta = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)(\alpha, \beta) = \nabla f(M) \cdot \vec{u}$

La derivada direccional es el producto escalar del vector gradiente en el punto por el vector unitario en la dirección en la que nos movemos. ■

Ejemplo 6.29 *Calcular la derivada direccional en el punto M(7,2) según la dirección* $\vec{s}(1,1)$ de la función $f(x, y) = x^2 - 6y^2$.

$f_x = 2x$, $f_y = -12y^2$, $\nabla f = (2x, -12y)$, $\nabla f(M) = (14, -24)$,

$\vec{s}(1,1)$, $|\vec{s}| = \sqrt{2}$, el vector unitario en la dirección es $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) = (14, -24).\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{14}{\sqrt{2}} - \frac{24}{\sqrt{2}} = -5\sqrt{2}$ ■

Teorema 6.30 *Dada una función $f(x, y)$ se verifica que, la derivada direccional en un punto dado, siguiendo la dirección del vector gradiente, es la derivada direccional que toma el valor máximo. Ese valores igual al módulo del vector gradiente en el punto.*

Demostración.

$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) = \overrightarrow{\nabla f}(M) \cdot \vec{u}$

El producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman. Sea φ el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{\nabla f}(M)$ y $\vec{u}$.

Se verifica $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) = \overrightarrow{\nabla f}(M).\vec{u} = \left|\overrightarrow{\nabla f}(M)\right| |\vec{u}| \cos\varphi$

Al ser $\vec{u}$ un vector unitario se tiene $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) = \left|\overrightarrow{\nabla f}(M)\right| \cos\varphi$

El coseno de un ángulo varía entre -1 y 1. Por tanto, $-\left|\overrightarrow{\nabla f}(M)\right| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) \leq \left|\overrightarrow{\nabla f}(M)\right|$

En consecuencia, el mayor valor de la derivada direccional se alcanza si $cos\varphi = 1$.

$cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \vec{u}$ tiene la misma dirección que $\overrightarrow{\nabla f}(M)$.

Por tanto la derivada direccional es máxima en la dirección de $\overrightarrow{\nabla f}(M)$, y su valor en esa dirección es $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(M) = \left|\overrightarrow{\nabla f}(M)\right| cos0 = \left|\overrightarrow{\nabla f}(M)\right|$ ■

Ejemplo 6.31 *Encontrar la derivada direccional máxima de la función* $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ *en el punto* $A(2, 1)$.

$f_x = 8x$, $f_y = 18y$, $\nabla f = (8x, 18y)$, $\nabla f(A) = (16, 18) = 2(8, 9)$

La dirección del vector gradiente es $\vec{s}(8,9)$, $|\vec{s}| = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{145}$, el vector unitario en la dirección es $\vec{u} = \left(\frac{8}{\sqrt{145}}, \frac{9}{\sqrt{145}}\right)$, la derivada direccional máxima siguiente esa dirección y su valor es $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \left|\overrightarrow{\nabla f}(A)\right| = 2\sqrt{8^2 + 9^2} = 2\sqrt{145}$ ■

6.5 Derivación implícita.

Teorema 6.32 (Regla de la cadena generalizada)

Sea $z = f(x, y)$ una función diferenciable de dos variables x e y, tal que, ambas variables sean, a su vez, funciones de otras dos variables u y v, $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$, *y que existan las derivadas parciales de primer orden* $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$, *entonces se verifica que z es función de u y v, y existen* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *y vienen dadas por*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \text{ y } \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Demostración.

$z = f(x, y) = z = f(x(u, v), y(u, v))$ es función de u y v.

f es diferenciable: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

A su vez $x = x(u, v)$ e $y = y(u,v)$, por tanto $dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$, $dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$

Sustituyendo dx y dy en df por sus expresiones, se tiene

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv$$

Por otra parte z también es función de u y v, por tanto $dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$

En consecuencia se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial v}\ \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$ ■

Ejemplo 6.33 *Si w es la función de x e y, w = sen(y/x) y su vez x e y son las funciones de r y s definidas por x = 3r +2s e y = 4r – s. Calcular usando la regla de la cadena generalizada calcular la derivada parcial de w respecto de r.*

$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = 3\ \frac{-y}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right) + 4\ \frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)$

Al ser x e y funciones de r y s queda:

$\frac{\partial f}{\partial r} = 3\ \frac{-y}{x^2}\cos\left(\frac{y}{x}\right) + 4\ \frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right) = 3\ \frac{-(4r+s)}{(3r+2s)^2}\cos\left(\frac{4r-s}{3r+2s}\right) + 4\ \frac{1}{3r+2s}\cos\left(\frac{4r-s}{3r+2s}\right)$ ■

Sean x e y variables relacionadas por una ecuación $F(x, y) = 0$, esto supone que y es una función de x, en esta situación se dice que y está definida implícitamente como función de x. Si suponemos que $y = f(x)$ es una función derivable, la regla de la cadena nos proporciona una alternativa para el cálculo $\frac{dy}{dx}$.

Teorema 6.34 *Sea $F(x, y)$ una función continua en un entorno abierto del punto $M(a,b)$ para el cual $F(a, b) = 0$, con derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ continuas en dicho entorno y $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$, se verifica que la función $y = f(x)$ que define dicha ecuación es continua y derivable respecto de x en un intervalo abierto de a, además:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x(a,b)}{F_y(a,b)}$$

Demostración.

$F(x, y) = 0$ define de forma implícita una función $y = f(x)$, $F(x, f(x),) = 0$

Derivando según la regla de la cadena generalizada: $0 = \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}$

Particularizando en el punto A, al ser $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$, se verifica: $\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x(a,b)}{F_y(a,b)}$ ■

Ejemplo 6.35 La ecuación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ define implícitamente la circunferencia de centro (0, 0) y radio 2. El punto $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ verifica dicha ecuación, que es continua en un entorno abierto del punto dado.

Las derivadas parciales $F_x = 2x$ y $F_y = 2y$ son continuas y $F_y(A) = 2\sqrt{2} \neq 0$.

La ecuación anterior define una función $y = f(x)$ derivable respecto de x en un intervalo abierto de $\sqrt{2}$, y su derivada en dicho punto es $\frac{dy}{dx}(\sqrt{2}) = -\frac{F_x(A)}{F_x(A)} = -\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -1$

Observación: en forma explícita la función es $y = \sqrt{4-x^2}$, $y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, $y'(\sqrt{2}) = -1$ ■

6.6 Plano tangente a una superficie.

En este apartado se van a representar las superficies en la forma $F(x, y, z) = 0$. Si la superficie viene dada por $z = f(x, y)$, basta considerar $F(x, y, z) = f(x, y) - z$.

Definición 6.36 *Sea la superficie $F(x, y, z) = 0$ y un punto $A(a, b, c)$ en ella, con F diferenciable en ese punto y tal que $\overrightarrow{\nabla F}(A) \neq \vec{0}$. Al plano que pasa por el punto A y es perpendicular al vector $\overrightarrow{\nabla F}(A)$ se le llama* ***plano tangente*** *a la superficie en el punto A.*

Teorema 6.37 (Ecuación del plano tangente) Sea $F(x, y, z)$ *diferenciable en un punto $A(a, b, c)$ perteneciente a la superficie $F(x, y, z) = 0$ con $\overrightarrow{\nabla F}(A) \neq \vec{0}$. La ecuación del plano tangente a la superficie en ese punto es*

$$F_x(A)(x-a) + F_y(A)(y-b) + F_z(A)(z-c) = 0$$

Demostración.

Sea P un punto cualquiera en dicho plano tangente, el vector $\overrightarrow{PA}$ es perpendicular al vector gradiente en A, $\overrightarrow{\nabla F}(A)$. Esto equivale a que el producto escalar de ambos es 0,

$$0 = \overrightarrow{\nabla F}(A).\ \overrightarrow{PA} = \left(F_x(A), F_y(A), F_z(A)\right).\left((x-a),(y-b),(z-c)\right) =$$

$$F_x(A)(x-a) + F_y(A)(y-b) + F_z(A)(z-c) \qquad \blacksquare$$

Geométricamente el plano tangente a una superficie es el plano formado por las rectas tangentes a la curvas sobre la superficie que pasan por el punto.

Ejemplo 6.38 Calcular el plano tangente a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ en el punto $A(-4, 1, 1)$.

$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$

$F_x = 2x$, $F_x(A) = -8$; $F_y = 4y$, $F_y(A) = 4$; $F_z = 6z$, $F_z(A) = 6$;

$0 = (-8, 4, 6).(x + 4, y - 1, z - 1) = 4x - 2y - 3z + 21$

El plano tangente es $4x - 2y - 3z + 21 = 0$ $\blacksquare$