Ejercicios 88 a 97

88. Sean $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1\,,\mathbf{u}_2\,,\mathbf{u}_3\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{v}_1\,,\mathbf{v}_2\,,\mathbf{v}_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y sea

$$T\,:\,\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la aplicación lineal definida mediante

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} T(\mathbf{u}_1) & = & \mathbf{v}_1 & & -\mathbf{v}_3 \\ T(\mathbf{u}_2) & = & -\mathbf{v}_1 & +\mathbf{v}_2 & \\ T(\mathbf{u}_3) & = & & \mathbf{v}_2 & +\mathbf{v}_3 \end{array}\right.$$

1. Escribir una base $\mathcal{B}_2' = \{\mathbf{v}_1'\,,\mathbf{v}_2'\,,\mathbf{v}_3'\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}_1\,,\,\mathcal{B}_2'} = \mathbf{I}\,. \tag{5}$$

2. Hallar una base $\mathcal{B}_1' = \{\mathbf{u}_1'\,,\mathbf{u}_2'\,,\mathbf{u}_3'\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}_1'\,,\,\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\,. \tag{6}$$

89. Sean $\mathcal{B}_1 = \{\,\mathbf{u}_1\,,\mathbf{u}_2\,,\mathbf{u}_3\,\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\,\mathbf{v}_1\,,\mathbf{v}_2\,,\mathbf{v}_3\,\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y sea

$$T\,:\,\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

la aplicación lineal definida mediante

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,T(\mathbf{u}_1) & +T(\mathbf{u}_2) & & & = & \mathbf{v}_1 & \\ T(\mathbf{u}_1) & & -T(\mathbf{u}_3) & = & \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_2 & \\ T(\mathbf{u}_1) & +T(\mathbf{u}_2) & -T(\mathbf{u}_3) & = & \mathbf{v}_1 & +\mathbf{v}_2 & +\mathbf{v}_3\,. \end{array}\right. \tag{7}$$

1. Escribir bases $\mathcal{B}_1' = \{\,\mathbf{u}_1'\,,\mathbf{u}_2'\,,\mathbf{u}_3'\,\}$ y $\mathcal{B}_2' = \{\,\mathbf{v}_1'\,,\mathbf{v}_2'\,,\mathbf{v}_3'\,\}$ de $\mathbb{R}^3$ tales que

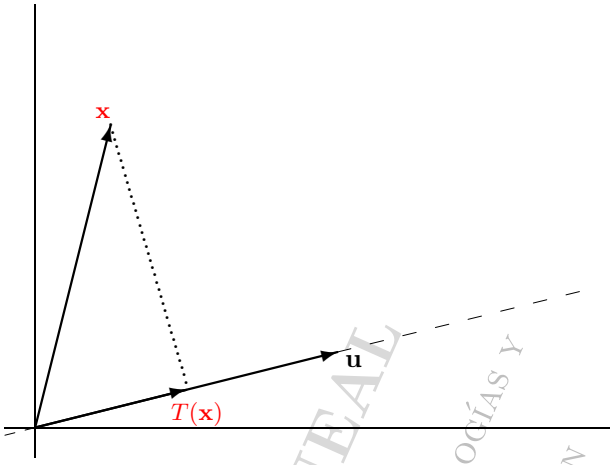
$$[T]_{\mathcal{B}_1'\,,\,\mathcal{B}_2'} = \mathbf{I}\,.$$

2. Hallar la matriz $[T]_{\mathcal{B}_1\,,\,\mathcal{B}_2}$, de T respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ en salida y $\mathcal{B}_2$ en llegada.

ÁLGEBRA LINEAL
Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación
2013-2014

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban

90. Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Consideremos la «proyección ortogonal» T que aplica cada vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ sobre su componente en la dirección de $\mathbf{u}$.



Se pide:

1. Escribir la matriz $\left[T\right]_{\mathcal{B}_c,\,\mathcal{B}_c}$ de T respecto de la base canónica $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^2$.
2. Escribir la matriz $\left[T\right]_{\mathcal{B},\,\mathcal{B}}$ de T respecto de la base $\mathcal{B} = \{\,\mathbf{u}\,,\,\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\,\}$ de $\mathbb{R}^2$.

91. Se considera la aplicación $T : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ que a cada $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_3$ asocia $T(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$, definido por

$$\mathbf{q}(t) = (1+t+t^2)\,\mathbf{p}(0) + \mathbf{p}'(t) + (1-t)\,\mathbf{p}''(t) - \frac{7}{6}\,t\,\mathbf{p}^{(3}(t)\,.$$

Comprobar que T es aplicación lineal y calcular la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{B}_3 = \{1\,,\,t\,,\,t^2\,,\,t^3\,\}$ en salida y $\mathcal{B}_2 = \{1\,,\,t\,,\,t^2\,\}$ en llegada.

92. a) En el espacio vectorial $\mathcal{P}_n$ de los polinomios de grado $\leq n$, comprobar que la aplicación

$$\mathrm{D}^j \;:\; \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_{n-j}$$

que a cada polinomio $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_n$ asocia su derivada de orden j,

$$\mathbf{q} = \mathrm{D}^j\mathbf{p}\,, \qquad \text{siendo} \quad \mathbf{q}(t) = \frac{d^{\,(j}\mathbf{p}(t)}{d\,t^{\,(j}}\,,$$

es una aplicación lineal.

b) Comprobar que, dados escalares $x_0\,, x_1\,, \ldots\, x_k \in \mathbb{R}$, la aplicación

$$T = x_k\,\mathrm{D}^k + \cdots + x_1\,\mathrm{D} + x_0\,I$$

ÁLGEBRA LINEAL
CRÉDITO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS Y SERVICIOS DE TELECOMUNICACIÓN
2013-2014
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
J.R. Esteban

es una aplicación lineal $T : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_{n-k}$.

93. Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq n$ y sea $\mathcal{B}_n$ la base $\mathcal{B}_n = \{ 1 , t , t^2 , \ldots , t^n \}$ de $\mathcal{P}_n$. Se considera la aplicación lineal

$$T : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$$

definida mediante

$$T(\mathbf{p}) = \mathbf{q} , \qquad \text{siendo} \quad \mathbf{q}(t) = \int_0^t \mathbf{p}(s)\, ds ,$$

para cada $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_n$. Escribir la matriz $\left[T\right]_{\mathcal{B}_n , \mathcal{B}_{n+1}}$, de la aplicación lineal T respecto de las bases $\mathcal{B}_n$ en salida y $\mathcal{B}_{n+1}$ en llegada.

94. Considérese la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \mathbf{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \mathbf{m}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

del espacio vectorial de las matrices $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Escribir la matriz $\left[T\right]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ de cada una de las aplicaciones lineales $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ siguientes :

1. $T(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + 3\,\mathbf{X}^T$.
2. $T(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} - \mathbf{XA}$, siendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} .$$

95. En el espacio vectorial E de las matrices 2×2 de números reales consideramos la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} T : & E & \longrightarrow & E \\ & \mathbf{A} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se pide :

1. Hallar la matriz de T respecto de la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \mathbf{m}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \mathbf{m}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

de E en salida y en llegada.

2. Hallar una base de $\ker T$.

ÁLGEBRA LINEAL
GRADO EN INGENIERÍA DE TECNOLOGÍAS Y SERVICIOS DE TELECOMUNICACIÓN
2013-2014
UAM UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
J.R. Esteban

96. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran la base canónica $\mathcal{B}_c$ y la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Escribir la matriz de la aplicación lineal identidad respecto de $\mathcal{B}_c$ en salida y $\mathcal{B}$ en llegada.

97. Sea T la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\,x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2\,x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \end{bmatrix} .$$

1. Hallar los subespacios $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.
2. Para cada $\mathbf{y} \in \operatorname{Im} T$, hallar $T^{-1}(\mathbf{y}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : T(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \}$.

ÁLGEBRA LINEAL
Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación
2013-2014
UAM UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas
J.R. Esteban