TEMA 3: Dinámica II
Capitulo 1. Trabajo y energía

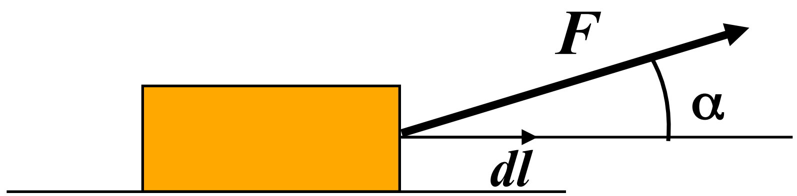
Brian Cox visits the world's biggest vacuum chamber (BBC Two)
https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs

- TEMA 3: Dinámica II.
  - **Capitulo 1: trabajo y energía**
    - Concepto de trabajo. Definición geométrica.
    - Potencia.
    - Energía.
    - Energía cinética.
    - Teorema de las fuerzas vivas.
    - Teorema de König de la Energía cinética.
    - Energía potencial.
    - Conservación de la Energía.

Trabajo

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

La variación de trabajo se define como el **producto escalar** de la fuerza aplicada por el vector desplazamiento

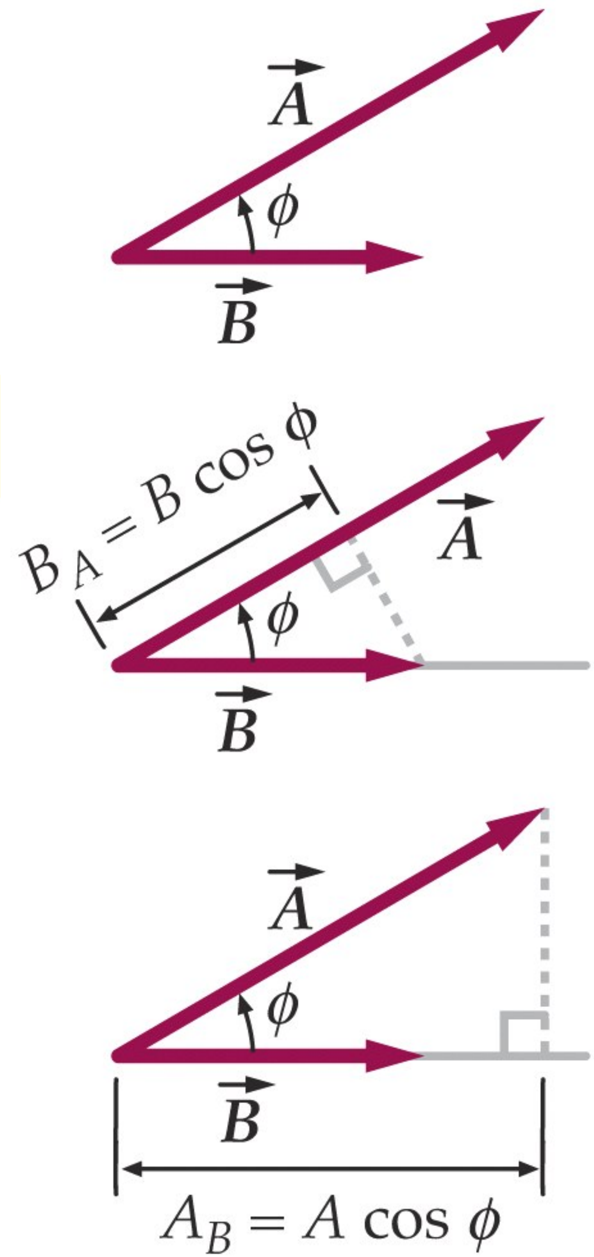


Producto escalar

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{l} = Fl \cos \phi$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \phi$$

El producto escalar **A·B** es el producto de *A* por la proyección de **B** sobre **A** o el producto de **B** sobre la proyección de **A** sobre **B**. Es decir, **A·B**=*AB* cos ϕ=AB_A=BA_B.



Producto escalar

TABLE 6-1

Properties of Dot Products

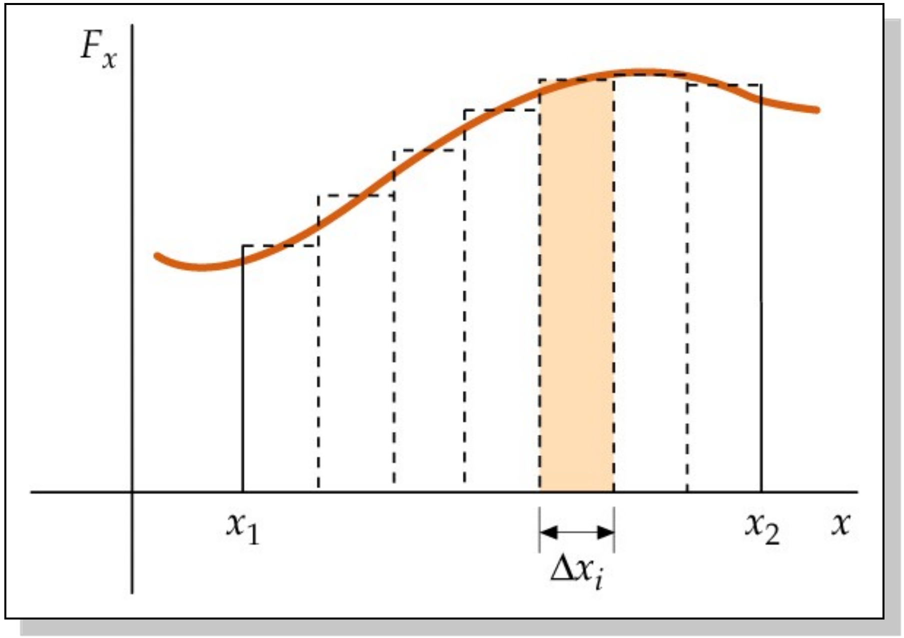
If	then
$\vec{A}$ and $\vec{B}$ are perpendicular,	$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ (since $\phi = 90°$, $\cos 90° = 0$)
$\vec{A}$ and $\vec{B}$ are parallel,	$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$ (since $\phi = 0°$, $\cos 0° = 1$)
$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$,	Either $\vec{A} = 0$ or $\vec{B} = 0$ or $\vec{A}$ and $\vec{B}$ are perpendicular
Furthermore,	
$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$	Since $\vec{A}$ is parallel to itself
$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$	Commutative rule of multiplication
$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$	Distributive rule of multiplication

Trabajo en una trayectoria

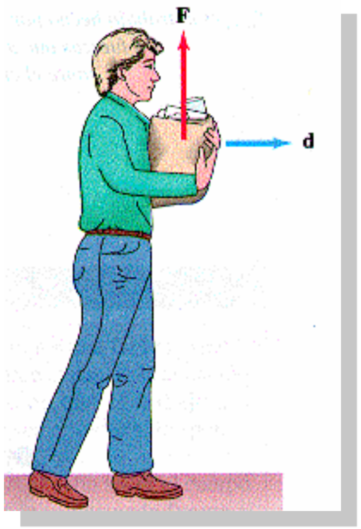
$$w = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

El trabajo a lo largo de una trayectoria entre dos puntos A y B, es la suma de los diferenciales de trabajo para llegar de A a B.

Si recordamos el concepto de **integral definida**, podemos ver que el trabajo será **el área que queda por debajo de la curva** de la fuerza limitada por las posiciones A y B.



Algunos casos particulares



- F=cte
- Trayectoria rectilínea

$$w = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{l} = Fl \cos\varphi$$

Si:

$$\vec{F} \parallel \vec{l} \Rightarrow \cos 0 = 1 \Rightarrow w = Fl$$

- Trabajo máximo

$$\vec{F} \perp \vec{l} \Rightarrow \cos 90 = 0 \Rightarrow w = 0$$

- Trabajo mínimo

Dimensiones y unidades de trabajo

Análisis de dimensiones

$$[w] = Fl = \mathrm{MLT^{-2}L} = \mathrm{ML^2T^{-2}}$$

Unidades en el SI

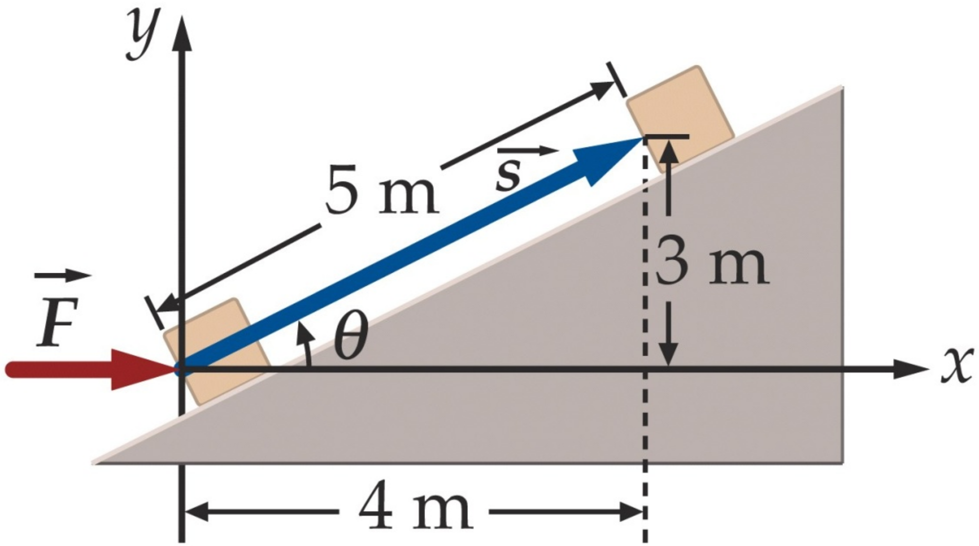
W=N·m=julios o jule (J)

Equivalencia en calorías

1 cal = 4,18 J

Problema

Se empuja una caja por la pendiente de una rampa con una fuerza horizontal **F** de 100 N. Por cada 5 m que se recurre, la caja sube 3 m. Calcular el trabajo realizado por F cada 5 m de recorrido de la caja por la rampa (a) calculando directamente el producto escalar a partir de las componentes F y del desplazamiento s, (b) multiplicando el producto de los módulos de F y s por el coseno del ángulo que forman sus direcciones, (c) calculando F_s y multiplicándola por el modulo del desplazamiento, y, (d) determinando la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza s_f y multiplicándola por el modulo de la fuerza.

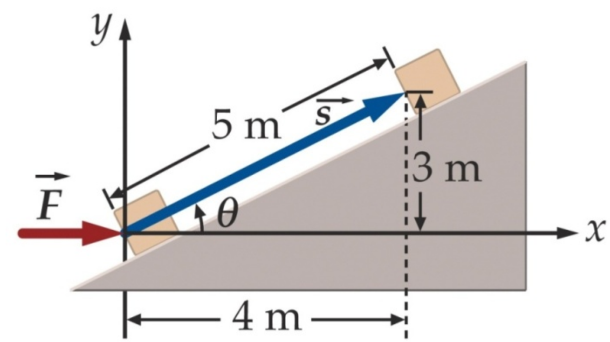


Problema: solución

$$\mathbf{F} = 100\ \mathrm{N}\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j}$$

$$\mathbf{s} = 4\ \mathrm{m}\ \mathbf{i} + 3\ \mathrm{m}\ \mathbf{j}$$

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = (100\ \mathrm{N}\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j}) \cdot (4\ \mathrm{m}\ \mathbf{i} + 3\ \mathrm{m}\ \mathbf{j}) = 400\ \mathrm{J}$$



$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs\cos\phi$$

$$4\,m = 5\,m \cdot \cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \left(\frac{4\,m}{5\,m}\right) = 0.8$$

$$W = Fs\cos\phi = (100\ \mathrm{N})(5\,m) \cdot 0.8 = 400\ \mathrm{J}$$

$$W = F_s s = (F\cos\phi) \cdot s = (100\ \mathrm{N} \cdot 0.8)(5\,m) = 400\ \mathrm{J}$$

$$W = F s_F = F \cdot (s\cos\phi) = (100\ \mathrm{N})(5\,m \cdot 0.8) = 400\ \mathrm{J}$$

Potencia

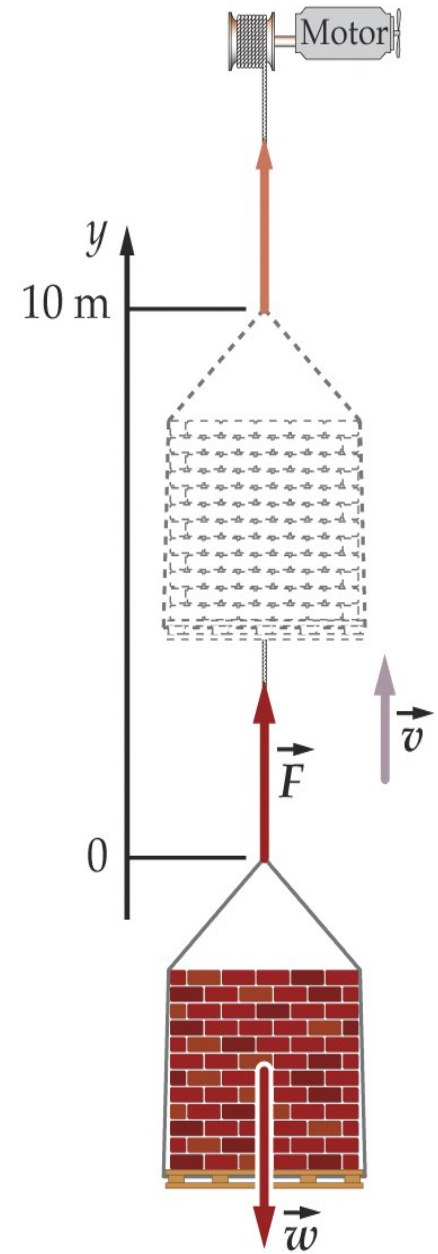
Es probable que además de necesitar saber cuanto trabajo hemos realizado, necesitamos conocer el **trabajo realizado en un tiempo dado**, por eso definimos un nuevo concepto como el de potencia.

Definimos la potencia como:

$$\boxed{P = \frac{dw}{dt}}$$

Si introducimos la definición de trabajo

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$



Dimensiones y unidades de potencia

Análisis de dimensiones

$$[P] = \frac{w}{t} = \frac{\mathrm{ML^2T^{-2}}}{\mathrm{T}} = \mathrm{ML^2T^{-3}}$$

Unidades en el SI

P=J/s=vatios (w)

Otras unidades

1 c.v. = 735,5 w

$$w = Pt = \mathrm{kw \cdot h} = 10^3\ \mathrm{w} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$$

Algunas consideraciones sobre la energía

- **Definición**:" En todos los cuerpos, en general, existe una capacidad de producir trabajo. A esta capacidad se le denomina **energía**".

- **Medir energía**: para saber la energía que tiene un cuerpo mediremos la capacidad de producir un trabajo dado el estado en que se encuentra, o bien, mediremos el trabajo que hay que comunicarle al sistema para llevarlo a un estado determinado.

- **Energía constante**: en los procesos donde hay intercambio de energía sabemos que puede haber cambio de un tipo a otro de energía, pero la cantidad total permanece constante.

Diversas formas de energía

- La energía cinética: debida al movimiento.
- La energía potencial: debida a la posición que ocupa un cuerpo en el espacio.
- La energía interna química: debida a la composición química del sistema.

Energía cinética

• **Definición**: la energía cinética es aquella que tiene un cuerpo debido a su estado de movimiento.

• **Medir**: la energía cinética de un punto material se calcula como el trabajo necesario para llevarlo del reposo hasta una velocidad v.

$$E_c = \int_0^v \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^v m\vec{a} \cdot d\vec{l} = \int_0^v m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} = \int_0^v m \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot d\vec{v} =$$

$$E_c = m\int_0^v \vec{v} \cdot d\vec{v} = m\int_0^v v\,dv = m \left.\frac{v^2}{2}\right]_0^v = \frac{1}{2}mv^2$$

Teorema de la energía cinética

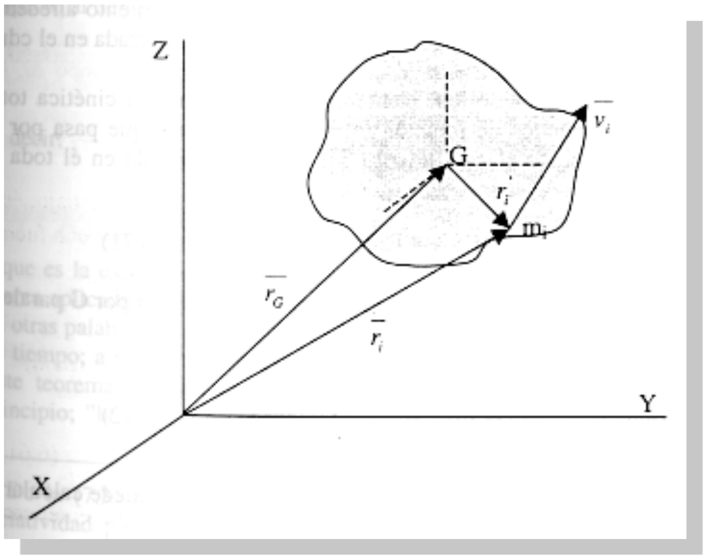
- Supongamos que tenemos ahora una partícula que tiene velocidad v_a y le comunicamos un trabajo para aumentar su energía cinética.

$$w = \int_{v_a}^{v_b} \vec{F} \cdot d\vec{l} = m\int_{v_a}^{v_b} v dv = m \left. \frac{v^2}{2} \right]_{v_a}^{v_b} = \frac{1}{2} m v_b{}^2 - \frac{1}{2} m v_a{}^2$$

$$\boxed{w = E_{cb} - E_{ca} = \Delta E_c}$$

Teorema de las fuerzas vivas o de la energía cinética: **el trabajo que se le comunica a un sistema se emplea en aumentar su energía cinética.**

Teorema de König de la energía cinética (**solido rígido- opcional-**)



$$\vec{r}_i = \vec{r}_G + \vec{r}_i'$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_G}{dt} + \frac{d\vec{r}_i'}{dt} \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}_i'$$

introducimos esto en la energía cinética

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i (\vec{v}_G + \vec{v}_i')^2 = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i [(\vec{v}_G)^2 + (\vec{v}_i')^2 + 2\vec{v}_G \vec{v}_i']$$

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i (\vec{v}_G)^2 + \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i (\vec{v}_i')^2 + \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_G \cdot m_i \vec{v}_i'$$

Teorema de König de la energía cinética

veamos que ocurre con el último término

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_G \cdot m_i \vec{v}_i' = \vec{v}_G \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' = \vec{v}_G \cdot \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right) = \vec{v}_G \cdot \frac{d}{dt}\left(m\vec{r}_G'\right) = 0$$

por tanto la energía cinética queda:

$$E_c = \tfrac{1}{2} m \vec{v}_G + \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i (\vec{v}_i')^2 = \tfrac{1}{2} m \vec{v}_G + \tfrac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_i')^2$$

$$E_c = \boxed{\tfrac{1}{2} m v_G{}^2} + \boxed{\tfrac{1}{2} I \omega^2}$$

Energía de **traslación** del cm

Energía de **rotación** respecto a un eje que pase por el cm

Momento de inercia

Fuerzas conservativas

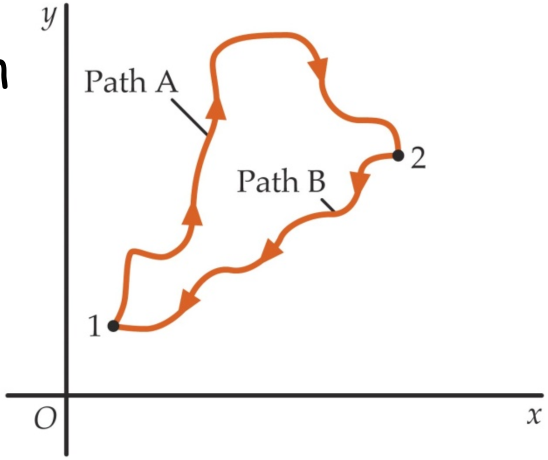
- Se dice que una fuerza es conservativa cuando el trabajo realizado en un camino cerrado es nulo

$$\oint \vec{F} \cdot \vec{ds} = 0$$

➢El trabajo realizado por una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria cuando se mueve de un punto a otro

➢ Fuerzas que sólo dependen de la posición

Ejemplos:
- ✓Fuerza gravitatoria
- ✓Fuerza elástica
- ✓Fuerza electrostática



Energía potencial

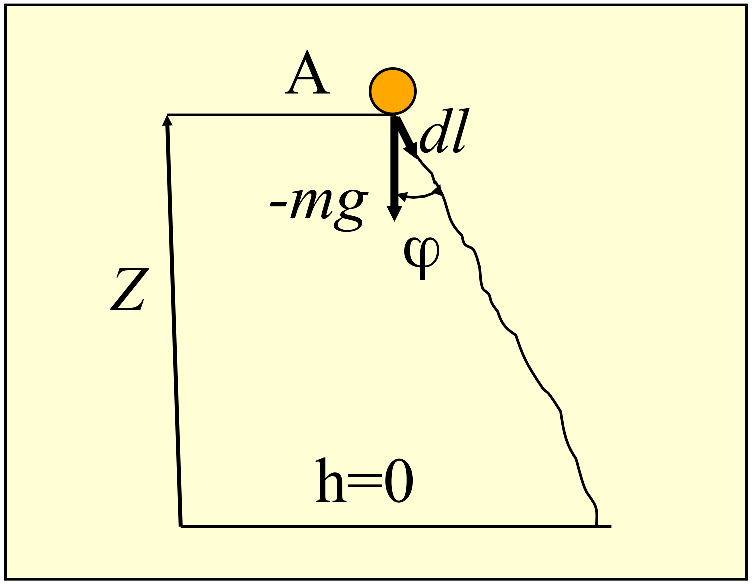
- **Definición**: es la energía que posee un cuerpo debido a la posición que ocupa.

- **Medir**: por definición se establece que el trabajo que realiza el campo para trasladar un cuerpo de A a B es igual a la diferencia de energías potenciales que posee el cuerpo en los citados puntos.

$$\boxed{w_a^b = E_{pa} - E_{pb} = -\Delta E_p}$$

El campo tiende a llevar los cuerpos a disminuir la energía potencial.

Energía potencial: cálculo



$$E_{pa} = \int_A^0 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_A^0 m\vec{g} \cdot d\vec{l} =$$

$$E_{pa} = -m\int_A^0 g\,dl\cos\varphi = -m\int_A^0 g\,dz$$

$$E_{pa} = -mg\int_A^0 dz = mgz$$

Energía potencial de un sistema de partículas

$$E_p = \sum_{i=1}^{N} E_{pi} = \sum_{i=1}^{N} m_i g z_i = g\sum_{i=1}^{N} m_i z_i = \boxed{mgz_G}$$

Conservación de la energía mecánica

$$w_a^b = E_{pa} - E_{pb} = -\Delta E_p$$

$$w_a^b = E_{cb} - E_{ca} = \Delta E_c$$

$$E_{cb} - E_{ca} = E_{pa} - E_{pb} \Rightarrow E_{cb} + E_{pb} = E_{ca} + E_{pa}$$

$$E_{mec} = \mathrm{cte}$$

Conservación de la Energía mecánica

- **Ejemplo:** cuando la masa del **péndulo** desciende, la energía potencial gravitatoria se convierte en energía cinética y la velocidad aumenta, como indica la distancia entre las posiciones del péndulo, cada vez mayor. La velocidad disminuye cuando la masa alcanza los extremos, y la energía cinética entonces pasa a energía potencial.