Curso 2014-2015 **Lista 1** 3º Mat/4º DT

Definición de topología. Ejemplos de topologías.

1) Sean $X = \{a, b, c\}$ un conjunto con tres elementos. Encontrar todas las topologías sobre X.

2) En $\mathbb{R}$ se considera $\mathcal{T} = \{(-\infty, a) : -\infty \leq a \leq \infty\}$. Demostrar que es una topología.

3) Sean X un conjunto infinito y $\mathcal{T}$ una topología sobre X en la que todos los subconjuntos infinitos son abiertos. Demostrar que $\mathcal{T}$ es la topología discreta de X.

4) Sea X un conjunto con más de dos elementos.

a) Definir dos topologías $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ sobre X de modo que $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ no sea una topología.

b) Sea $\mathcal{T}_j$, $j \in J$ una familia de topologías sobre X. Probar que $\bigcap_{j \in J} \mathcal{T}_j$ es también una topología sobre X.

5) En el plano $\mathbb{R}^2$ se considera la familia $\mathcal{T}$ de todos los subconjuntos U tales que para cada punto (a, b) de U existe un $\varepsilon > 0$ de forma que $\big((a - \varepsilon, a + \varepsilon) \times \{b\}\big) \cup \big(\{a\} \times (b - \varepsilon, b + \varepsilon)\big) \subset U$. Estudiar si $\mathcal{T}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.

6) Sea $g : X \to Y$ una aplicación entre dos conjuntos.

a) Demostrar que si $\mathcal{T}$ es una topología en X entonces $\mathcal{S} := \{E \subset Y : g^{-1}(E) \in \mathcal{T}\}$ es una topología en Y.

b) Demostrar que si $\mathcal{S}$ es una topología en Y entonces $\mathcal{U} := \{g^{-1}(E) : E \in \mathcal{S}\}$ es una topología en X.

7) Sean X un conjunto y a un elemento de X. Se considera la familia $\mathcal{T}_a$ de los subconjuntos U de X tales que o bien U es vacío, o bien $a \in U$. Estudiar si $\mathcal{T}_a$ es una topología en X.

Bases y entornos.

8) Decidir, a partir de las definiciones básicas, si los siguientes conjuntos son abiertos y/o cerrados (o ninguna de las dos cosas):

a) $X = [0, 1] \times [0, 1]$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\texttt{lex}}$, la topología del orden lexicográfico, y los conjuntos:
$\{a\} \times [0, 1]$, $\{a\} \times (0, 1]$, $\{a\} \times [0, 1)$, $\{a\} \times (0, 1)$, $[0, 1] \times \{a\}$, $[0, 1) \times \{a\}$, $(0, 1] \times \{a\}$, $(0, 1) \times \{a\}$, $(0, a) \times [0, 1]$, $[0, a] \times [0, 1]$, con $0 \leq a \leq 1$.

b) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{[\cdot,\cdot)}$ y los conjuntos:
$[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1]$, $(0, 1)$, $\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$, $\{-\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$.

9) Se consideran las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{B}_{\leftarrow} = \{(-\infty, b) \colon b \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_{\rightarrow} = \{(a, \infty) \colon a \in \mathbb{R}\}$$

a) Demostrar que cada familia es una base de una topología sobre $\mathbb{R}$.

b) Comparar esas topologías.

c) Demostrar que la topología generada por $\mathcal{B}_{\leftarrow} \cup \mathcal{B}_{\rightarrow}$ es la usual.

10) Probar que si $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X, entonces la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ generada por $\mathcal{B}$ es igual a la intersección de todas las topologías sobre X que contienen a $\mathcal{B}$.

11) Sea $\mathcal{T}_j$, $j \in J$ una familia de topologías sobre X. Demostrar que existe una topología que contiene a todas las $\mathcal{T}_j$, para $j \in J$ y además es la menos fina de todas las que verifican esta propiedad.

12) Para cada punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ y cada $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ se considera el siguiente conjunto $B((x, y); r)$: el cuadrado con lados paralelos a los ejes, centrado en (x, y) y de lado $2r$, del que se ha excluido los lados y los puntos de las diagonales que no sean el punto (x, y). Hacer un dibujo que ayude a demostrar que $\mathcal{B} = \{B((x, y); r) \colon (x, y) \in \mathbb{R}, r > 0\}$ es una base para una topología en $\mathbb{R}^2$.

Espacios métricos

13) Sea (X,d) un espacio métrico. Demostrar que, para cualesquiera x, y, x' e y' elementos de X, se cumple

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y')$$

Deducir de ello que $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$ cuando $\lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0 = \lim_{n\to\infty} d(y_n,y)$.

14) Estudiar si $(\mathbb{R},d)$ es un espacio métrico, donde $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |x| + |y| & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Dibujar la bola $\mathbb{B}(x,r)$ para los casos

a) $x = 0$ y radio $r = 1/2$

b) $x = 1/2$ y $r = 1$.

15) Demostrar que si d es una distancia entonces $d'(x,y) = \min(d(x,y),1)$ también lo es y que ambas distancias inducen la misma topología.

16) Demostrar que $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$ es una distancia en $\mathbb{R}$.

`Ayuda`: demostrar primero que la función $f(z) = \dfrac{z}{1+z}$ es creciente y subaditiva en el intervalo $[0,\infty)$. Esto último quiere decir que $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ si $a,b \geq 0$.

17) Comprobar que los siguientes espacios de sucesiones con las distancias mencionadas son espacios métricos:

a) Sea $\mathbb{R}^\omega$ el espacio de todas las sucesiones de números reales $x = (x_n)$. Se define $d : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ como

$$d(x,y) \;=\; \sum_n \frac{|x_n - y_n|}{2^n(1+|x_n-y_n|)} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^\omega,\ y \in \mathbb{R}^\omega$$

¿Cuál es la distancia entre las sucesiones $x = (x_n) = ((1-2^{-n})^{-1})$ e $y = (y_n) = (1)$?

b) Sean ℓ_∞ el espacio de todas las sucesiones acotadas y $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$ definida como

$$d(x,y) \;=\; \sup\,\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

c) Sean ℓ_2 el espacio de todas las sucesiones $x = (x_n)$ tales que $\sum_n x_n^2 < \infty$ y $d : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$d(x,y) \;=\; \left(\sum_n |x_n - y_n|^2\right)^{1/2}$$

`Indicación`: si $x = (x_n) \in \ell_2$, $y = (y_n) \in \ell_2$, entonces $\sum |x_n y_n|$ converge y $(\sum |x_n y_n|)^2 \leq (\sum x_n^2)(\sum y_n^2)$.

18) En $\mathbb{R}^n$ se define

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_n - y_n|.$$

Demostrar que d_1 es una distancia en $\mathbb{R}^n$ y que induce la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

19) Demostrar que $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico es un espacio metrizable.

`Indicación`: Estudiar la función $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \texttt{si } x_1 = y_1 \\ max\{1, |x_2 - y_2|\} & \texttt{si } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$

y describir las bolas de radio r, con respecto a d, para $r \leq 1$.