Espacios vectoriales.

Si detectas cualquier error o errata por favor, comunicaselo al profesor de la asignatura. El subíndice "can" significa canónica/o.

1. Determinar el valor de b para que el siguiente sistema de vectores sea linealmente dependiente:

   a) $\{(2,3),(4,b)\}$ Para que sean linealmente dependientes debe verificarse

   $$(2,3)=\alpha(4,b)$$

   lo que permite plantear el sistema de ecuaciones

   $$\begin{cases} 2=\alpha 4 \\ 3=\alpha b \end{cases}$$

   de la primera ecuación tenemos $\alpha=\frac{1}{2}$, y sustituyendo en la segunda debe ser $b=6$.

   b) $\{(1,1,b),(b,3,2),(0,0,b)\}$

   Basta con que uno de los vectores sea combinación lineal de los otros dos. Esto equivale a dar un valor a b de forma que

   $$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ b & 2 & b \end{pmatrix}$$

   tenga rango 2, es decir

   $$0=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ b & 2 & b \end{vmatrix}=3b-b=2b$$

   son linealmente dependientes si y sólo si el determinante es nulo. Por lo tanto debe ser $b=0$.

   c) $\{(1,1,b,1),(b,3,2,1),(0,0,b,1)\}$

   Basta con que uno de los vectores sea combinación lineal de los otros dos. Esto equivale a dar un valor a b de forma que

   $$\begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ b & 2 & b \end{pmatrix}$$

b) ¿Se puede afirmar que al menos uno de los vectores es combinación lineal de los otros dos?

SI. A priori no podemos decir cual es la relación entre los tres pero sí que alguno de ello es combinación lineal de los demás (por definición de SLD)

4. Expresar el vector $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores que se indican en cada caso:

a) $\vec{v} = (1, -2, 3)$ en función de $\{(1, 1, 1), (2, 0, 4), (0, 3, 5)\}$

buscamos $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $(1, -2, 3) = x(1, 1, 1) + y(2, 0, 4) + z(0, 3, 5)$ esto equivale a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1 = x + 2y \\ -2 = x + 3z \\ 3 = x + 4y + 5z \end{cases} \quad \text{con solución } \left\{x = -\tfrac{10}{11}, y = \tfrac{21}{22}, z = -\tfrac{4}{11}\right\}$$

por lo tanto

$(1, -2, 3) = -\frac{10}{11}(1, 1, 1) + \frac{21}{22}(2, 0, 4) - \frac{4}{11}(0, 3, 5)$

b) $\vec{v} = (1, -2, k)$ en función de $\{(3, 0, -2), (2, -1, -5)\}$

buscamos $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $(1, -2, k) = x(3, 0, -2) + y(2, -1, -5)$ esto equivale a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 1 = 3x + 2y \\ -2 = -y \\ k = -2x - 5y \end{cases} \quad \text{de la segunda ecuación tenemos } y = 2 \text{ y sustituyendo en la primera } x = -1$$

por lo tanto sólo en el caso en el que $k = -8$ tendremos la dependencia lineal (con coeficiente o coordenadas $x = 1$, $y = 2$)

5. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ hallar:

a) Una base que contenga a los vectores $\{(1, 2, 3), (3, -2, 5)\}$.

Falta aadir al sistema un vector linealmente independiente (con los que forman el sistema). Por ejemplo, $\{(1, 2, 3), (3, -2, 5), (1, 0, 0)\}$

b) Una base que contenga al vector $\{(2,1,1)\}$.

Sĺo hace falta aadir al sistema dos vectores linealmente independiente (con el que forma el sistema). Por ejemplo, $\{(2,1,1),(0,0,1),(1,0,0)\}$

6. Determinar cuales de los siguientes conjuntos son base del espacio vectorial que se indica en cada caso.

a) $\{(1,2,3,4),(0,0,0,0),(-1,5,4,2)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

NO ya que no es un sistema linealmente independiente.

b) $\{(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,0,5),(0,0,3,2)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

NO puesto que tenemos más vectores que la dimensión del espacio y por lo tanto se trata de un sistema ligado.

c) $\{(0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,3,0),(0,0,0,4)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

SI ya que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

y tenemos tantos vectores LI como dimensión tiene el espacio.

7. ¿Es el conjunto de vectores $\{(1,1,4),(0,2,-1),(4,-12,6)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$?

Hallar las coordenadas respecto de esa base del vector $(1,1,1)$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -12 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$ y tenemos tantos vectores LI como dimensión tiene el espacio se trata de una base.

Las coordenadas del vector $(1,1,1)$ son la solución del sistema $(1,1,1) = x(1,1,4) + y(0,2,-1) + z(4,-12,6)$

$$\begin{cases} 1 = x + 4z \\ 1 = x + 2y - 12z \\ 1 = 4x - y + 6z \end{cases}$$

$x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = \frac{1}{6}$

8. Demostrar que si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una base de un espacio vectorial bidimensional, entonces $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ es base del mismo espacio.

   Las coordenadas de los vectores de la segunda base en la primera son $\{(1, 1), (1, -1)\}$ que son dos vectores linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión dos.

9. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y sea $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ un vector con coordenadas (x, y, z) con respecto a la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. ¿Qué relación existe entre el vector, sus coordenadas y la base?

$$\vec{v} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3$$

10. Consideremos la base de $\mathbb{R}^2$ formada por $\{(1, 0), (0, 2)\}$. Dar las coordenadas del vector $(1, 2)$ en dicha base.

    Son las soluciones del sistema de ecuaciones obtenido a partir de

$$(1, 2) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 2)$$

    es decir, $\alpha = 1, \beta = 1$

11. Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de un espacio vectorial de dimensión 3. Sea w el vector que tiene por coordenadas respecto de dicha base (a, b, c). ¿Cuáles son las coordenadas de dicho vector respecto de la base $\{\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1\}$? (c, b, a)

12. Dado el sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$ formado por $B = \{(1, 3, 0), (0, 1, 4), (1, 1, 1)\}$ se pide:

    a) Demostrar que forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Efectivamente lo es ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

b) Dar sus coordenadas respecto de la base canónica.

Coinciden con sus componentes.

c) Dar las coordenadas de los vectores de la base canónica respecto de dicha base.

Las coordenadas de e_1 en B son $\left(\frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ Las coordenadas de e_2 en B son $\left(\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{-4}{9}\right)$

Las coordenadas de e_3 en B son $\left(\frac{-1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right)$

d) Dar las matrices de cambio de base C_{canB} y C_{Bcan}.

$$C_{canB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$C_{Bcan} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Dadas las bases de R^3 formadas por

$$B = \{(1,3,0), (0,1,4), (1,1,1)\}$$

$$\bar{B} = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$$

se pide calcular las matrices de cambio de base $C_{\bar{B}B}$ y $C_{\bar{B}B}$.

$$C_{B\bar{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{8}{9} & \frac{13}{9} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

$$C_{B\bar{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

14. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el sistema de vectores $S = \{(1,1,a),(1,a,1),(a,1,1)\}$ referido a la base canónica. Estudiar la dimensión del subespacio engendrado por S, $L(S)$, en función de los valores de a.

    La dimensión depende del rango del sistema de vectores que lo genera, así que en este caso $rgS = \dim L(S)$

    $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3a - 2 - a^3 = -(a+2)(a-1)^2$$

    a) $a \neq -2, 1 \Rightarrow \dim L(S) = 3$

    b) $a = -2 \Rightarrow \dim L(S) = 2$

    c) $a = 1 \Rightarrow \dim L(S) = 1$

15. Determinar una base del subespacio engendrado por los vectores

    $$\{(1,2,3,1),(1,3,3,3),(0,1,4,-1),(2,-3,1,1),(4,1,7,3)\}$$

    Dicho subespacio es $L((1,2,3,1),(1,3,3,3),(0,1,4,-1),(2,-3,1,1),(4,1,7,3))$ debemos quedarnos con el subsistema de vectores linealmente independiente más grande posible del sistema generador, o lo que es lo mismo, calcular el rango de dicho sistema. Para ello, mejor que trabajar con determinantes es usar el método de Gauss. Ponemos los vectores por filas y haciendo las operaciones convenientes:

    $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego el sistema tiene rango 4 y una base sería $\{(1,2,3,1),(1,3,3,3),(0,1,4,-1),(2,-3,1,1)\}$

16. Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ (para n adecuado en cada caso) son subespacios vectoriales.

   a) $D = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x = y = z = t\right\}$

   Sean $(x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4) \in D$. Como sus cuatro componentes deben ser iguales, podemos denotarlos por (x,x,x,x) e (y,y,y,y) respectivamente. Tomamos $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y queremos estudiar (una vez más) si $\alpha(x,x,x,x)+\beta(y,y,y,y) \in D$ o o que es lo mismo, si en vector suma tiene todas sus componentes iguales.

   $\alpha(x,x,x,x)+\beta(y,y,y,y) = (\alpha x,\alpha x,\alpha x,\alpha x)+(\beta y,\beta y,\beta y,\beta y) = (\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y)$

   Además $(0,0,0,0) \in D$, es decir, el conjunto es no vacío.

   b) $K = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; 2x+5z = 5\right\}$

   sean $(x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4) \in K$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

   Observemos que

   $$(x_1,x_2,x_3,x_4) \in K \Leftrightarrow 2x_1+5x_3 = 5 \qquad y \qquad (y_1,y_2,y_3,y_4) \in K \Leftrightarrow 2y_1+5y_3 = 5$$

   Por tanto, $\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4)+\beta(y_1,y_2,y_3,y_4) \in K$ sí, y sólo si

   $\alpha(x_1,x_2,x_3,x_4)+\beta(y_1,y_2,y_3,y_4) = (\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3,\alpha x_4+\beta y_4)$ verifica la ecuación cuyas soluciones son los elementos de K. Sin embargo

   $2(\alpha x_1+\beta y_1)+5(\alpha x_3+\beta y_3) =$

   $(2\alpha x_1+5\alpha x_3)+(2\beta y_1+5\beta y_3) =$

   $\alpha(2x_1+5x_3)+\beta(2y_1+5y_3) =$

   $\alpha 5+\beta 5$

   por ejemplo para $\alpha = \beta = 1$ la ecuación no se verifica. Por lo tanto no es subespacio vectorial.

17. Hallar un sistema generador de los siguientes espacios vectoriales:

a) $P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 3y - z = 0\right\}$

Sabemos que $\dim P = 2$. $\{(1, 1, -1), (2, 1, 1)\}$ es un SLI, por tanto una base y en particular un SG. $\{(1, 1, -1), (2, 1, 1), (1, 0, 2)\}$ es S.G. pero no base.

b) $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 0\right\}$

Análogo al apartado (a)

c) $B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 0, 2x + y - z = 0\right\}$

Análogo al apartado (a)

d) $C = \begin{cases} x_1 = a + b + c \\ x_2 = a - b + 3c \\ x_3 = a + 2b \\ x_4 = 2a + 3b + c \end{cases}$

Las ecuaciones equivalen a

$(x_1, x_2, x_3 x_4) = a\,(1, 1, 1, 2) + b\,(1, -1, 2, 3) + c\,(1, 3, 2, 1)$

entonces $C = L\left((1, 1, 1, 2), (1, -1, 2, 3), (1, 3, 2, 1)\right)$

sólo nos resta buscar determinar los vectores libres de dicho sistema de generadores. Usando Gauss (o determinantes) tenemos que el sistema $\{(1, 1, 1, 2), (1, -1, 2, 3)\}$ es una base.

18. Determinar las ecuaciones cartesianas y paramétricas de los espacio vectorial generado por cada una de las siguientes familias de vectores:

a) $Q = L\left((1, 2)\right)$

Paramétricas $\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \end{cases}$

Cartesianas $2x - y = 0$

b) $W = L\left((1, 2, 0), (2, 1, 3)\right)$

Paramétricas $\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = 3\beta \end{cases}$

Cartesianas $2x - y - z = 0$

19. Determinar las ecuaciones cartesianas de la variedad lineal (es otra forma de llamar a un subespacio vectorial) de $\mathbb{R}^3$ engendrada por los vectores $(1, 2, 3), (1, 1, 1)$

    $x - 2y + z = 0$

20. En $\mathbb{R}^4$ consideramos los siguientes subespacios:

$$L_1 = L\left((1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\right)$$

$$L_2 = L\left((1, -1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\right)$$

    Determinar las ecuaciones cartesianas de la suma y de la intersectión y una base de cada una de ellas.

    Los sistemas generadores de ambos subespacios son linealmente independientes, por lo tanto son base de cada subespacio.

    Calculamos las ecuaciones cartesianas de cada uno de ellos:

    $L_1 \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - t = 0 \end{cases}$

    $L_2 \equiv \{z - t = 0$

    Entonces en principio $L_1 \cap L_2 = \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases} = \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - t = 0 \end{cases}$ ya que la última ecuación es igual a la segunda menos la tercera. Esto nos dice que $L_1 \subset L_2$

    $L_1 + L_2 = L\left((1, -1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\right)$ extraemos una base

    $L_1 + L_2 = L\left((1, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1)\right)$

    La ecuación cartesiana es $L_1 + L_2 \equiv t - z$ se trata de un hiperplano. Como $L_1 \subset L_2 \Rightarrow L_1 + L_2 = L_2$

21. Determinar a y b para que el vector $(a, b, -32, -9)$ pertenezca al subespacio engendrado por

$$\{(1, 2, -9, 3), (2, -1, 4, 7)\}$$

Valores de a, b para que el sistema de vectores $\{(a, b, -32, -9), (1, 2, -9, 3), (2, -1, 4, 7)\}$ sea un sistema ligado.

$a = -\frac{166}{75}, b = \frac{553}{75}$

22. En $\mathbb{R}^3$, decidir si el vector $(3, 3, 3)$ pertenece al subespacio engendrado por los vectores $(1, -1, 2), (2, 1, 3)$.

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3$ entonces son LI por lo tanto no pertenece.

23. Determinar una base para la suma y la intersección de los subespacios V_1 y V_2 engendrados por $\{(1, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1)\}$ y $\{(2, -1, 0, 1), (1, -1, 3, 7)\}$ respectivamente.

base para $V_1 \cap V_2$ es $\{(-5, 2, 3, 4)\}$ o algún múltiplo suyo.

base para $V_1 + V_2$ es $\{(1, 2, 1, 0), (0, 3, 2, 1), (0, 0, 1, 2)\}$

24. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales

$W_1 = \{(x, y, x) / x + y + z = 0\}$

$W_2 = \{(t, 2t, 3t) / t \in \mathbb{R}\}$

Demostrar que $\mathbb{R}^3 = W_1 \bigoplus W_2$.

Hay que comprobar que:

a) $\dim W_1 + \dim W_2 = 3$

b) $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}$

25. Consideremos los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

V que tiene por ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x_1 = a + b \\ x_2 = b + c \\ x_3 = a + 2b + c \end{cases}$

W que tiene por ecuaciones cartesianas $y_1 - y_2 + 2y_3 = 0$. Hallar:

a) Una base de V.

$\{(1,0,1),(1,1,2)\}$

b) Una base de $V+W$.

Base de W $\{(1,-1,1),(2,0,1)\}$

Una base de $V+W=\{(1,0,1),(1,-1,1),(2,0,1)\}$

c) Las ecuaciones cartesianas de $V\cap W$.

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$$

d) Una base de $V\cap W$.

$\{(1,1,2)\}$

e) Las coordenadas del vector $(2,3,5)$ respecto de la base de $V+W$ obtenida en el apartado (b).

$x=11, y=-3, z=-3$

26. Dados los subespacios vectoriales $U_1, U_2 \leq \mathbb{R}^3$

$U_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tales que } x+y+z=0, x-y=0\}$

$U_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \text{ tales que } x=\gamma\ y=\gamma\ z=-2\gamma \ \text{ con } \gamma\in\mathbb{R}\}$

Calcula:

a) Las ecuaciones y una base de $U_1\bigcap U_2$.

b) Las ecuaciones y una base de U_1+U_2.

c) Calcula las ecuaciones y una base de un subespacio suplementario de U_1+U_2.

27. Demostrar que el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

tiene estructura de subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

28. Sean $F = L\{(2,0,1),(1,1,1)\}$ $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x-2z=0, y=0\}$ dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Se pide:

    a) Calcular las ecuaciones cartesianas y y una base del subespacio $F \cap G$.

    b) Calcular las ecuaciones paramétricas y una base del subespacio $F + G$.

    c) Calcula un subespacio suplementario del subespacio $F + G$.

29. Sea $H \leq \mathbb{R}^3$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ que tiene por ecuaciones paramétricas:
$$\begin{cases} x = \beta + 3\gamma - 2\omega \\ y = 2\beta + 2\omega \qquad \beta,\gamma,\omega \in \mathbb{R} \\ z = \beta + 5\gamma - 4\omega \end{cases}$$
Sea $J \leq \mathbb{R}^3$ el subespacio vestorial de $\mathbb{R}^3$ dado por $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$tales que $x+y-z=0\}$.

    a) Calcula una base B de $H + J$.

    b) Calcula las matrices $C_{B,Can}$ y $C_{Can,B}$.

    c) Calcula un subespacio suplementario de H.

30. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Sea $F = \{(1,0,-1),(0,1,1),(3,2,-1)\}$. Se pide:

    a) Obtener una base y las ecuaciones cartesianas del espacio $L(F)$.

    b) Calcular una base y la dimensión del subespacio vectorial $W = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a-2b+c=0\right\}$.

    c) Obtener una base del subespacio $L(F) \cap W$.

    d) Calcular el subespacio $L(F) + W$. ¿Son suplementarios?.