
Apuntes sobre integración y cálculo de primitivas

1. Algunas primitivas inmediatas (o casi inmediatas)

1.- $\int (5x - 6)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{5} \int (5x - 6)^{\frac{1}{2}} \cdot 5 dx = \frac{1}{5} \frac{2}{3} (5x - 6)^{\frac{3}{2}} + C.$

Nota: Si $f(x) = 5x - 6$ su derivada es 5. En la primera igualdad multiplicamos y dividimos por 5. Así tenemos una integral del tipo

$$\int f(x)^{\frac{1}{2}} \cdot f'(x) dx,$$

que es inmediata: $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} x^{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C.$

2.- $\int \frac{8x^2}{(x^3 + 1)^2} dx = \frac{8}{3} \int (x^3 + 1)^{-2} \cdot 3x^2 dx = -\frac{8}{3} (x^3 + 1)^{-1} + C = -\frac{8}{3} \frac{1}{(x^3 + 1)} + C.$

Nota: Si $f(x) = x^3 + 1$ su derivada es $3x^2$. La integral queda del tipo

$$\int f(x)^{-2} \cdot f'(x) dx,$$

que es inmediata: $\int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = \frac{-1}{x} + C.$

3.- $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^5 x} dx = (-1) \int (\cos x)^{-5} (-\operatorname{sen} x) dx = \frac{1}{4} (\cos x)^{-4} + C = \frac{1}{4 \cos^4 x} + C.$

Nota: Es de la forma $\int f(x)^{-5} \cdot f'(x) dx = -\frac{1}{4} f(x)^{-4} + C.$ ¿Quiénes son f , f' ?

4.- $\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C.$

Nota: $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f'(x) = \cos x$, $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$

5.- $\int x^{-\frac{3}{4}} (x^{\frac{1}{4}} + 1)^{-2} dx = 4 \int \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} (x^{\frac{1}{4}} + 1)^{-2} dx = \frac{-4}{x^{\frac{1}{4}} + 1} + C.$

Nota: ¿Quiénes son $f(x)$ y $f'(x)$?

6.- $\int \frac{r}{\sqrt{r^2 + 16}} dr = \int \frac{2r}{2\sqrt{r^2 + 16}} dr = \sqrt{r^2 + 16} + C.$

Nota: Una primitiva de $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ es $\sqrt{f(x)}$.

7.- $\int \cos(2\pi x - 1) dx = \frac{1}{2\pi} \int \cos(2\pi x - 1) \cdot 2\pi dx = \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen}(2\pi x - 1) + C.$

Nota: Una primitiva de $\cos(f(x)) \cdot f'(x)$ es $\text{sen}(f(x))$.

$$8.- \int x \text{sen}^3 x^2 \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int (\text{sen } x^2)^3 \cdot \cos(x^2) \cdot 2x dx = \frac{1}{8} (\text{sen } x^2)^4 + C.$$

Nota: ¿De dónde sale $\frac{1}{8}$?

$$9.- \int x \text{sen } x^2 dx = \frac{1}{2} \int \text{sen } x^2 \cdot 2x dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C.$$

Nota: ¿Quiénes son $f(x)$ y $f'(x)$?

$$10.- \int \text{sen}^2 x \cos x dx = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + C.$$

Nota: Es del tipo $\int f(x)^2 \cdot f'(x) dx$.

$$11.- \int \sec x \tan x dx = - \int \frac{-\text{sen } x}{\cos^2 x} dx = (\cos x)^{-1} + C.$$

Nota: Ver la nota de 2.

$$12.- \int \frac{g(x) \cdot g'(x)}{\sqrt{1+g(x)^2}} dx = \frac{1}{2} \int (1+g(x)^2)^{-\frac{1}{2}} 2g(x) \cdot g'(x) dx = (1+g(x)^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Nota: Es del tipo $\int f(x)^{-\frac{1}{2}} f'(x) dx$.

$$13.- \int \frac{x}{(3-x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int (3-x^2)^{-2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \frac{(3-x^2)^{-1}}{-1} + C.$$

Nota: Es del tipo $\int f(x)^{-2} \cdot f'(x) dx$.

$$14.- \int \frac{x}{3-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{3-x^2} dx = -\frac{1}{2} \log |3-x^2| + C.$$

Nota: Es del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$.

$$15.- \int \frac{\log(x+a)}{x+a} dx = \int \log(x+a) \frac{1}{x+a} dx = \frac{1}{2} (\log(x+a))^2 + C.$$

Nota: ¿Quiénes son f y f' ?

16.-

$$\begin{aligned} \int x \left(\frac{1}{x^2-a} - \frac{1}{(x^2-b)^2} \right) dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-a} dx - \frac{1}{2} \int (x^2-b)^{-2} 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \log |x^2-a| + \frac{1}{2} (x^2-b)^{-1} + C. \end{aligned}$$

Nota: ¿De qué tipo es cada una?

$$17.- \int \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \int (1+x^{\frac{3}{2}})^{-1} \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \log(1+x^{\frac{3}{2}}) + C.$$

Nota: Es del mismo tipo que 14.

$$18.- \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} 2 dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$$

Nota: Es del tipo $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + C$.

$$19.- \int e^{\tan(3x)} \sec^2(3x) dx = \frac{1}{3} e^{\tan(3x)} + C.$$

Nota: Es del tipo anterior. ¿Quién es $f(x)$? ¿De dónde sale el 3?.

$$20.- \int \frac{x e^{ax^2}}{1 + e^{ax^2}} dx = \frac{1}{2a} \int (1 + e^{ax^2})^{-1} 2ax e^{ax^2} dx = \frac{1}{2a} \log(1 + e^{ax^2}) + C.$$

$$21.- \int \frac{(a + b\sqrt{y+1})^2}{\sqrt{y+1}} dy = \frac{2}{b} \int (a + b\sqrt{y+1})^2 \frac{b}{2\sqrt{y+1}} dy = \frac{2}{b} \frac{1}{3} (a + b\sqrt{y+1})^3 + C.$$

$$22.- \int x \sec^2 x^2 dx = \frac{1}{2} \int (\sec x^2)^2 2x dx = \frac{1}{2} \tan x^2 + C.$$

Nota: Una primitiva de $\sec^2(f(x)) \cdot f'(x)$ es $\tan(f(x))$.

$$23.- \int \sqrt{1 + \cotan x} \operatorname{cosec}^2 x dx = - \int (1 + \cotan x)^{\frac{1}{2}} (-\operatorname{cosec}^2 x) dx = -\frac{2}{3} (1 + \cotan x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Nota: Es del tipo $\int f(x)^{\frac{1}{2}} f'(x) dx$.

$$24.- \int \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx = \log |1 + \tan x| + C.$$

Nota: Ver nota de 14. ¿Quiénes son f , f' ?

$$25.- \int x^2 \operatorname{sen}(4x^3 - 7) dx = \frac{-1}{12} \cos(4x^3 - 7) + C.$$

Nota: ¿De donde sale $\frac{-1}{12}$?

$$26.- \int \frac{\tan(\log x)}{x} dx = - \int \frac{1}{\cos(\log x)} (-\operatorname{sen}(\log x)) \frac{1}{x} dx = -\log |\cos(\log x)| + C.$$

Nota: Una primitiva de $\frac{f'(x)}{f(x)}$ es $\log |f(x)|$. ¿Quiénes son f , f' ?

2. Cambio de variable

Integral indefinida:

$$\int f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx = \int f(t) dt, \quad \text{usando el cambio de variable} \quad \begin{cases} t = \phi(x) \\ dt = \phi'(x) dx \end{cases}$$

Integral definida:

$$\int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t) dt, \quad \text{usando el cambio de variable} \quad \begin{cases} t = \phi(x) \\ dt = \phi'(x) dx \end{cases}$$

1.- Calcular $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$.

Usando el cambio de variable

$$t = e^x \implies dt = e^x dx,$$

obtenemos

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C = \arctan(e^x) + C.$$

2.- Calcular $\int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy$.

Sea $t = a^2 - y^2$. Entonces,

$$t = a^2 - y^2 \implies dt = -2y dy. \quad \text{Además,} \quad \begin{cases} y = 0 & \rightsquigarrow & t = a^2 \\ y = a & \rightsquigarrow & t = 0. \end{cases}$$

Así,

$$\int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} y dy = \int_{a^2}^0 \sqrt{t} \frac{-dt}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \left. \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_{t=0}^{t=a^2} = \frac{a^3}{3}.$$

3.- Calcular $\int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^2} dx$.

Poniendo $t = 1 - x^2$, se obtiene

$$dt = -2x dx \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = 0 & \rightsquigarrow & t = 1 \\ x = 1 & \rightsquigarrow & t = 0. \end{cases}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^1 (x^2)^2 \sqrt{1-x^2} x dx = \int_1^0 (1-t)^2 \sqrt{t} \frac{-dt}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-2t+t^2) t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{5}{2}}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2 \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} \right]_0^1 = \dots = \frac{8}{105}. \end{aligned}$$

4.- Calcular $\int x^3 (x^2 - 1)^{73} dx$.

Usamos el cambio de variables $t = x^2 - 1$. De esta forma, $dt = 2x dx$ y

$$\begin{aligned} \int x^3 (x^2 - 1)^{73} dx &= \int x^2 (x^2 - 1)^{73} x dx = \frac{1}{2} \int (t+1) t^{73} dt = \frac{1}{2} \int (t^{74} + t^{73}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{t^{75}}{75} + \frac{t^{74}}{74} \right) + C = \frac{1}{2} \left(\frac{(x^2 - 1)^{75}}{75} + \frac{(x^2 - 1)^{74}}{74} \right) + C. \end{aligned}$$

3. Integración por partes

Fórmula de integración por partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Habitualmente se expresa con la notación siguiente:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

1.- Calcular $\int x e^x dx$.

Tomando

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x \quad \rightsquigarrow \quad du = dx \\ dv = e^x dx \quad \rightsquigarrow \quad v = e^x \end{array} \right\} \text{ se sigue que } \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

2.- Calcular $\int_1^e x \log x dx$.

Definimos las partes

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \log x \quad \rightsquigarrow \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \quad \rightsquigarrow \quad v = \frac{x^2}{2}. \end{array} \right.$$

Así

$$\int_1^e x \log x dx = \left[\log x \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

3.- Calcular $\int \log x dx$.

Usamos las partes

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \log x \quad \rightsquigarrow \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \quad \rightsquigarrow \quad v = x. \end{array} \right.$$

De esta forma,

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x + C.$$

4.- Calcular de igual forma, $\int \arctan x dx$, $\int \arcsen x dx$.

5.- Calcular $\int_0^{\sqrt{\pi}} x^5 \sen(x^2)$.

Hacemos primero el cambio de variable $t = x^2$, y esta integral se convierte en

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^5 \sen x^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t^2 \sen t dt.$$

Para calcular ahora la integral se usan las partes:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = t^2 \quad \rightsquigarrow \quad du = 2t dt \\ dv = \sen t dt \quad \rightsquigarrow \quad v = -\cos t. \end{array} \right.$$

Entonces,

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} t^2 \sen t dt = \frac{1}{2} \left([t^2 (-\cos t)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos t) 2t dt \right) = \frac{\pi^2}{2} + \int_0^{\pi} t \cos t dt.$$

De nuevo hay que integrar por partes: $u = t$, $dv = \cos t dt$ y se tiene $du = dt$, $v = \operatorname{sen} t$. De esta forma

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^5 \operatorname{sen} x^2 = \frac{\pi^2}{2} + \left([t \operatorname{sen} t]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t dt \right) = \frac{\pi^2}{2} + 0 + [\cos t]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

6.- Calcular $\int e^x \operatorname{sen} x dx$.

Usamos las partes $u = \operatorname{sen} x$, $dv = e^x dx$:

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x.$$

Volvemos a integrar por partes, pero ahora con $u = \cos x$, $dv = e^x dx$:

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x dx.$$

Obsérvese cómo la integral que queremos calcular aparece de nuevo en el lado derecho. Si la pasamos al lado izquierdo se obtiene

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x),$$

y por tanto

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

4. Funciones racionales. Fracciones simples

Dada una función racional (cociente de polinomios)

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

seguiremos el siguiente método para descomponerla en fracciones simples:

(I) **Dividir** si $\operatorname{gr}(P) \geq \operatorname{gr}(Q)$, para obtener

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = (\text{un polinomio}) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \quad \text{con } \operatorname{gr}(P_1) < \operatorname{gr}(Q).$$

(II) **Factorizar el denominador** en factores de la forma

$$(px + q)^n, \quad \text{y} \quad (ax^2 + bx + c)^m,$$

donde $ax^2 + bx + c$ no tiene raíces reales ($b^2 - 4ac < 0$).

(III) **Factores lineales.** Por cada factor de la forma $(px + q)^n$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de n fracciones:

$$\frac{A_1}{(px + q)} + \frac{A_2}{(px + q)^2} + \dots + \frac{A_n}{(px + q)^n}.$$

(IV) **Factores cuadráticos.** por cada factor de la forma $(ax^2 + bx + c)^m$, la descomposición en factores simples debe incluir la suma de m fracciones:

$$\frac{B_1x + C_1}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{B_2x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_mx + C_m}{(ax^2 + bx + c)^m}.$$

Por ejemplo, si $N(x)$ es un polinomio de grado menor que 5, la función racional

$$\frac{N(x)}{x^5 + x^4 - x - 1}$$

tendrá una descomposición en fracciones simples de la forma:

$$\frac{N(x)}{x^5 + x^4 - x - 1} = \frac{N(x)}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Los coeficientes A, B, C, D y E quedarán determinados al conocer $N(x)$.

1.- $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx$

Como $x^2 + 5x + 6 = (x-3)(x-2)$, escribimos

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

Para determinar A y B de forma que la igualdad sea válida para todo x , multiplicamos esta ecuación por el mínimo denominador común, $(x-3)(x-2)$, obteniendo la ecuación

$$1 = A(x-2) + B(x-3), \quad \text{para todo } x.$$

Los valores $x = 2$ y $x = 3$ en esta ecuación nos dan $B = -1$ y $A = 1$, respectivamente. Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \left(\frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x-2} \right) dx = \int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{-1}{x-2} dx \\ &= \log|x-3| - \log|x-2| + C = \log \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C \end{aligned}$$

2.- $\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx$

Como $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$, se tiene

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

para todo x . Multiplicando por $x(x+1)^2$:

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx, \quad \text{para todo } x.$$

Los valores $x = 0$, $x = -1$ y, por ejemplo, $x = 1$, nos dan $A = 6$, $C = -(5 - 20 + 6) = 9$ (¿por qué?). Conociendo A y C , con $x = 1$, $2B = (5 + 20 + 6) - 4A - C = -2$, de donde $B = -1$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx &= \int \frac{6}{x} dx + \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{9}{(x+1)^2} dx \\ &= \log \left| \frac{x^6}{x+1} \right| - \frac{9}{x+1} + C. \end{aligned}$$

$$3.- \int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} \right) dx$$

Multiplicando por $x(x-1)(x^2+4)$ e igualando numeradores, tenemos

$$2x^3 - 4x - 8 = A(x-1)(x^2+4) + Bx(x^2+4) + (Cx+D)x(x-1).$$

Con $x=0$ se obtiene $-4A = -8$, y $A = 2$. Con $x=1$, se sigue que $-10 = 5B$, y así $B = -2$. Para calcular C y D podríamos dar otros dos valores a x y resolver el sistema lineal en C y D producido. Para ilustrar otro método desarrollamos el miembro derecho de la igualdad anterior (con $A = 2$ y $B = -2$) llegando a la igualdad de polinomios

$$2x^3 - 4x - 8 = Cx^3 - (C-D+2)x^2 - Dx - 8$$

de donde $C = 2$ y $D = 4$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} dx &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2x+4}{x^2+4} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2x}{x^2+4} + \frac{4}{x^2+4} \right) dx \\ &= 2 \log|x| - 2 \log|x-1| + \log(x^2+4) + 2 \arctan \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$4.- \int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

Incluimos una fracción simple por cada potencia de (x^2+2) :

$$\frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2}.$$

Multiplicando por el mínimo común denominador, $(x^2+2)^2$, llegamos a la igualdad

$$8x^3 + 13x = (Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D.$$

Desarrollando el miembro derecho y agrupando obtenemos

$$8x^3 + 13x = Ax^3 + Bx^2 + (2A + C)x + (2B + D),$$

y así $A = 8$, $B = 0$, $C = -3$ y $D = 0$. Por tanto,

$$\int \frac{8x^3 + 13x}{(x^2 + 2)^2} dx = \int \left(\frac{8x}{x^2 + 2} + \frac{-3x}{(x^2 + 2)^2} \right) dx = 4 \log(x^2 + 2) + \frac{3}{2(x^2 + 2)} + C.$$

5.- Una variación de este tipo de integrales es $\int \frac{A}{ax^2 + bx + c} dx$ cuyas primitivas son una función arcotangente. Para resolverlas se **completan cuadrados** en el denominador para escribirlo en la forma $(mx+n)^2 + p$, se reescribe como $p\left(\left(\frac{mx+n}{\sqrt{p}}\right)^2 + 1\right)$, y finalmente se ajustan las constantes. Veamos un ejemplo para ilustrar el método:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{4}{3} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

5. Funciones trigonométricas

Vamos a calcular integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx \quad \text{y} \quad \int \sec^m x \tan^n x dx$$

con m o n un entero positivo. Las pautas para las primeras son las siguientes:

(I) Si la potencia del seno es positiva e impar:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x dx. \end{aligned}$$

El cambio de variable $t = \cos x$, $dt = -\operatorname{sen} x dx$ convierte al integrando en un polinomio o una función racional:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x dx = \int (1 - t^2)^k t^n (-1) dt$$

(II) Si la potencia del coseno es positiva e impar:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x dx &= \int \operatorname{sen}^m x (\cos^2 x)^k \cos x dx \\ &= \int \operatorname{sen}^m x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x dx. \end{aligned}$$

Usando el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$, $dt = \cos x dx$

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x dx = \int \operatorname{sen}^m x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x dx = \int t^m (1 - t^2)^k dt,$$

y queda la integral de un polinomio o de una función racional.

(III) Si las potencias de ambos son pares y no negativas, usamos las identidades:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

quedando en el integrando potencias impares de la función coseno.

1.-

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x) \cos^4 x \operatorname{sen} x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \operatorname{sen} x dx \\ &= \int (\cos^4 x - \cos^6 x) \operatorname{sen} x dx. \end{aligned}$$

El cambio de variable $t = \cos x$, $dt = -\operatorname{sen} x dx$ nos lleva a

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx = \int (t^4 - t^6) (-1) dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^7 x}{7} + C.$$

2.-

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx &= \int \frac{(\cos^2 x) \cos x}{\sin^{\frac{1}{2}} x} dx = \int (\sin x)^{-\frac{1}{2}} (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int (\sin^{-\frac{1}{2}} x - \sin^{\frac{3}{2}} x) \cos x dx. \end{aligned}$$

El cambio de variable $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ nos lleva a

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int t^{-\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}} dt = -2t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + C = -2 \sin^{\frac{1}{2}} x + \frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x + C.$$

3.-
$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos^2(2x)}{4} \right) dx$$

Utilizamos de nuevo la expresión $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$, esta vez para $\cos^2(2x)$:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos^2(2x)}{4} \right) dx \\ &= \int \left[\frac{1}{4} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos(4x)}{2} \right) \right] dx \\ &= \frac{3}{8} \int dx + \frac{1}{4} \int 2 \cos(2x) dx + \frac{1}{32} \int 4 \cos(4x) dx \\ &= \frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + C. \end{aligned}$$

Para las segundas integrales planteadas, seguiremos el siguiente esquema:

(I) Si la potencia de la secante es positiva y par:

$$\begin{aligned} \int \sec^{2k} x \tan^n x dx &= \int (\sec^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x dx \\ &= \int (1 + \tan^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x dx; \end{aligned}$$

El cambio de variable $t = \tan x$, $dt = \sec^2 x dx$ proporciona

$$\int \sec^{2k} x \tan^n x dx = \int (1 + \tan^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x dx = \int (1 + t^2)^{k-1} t^n dt,$$

y se tiene que hacer una integral de un polinomio o de una función racional.

(II) Si la potencia de la tangente es positiva e impar:

$$\begin{aligned} \int \sec^m x \tan^{2k+1} x dx &= \int \sec^{m-1} x (\tan^2 x)^k (\sec x \tan x) dx \\ &= \int \sec^{m-1} x (\sec^2 x - 1)^k (\sec x \tan x) dx; \end{aligned}$$

y por el cambio de variable $t = \sec x$, $dt = \sec x \tan x dx$, se obtiene:

$$\int \sec^m x \tan^{2k+1} x dx = \int \sec^{m-1} x (\sec^2 x - 1)^k (\sec x \tan x) dx = \int t^{m-1} (t^2 - 1)^k dt$$

(III) Si no hay secantes y la potencia de la tangente es positiva y par:

$$\begin{aligned}\int \tan^{2k} x \, dx &= \int \tan^{2k-2} x \tan^2 x \, dx = \int \tan^{2k-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \tan^{2k-2} x \sec^2 x \, dx - \int \tan^{2k-2} x \, dx \\ &= \frac{\tan^{2k-1} x}{2k-1} - \int \tan^{2k-2} x \, dx;\end{aligned}$$

y repetir el proceso si es necesario.

(IV) En otro caso, reescribir el integrando en términos de senos y cosenos.

1.- Potencia de la tangente positiva e impar:

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan^3 x}{\sqrt{\sec x}} \, dx &= \int (\sec x)^{-\frac{1}{2}} \tan^3 x \, dx = \int (\sec x)^{-\frac{3}{2}} \tan^2 x (\sec x \tan x) \, dx \\ &= \int (\sec x)^{-\frac{3}{2}} (\sec^2 x - 1) (\sec x \tan x) \, dx \\ &= \int [(\sec x)^{\frac{1}{2}} - (\sec x)^{-\frac{3}{2}}] (\sec x \tan x) \, dx \\ &= \frac{2}{3} (\sec x)^{\frac{3}{2}} + 2 (\sec x)^{-\frac{1}{2}} + C.\end{aligned}$$

2.- Potencia de la secante positiva y par:

$$\begin{aligned}\int \sec^4(3x) \tan^3(3x) \, dx &= \int \sec^2(3x) \tan^3(3x) \sec^2(3x) \, dx \\ &= \frac{1}{3} \int (1 + \tan^2(3x)) \tan^3(3x) (3 \sec^2(3x)) \, dx \\ &= \frac{1}{3} \int (\tan^3(3x) + \tan^5(3x)) (3 \sec^2(3x)) \, dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{\tan^4(3x)}{4} + \frac{\tan^6(3x)}{6} \right] + C.\end{aligned}$$

3.- Potencia par de la tangente:

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x \, dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C.\end{aligned}$$

4.- Reescribiendo en senos y cosenos:

$$\int \frac{\sec x}{\tan^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos x} \right) \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 \, dx = \int (\sin x)^{-2} \cos x \, dx = \frac{-1}{\sin x} + C = -\operatorname{cosec} + C.$$