

CÁLCULO NUMÉRICO I

GRADO EN CC. MATEMÁTICAS

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

2013-2014

Ejercicios 1 a 9

1. [S]

1. Demostrar que el polinomio de TAYLOR de

$$f(x) = x^5 + x^3 + x,$$

de grado 4, en $x_0 = 0$ es

$$P_4(x) = x^3 + x.$$

2. Calcular el polinomio de TAYLOR de

$$f(x) = x^5 + x^3 + x,$$

de grado 4, en $x_0 = 1$.

3. Calcular el polinomio $P_n(x)$ de TAYLOR de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

de grado $2n+1$, en $x_0 = 0$. Estudiar, para cada x fijo, la convergencia de $R_n(x, 0) = f(x) - P_n(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

4. Calcular el polinomio $P_n(x)$ de TAYLOR de

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x \neq -1,$$

de grado n , en $x_0 = 0$. Estudiar, para cada $x \neq -1$ fijo, la convergencia de $R_n(x, 0) = f(x) - P_n(x)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

2. [S] Utilizar el polinomio de TAYLOR de $f(x) = \sin x$ en $x_0 = 0$ para calcular el de la función $g(x) = \sin x^2$, de grado $4n+3$, en $x_0 = 0$. Calcular

$$g^{(n)}(0) \quad \text{para todo } n.$$

3.

1. Demostrar que si $f''(a)$ existe, entonces

$$(1) \quad f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}.$$

2. Considérese la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{para } x \leq 0, \\ x^2 & \text{cuando } x \geq 0, \end{cases}$$

para demostrar que el límite en (1) puede existir aunque $f''(a)$ no exista.

4. [S] Utilizar el polinomio de TAYLOR de las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = e^x$, de grado n , en $x_0 = 0$ para determinar el valor de n que permite calcular

1. $\sin 1$ con un error $< 10^{-17}$.
2. $\sin \frac{1}{2}$ con un error $< 10^{-20}$.
3. e^2 con un error $< 10^{-5}$.

Resultará útil tabular, utilizando SAGE, los valores de n , 2^n y $n!$

5. [A] Calcular el valor de

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^2} dx$$

con un error inferior a 10^{-6} .

6. [A] Utilizar el Teorema de TAYLOR para calcular los límites

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{x/2} + \log(1-x)}{x^3}$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{2x}$

7. [A] Calcular el polinomio $P_n(x)$ de TAYLOR en $x_0 = 0$, de grado $\leq 2n+2$, de la función

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x} \quad \text{de los } |x| < 1.$$

Estudiar el límite, para cada x fijo, de

$$f(x) - P_n(x)$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

8. [A] Calcular el polinomio $P_n(x)$ de TAYLOR en $x_0 = 0$, de grado $\leq n$, de la función

$$f(x) = \int_0^x \frac{\log(1+t)}{t} dt.$$

Estudiar el límite, para cada x fijo, de

$$f(x) - P_n(x)$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

9. [A] Calcular el polinomio $P_n(x)$ de TAYLOR en $x_0 = 0$, de grado $2n + 2$, de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Estudiar el límite, para cada x fijo, de

$$f(x) - P_n(x)$$

cuando $n \rightarrow \infty$.