

ÁLGEBRA LINEAL

GRADO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS Y
 SERVICIOS DE TELECOMUNICACIÓN, 2013-2014

Ejercicios 49 a 57

49. a) Sea $\mathbf{A}$ la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 14 & 1 & 13 & 3 \end{bmatrix}.$$

Comprobar que $\mathbf{A}$ es el producto de la matriz formada con sus columnas fundamentales por la matriz formada con las filas no-nulas de $\mathbf{E}_{\mathbf{A}}$.

b) Sea $\mathbf{A}$ una matriz $m \times n$ de rango r . Sea $\mathbf{B}$ la matriz formada con las columnas fundamentales de $\mathbf{A}$ y sea $\mathbf{C}$ la matriz formada con las filas no nulas de $\mathbf{E}_{\mathbf{A}}$.

1. Si la k -ésima columna de $\mathbf{A}$ es la j -ésima de las columnas fundamentales de $\mathbf{A}$, ¿cómo es la k -ésima columna de $\mathbf{C}$?
2. Si la k -ésima columna de $\mathbf{A}$ es redundante y tiene a su izquierda j columnas fundamentales de $\mathbf{A}$, ¿cómo es la k -ésima columna de $\mathbf{C}$?
3. Demostrar que $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son ambas de rango r y satisfacen $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$.

50. Demostrar que la matriz $\mathbf{A}$ tiene rango 1 si y sólo si existen columnas no nulas $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{u} \mathbf{v}^T$. Comprobar que en esta situación se verifica

$$\mathbf{A}^2 = \tau \mathbf{A}, \quad \text{siendo } \tau = \text{traza } \mathbf{A}.$$

51.

1. Averiguar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ forman un subespacio vectorial:

a)

$$F_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3\alpha \\ \alpha \\ \alpha + \beta \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

b)

$$F_2 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 \cdot x_2 = 0 \}.$$

c)

$$F_3 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 1 \}.$$

2. Averiguar si los siguientes conjuntos de matrices $n \times n$ forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{n \times n}$:

a)

$$F_1 = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbf{A} \text{ es simétrica} \}.$$

b)

$$F_2 = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \mathbf{A} \text{ es antisimétrica} \}.$$

c)

$$F_3 = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{traza } \mathbf{A} = 0 \}.$$

d)

$$F_4 = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} : \text{traza } \mathbf{A} = 1 \}.$$

3. Averiguar si los siguientes conjuntos de polinomios de grado $\leq n$ forman un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$:

a)

$$F_1 = \{ \mathbf{p} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : \mathbf{p}(1) + 7\mathbf{p}'(0) = 0 \}.$$

b)

$$F_2 = \{ \mathbf{p} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : \mathbf{p}'' + 3\mathbf{p}' - 2\mathbf{p} = 0 \}.$$

c)

$$F_3 = \{ \mathbf{p} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : \mathbf{p}''(-1) = \mathbf{p}''(1) \}.$$

52. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ de las matrices 2×2 de números complejos. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^{2 \times 2}$.

1.

$$F_1 = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : \text{rango } \mathbf{A} = 1 \}.$$

2.

$$F_2 = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : \det \mathbf{A} = 0 \}.$$

3.

$$F_3 = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{A} \},$$

donde

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.

$$F_4 = \{ \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0 \}.$$

53. Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 9 \end{bmatrix},$$

determinar una base de cada uno de los cuatro subespacios vectoriales

$$\text{col } \mathbf{A}, \quad \text{nul } \mathbf{A}, \quad \text{col } \mathbf{A}^T, \quad \text{nul } \mathbf{A}^T,$$

así como las ecuaciones de cada uno de los subespacios.

54. Sea $\mathbf{A}$ una matriz 3×3 tal que

$$\text{col } \mathbf{A} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{nul } \mathbf{A} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Considérese el sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1. ¿El sistema es compatible?

2. ¿Tiene solución única?

55. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -6 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

¿Se verifica que $\mathbf{b} \in \text{col } \mathbf{A}$?

56. Considérense las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & 6 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

- a) ¿Generan las filas de $\mathbf{A}$ el mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$ que las filas de $\mathbf{B}$?
- b) ¿Coinciden los subespacios que generan las columnas de ambas matrices?
- c) ¿Tienen $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ el mismo núcleo?
- d) ¿Se verifica $\text{nul } \mathbf{A}^T = \text{nul } \mathbf{B}^T$?

57. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

1. $\text{nul } \mathbf{A}^T \cap \text{col } \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$.
2. Si $\mathbf{b}$ satisface $\mathbf{y}^T \mathbf{b} = 0$ para todo $\mathbf{y} \in \text{nul } \mathbf{A}^T$, entonces el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es compatible.
3. Supongamos que el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es compatible. Si $\mathbf{a} \in \text{col } \mathbf{A}^T$, entonces el valor del producto $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ es constante para toda solución $\mathbf{x}$ del sistema.