ÁLGEBRA LINEAL
1. Los Números Complejos

1.1. Halla el módulo y el argumento de los números complejos:

$4-3i$, $(3-4i)^{-1}$, $(2-i)^5$ y $\dfrac{1-i}{1+i}$

1.2. Dibuja los conjuntos de números complejos que verifican las siguientes condiciones:

a) $\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = 2$ b) $\operatorname{Re}\frac{z-1}{z-3} = 0$ c) $|\dfrac{z-3}{z+3}| = 2$

d) $|z+2| = 2$ e) $|z-1| = |z+1|$ f) $\overline{z} = z^{-1}$

1.3. Prueba las siguientes igualdades:

a) $|z| = |\overline{z}|$ b) $\overline{\overline{z}} = z$ c) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ d) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ e) $\overline{-z} = -\overline{z}$ f) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$

1.4. Para cualquier número complejo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, prueba que: $z, -z, \overline{1/z}, \overline{-1/z}$ y 0 están alineados (o lo que es lo mismo, están sobre una misma recta).

1.5. a) Sea $z \neq 1, -1$ y con $|z| = 1$. Prueba que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es un complejo imaginario puro.

b) Demuestra que si $z \in \mathbb{C}$ tiene parte real igual a -1, entonces el número complejo $\frac{z}{|z|^2}$ pertenece a la circunferencia de centro $-\frac{1}{2}$ y radio $\frac{1}{2}$.

1.6. a) Describe geométricamente la aplicación $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \big(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})\big)z$.

b) Describe geométricamente la aplicación $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \big(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})\big)z + (1+i)$.

1.7. Expresa $\cos 3t$ y $\operatorname{sen} 3t$ como polinomios de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$. *Pista:* calcula $(\cos t + i \operatorname{sen} t)^3$.

1.8. Calcula: a) $\sqrt[3]{-i}$ b) $\sqrt[3]{-8i}$ c) $\sqrt[5]{-1-i}$ d) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$

1.9. a) Demuestra que las raíces n-ésimas de un número complejo no nulo se obtienen multiplicando una de ellas por las raíces n-ésimas de 1.

b) Prueba que el producto de dos raíces n-ésimas de la unidad es de nuevo una raíz n-ésima de la unidad.

c) Prueba que la inversa multiplicativa de una raíz n-ésima de la unidad es de nuevo una raíz n-ésima de la unidad.

1.10. Si $1, z_1$ y z_2 son las tres raíces cúbicas distintas de 1, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) $z_1^{-1} = 1$, b) $z_1^{-1} = z_1$, c) $z_1^{-1} = z_2$, d) $z_1^{-1} \neq 1$ y $z_1^{-1} \neq z_2$.

1.11. a) Prueba que para cualquier número natural n, el polinomio $z-1$ divide al polinomio z^n-1.

b) Demuestra que las raíces n-ésimas de 1 distintas de 1 son las soluciones de la ecuación polinómica $z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1=0$. (*Pista:* ¿Cuál es el cociente de la división del apartado a)?)

1.12. Determina los números complejos z que verifican:

a) $z^2-3z+4=0$ b) $z^3-3z^2+4z-2=0$ c) $z^4-2z^2+4=0$

1.13. Encuentra las soluciones de la ecuación $z^3-(1-2i)z^2-z+(1-2i)=0$, si se sabe que $1-2i$ es una solución de la misma.

1.14. a) Si $w\in\mathbb{C}$ es una raíz del polinomio con coeficientes reales $z^n+a_{n-1}z^{n-1}+....+a_1z+a_0$, prueba que $\overline{w}$ también lo es.

b) Utiliza la ecuación $z^2+zi+2=0$, para ver que el apartado anterior no es cierto en general si los coeficientes son complejos.

1.15. Se pide descomponer el polinomio z^4+1 como

a) producto de polinomios (no constantes) con coeficientes en $\mathbb{R}$ y de grado lo menor posible.

b) producto de polinomios (no constantes) con coeficientes en $\mathbb{C}$ y de grado lo menor posible.

Haz lo mismo para los polinomios: z^3+z^2-z+2 y $z^4+2z^3+2z^2+2z+1$.