Ejercicios 15 a 23

15. [SS] Utilizar la tabla

x	$\sin x$
60	0.866025
65	0.906308
70	0.939693
75	0.965926
80	0.984808

para calcular una aproximación del seno de 72 grados, mediante interpolaciónn lineal en los nodos 70 y 75 . A continuación, calcular mediante interpolación cuadrática en los nodos 65, 70 y 75 . El valor de referencia para $\sin 72$ es 0.951056 .

16. [SS] El peso específico del agua a diversas temperaturas T es

T (ºC)	p $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-3})$
0	0.999871
1	0.999928
2	0.999969
3	0.999991

Aproximar el valor de p en $T = 4$ºC utilizando interpolación lineal en los nodos 2 y 3 , cuadrática en los nodos 1 , 2 y 3 y cúbica en los cuatro nodos dados. El valor de referencia es 1,000000 . Comparar los resultados.

17. [A] Considérense la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

y los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Trazar la gráfica de

$$f(x) - P_2(x)\,,$$

donde $P_2(x)$ es el polinomio que interpola los valores de la función en los nodos dados.

18. Demostrar que si $P(x)$ es un polinomio de grado $\leq n$, entonces cualquier diferencia dividida de orden $> n$ es nula.

19. Demostrar que para cada n y cada $s = 0, 1, 2, \ldots, n$, los Polinomios de Lagrange satisfacen

$$\sum_{j=0}^{n} (x_j - \xi)^s L_{n,j}(x) \equiv (x - \xi)^s .$$

En particular, se verifica

$$\sum_{j=0}^{n} L_{n,j}(x) \equiv 1 \tag{3}$$

y

$$\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^s L_{n,j}(x) \equiv 0 \qquad \text{para cada} \quad s = 1, 2, \ldots, n . \tag{4}$$

20. *Fórmula baricéntrica de los polinomios de* Lagrange. Utilizar (3) para escribir los polinomios de Lagrange en la forma

$$L_{n,j}(x) = \frac{b_j}{x - x_j} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) = \frac{\dfrac{b_j}{x - x_j}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x - x_k}} .$$

21. [ABD] Sean los nodos y valores nodales dados por

x_j	1	2	4	5
f_j	0	2	12	21

Calcular el valor del polinomio $P(x)$ en $x = 3$ cuando

1. $P(x)$ es el polinomio interpolador en los tres primeros nodos.
2. $P(x)$ es el polinomio interpolador en los tres últimos nodos.
3. $P(x)$ es el polinomio interpolador en todos los nodos.

22. [ABD] Considérese la siguiente tabla de nodos y valores nodales

x	0.0	0.2	0.4	0.6
e^x	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221

1. Calcular una aproximación de $e^{1/3}$ mediante interpolación lineal y cúbica.
2. Estimar el error debido a la interpolación y compararlo con el error obtenido. El valor de referencia para $e^{1/3}$ es 1.395612425

23. [ABD] Considérese la función de BESSEL $J_0(x)$ de orden 0

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\,\sin t)\,dt$$

y la siguiente tabla de valores

x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
$J_0(x)$	0.2239	0.1666	0.1104	0.0555	0.0025	−0.0484

Utilizar interpolación polinómica para calcular valores aproximados de $J_0(2.15)$, $J_0(2.25)$ y $J_0(2.35)$ con errores inferiores a $5 \cdot 10^{-4}$