

Lógica Proposicional: Semántica (2020)

Ejercicio 1.

Demuestra, mediante una interpretación, que la siguiente fórmula es satisfacible:

$$(s \leftrightarrow \neg p) \wedge ((q \vee r) \rightarrow (p \wedge s))$$

Ejercicio 2.

Averiguar si es o no cierta la siguiente afirmación:

$$p \rightarrow q \vee r \models (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$$

Ejercicio 3.

Demuestra que las fórmulas $p \vee q \vee r$ y $\neg(\neg p \rightarrow q) \rightarrow r$ son equivalentes, justificando adecuadamente la respuesta.

Ejercicio 4.

Indicar (mediante una interpretación y el significado de las conectivas) si la siguiente fórmula es o no una tautología:

$$(\neg p \wedge \neg t \wedge r) \vee ((p \rightarrow s \vee q) \rightarrow (r \wedge \neg s \rightarrow t))$$

Ejercicio 5.

Determinar si existe relación de consecuencia lógica en los siguientes esquemas argumentales:

- (1) $\{ p \vee (q \rightarrow r) \rightarrow q, p \} \models q$
- (2) $\{ p \rightarrow (q \rightarrow r) \} \models q \rightarrow (p \rightarrow r)$
- (3) $\{ p \wedge q \rightarrow \neg r, t \rightarrow r, q, t \} \models \neg p$
- (4) $\{ \neg s, \neg t, p \vee s \vee t \rightarrow \neg q, \neg(r \wedge \neg p) \} \models q \rightarrow r$

Ejercicio 6.

Demostrar que NO se cumple la relación de consecuencia lógica en la siguiente argumentación, sin utilizar tablas de verdad ni el método de resolución:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \vDash p \rightarrow (q \rightarrow r \wedge s)$$

Ejercicio 7.

Encontrar, si existen, un modelo y un contramodelo para las siguientes fórmulas:

- (1) $p \wedge \neg q \leftrightarrow (r \rightarrow \neg(q \wedge \neg r))$
- (2) $\neg(p \vee q \rightarrow \neg p \wedge (p \leftrightarrow \neg q))$

Ejercicio 8.

Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F) :

- (a) Una fórmula bien formada A se dice que es insatisfacible si existe un modelo y un contramodelo de dicha fórmula A.
- (b) Si una fórmula B es consecuencia lógica del conjunto de fórmulas A1, A2, ..., An, se puede afirmar que B es un modelo de A1, A2, ..., An.
- (c) Si no existe un modelo del conjunto de fórmulas A1, A2, ..., An, se puede afirmar que cualquier fórmula B es consecuencia lógica de A1, A2, ..., An.

Ejercicio 9.

Demostrar que se cumple la relación de consecuencia lógica en la siguiente argumentación, sin utilizar tablas de verdad ni el método de resolución:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r) \vDash p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Ejercicio 10.

Determinar si la siguiente argumentación es correcta. Si no lo es, indicar la interpretación que lo demuestra (contramodelo).

$$[p \rightarrow q, \neg p] \vDash \neg q$$

Ejercicio 11.

Encontrar, si existen, un modelo y un contramodelo para cada una de las siguientes fórmulas:

$$p \wedge \neg s \leftrightarrow (r \rightarrow \neg (s \wedge r))$$
$$\neg (p \vee q \rightarrow \neg p \wedge (p \leftrightarrow q))$$

Ejercicio 12.

Demostrar con medios semánticos que NO existe la siguiente relación de consecuencia lógica. No se puede usar ni tablas de verdad, ni deducción natural, ni resolución.

$$\{ p \wedge r \rightarrow \neg q \wedge r \} \models p \rightarrow q \vee \neg r$$

Ejercicio 13.

Demostrar con medios semánticos que no se cumple la siguiente relación de consecuencia lógica, sin utilizar tablas de verdad, ni deducción natural, ni el método de resolución.

$$\{ p \rightarrow s \wedge t, q \leftrightarrow \neg r, \neg(\neg s \vee q \rightarrow s \wedge \neg r) \} \models q \rightarrow t \vee p$$

Ejercicio 14.

Decidir con medios semánticos si este razonamiento es correcto; si no lo es, encontrar un contraejemplo.

$$\{ \neg r \vee \neg s, (q \wedge r) \vee (\neg r \rightarrow \neg s), (\neg p \rightarrow s \wedge \neg q) \vee p \} \models q \vee p$$

Ejercicio 15.

Decidir si existe o no relación de consecuencia lógica en el siguiente esquema argumental, utilizando medios semánticos y justificando adecuadamente los pasos dados y el resultado obtenido.

$$\{ r \wedge s \rightarrow r, s \vee p \rightarrow r, r \wedge p \rightarrow q \} \models p \wedge q \rightarrow r \vee s$$

Ejercicio 16.

Analizar si hay consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión del siguiente argumento. Justificar debidamente la respuesta.

$$\{q \rightarrow \neg r, t \rightarrow p \wedge s, \neg s\} \models q \wedge r \rightarrow t$$

Ejercicio 17.

Para cada fórmula en la columna izquierda, decir qué propiedades tiene a partir de la información indicada en la columna derecha.

- | | |
|--|--|
| (1) $A \rightarrow B \wedge \neg A$
contingente | sabiendo que A es contingente y B es contingente |
| (2) $(D \wedge (D \vee \neg D) \rightarrow D) \leftrightarrow \neg(D \wedge \neg D)$ | sabiendo que D es insatisfacible |
| (3) $A \vee B \rightarrow \neg C$
satisfacible | sabiendo que B es insatisfacible y A es satisfacible |

Ejercicio 18.

Sean A, B y C fórmulas bien formadas. Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no (indicándolo claramente), justificando la respuesta en todos los casos:

- (1) Si existe una interpretación que satisface al mismo tiempo A, B y C, entonces puedo afirmar que C es consecuencia lógica de A y B.
- (2) Si A o B son una contradicción, entonces C es consecuencia lógica de A y B.

Ejercicio 19.

Formalizar el siguiente razonamiento y analizar si es o no correcto:

Al lógico Ceferino le preguntaron: ¿amas a Queta, a Petra o a Rosana?

El pensó: los hechos son:

Amo al menos a una de las tres. Si amo a Petra pero no a Queta, entonces amo a Rosana. O bien amo a Queta y a Rosana, o no amo a ninguna de las tres. Si amo a Queta, entonces también amo a Petra.

Contestó:

Amo a las tres

Ejercicio 20.

Indica si las siguientes afirmaciones son correctas o incorrectas, justificando la respuesta en todos los casos:

- (a) Dadas las fórmulas A1, A2, A3 y B, si existe una interpretación que satisface tanto A1, A2 y A3, como B, podemos afirmar que B es consecuencia lógica (\models) de A1, A2 y A3

- (b) La fórmula $(p \vee q \rightarrow r \leftrightarrow (p \vee (q \rightarrow r)))$ es una tautología
 (c) Una fórmula A es insatisfacible sí y solo si es también contradicción

Ejercicio 21.

Demuestre: $\{ p \rightarrow u, q \rightarrow u, r \rightarrow u, s \rightarrow u, t \rightarrow u \} \models B$ donde la fórmula B es:

(caso a) B: $p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t \rightarrow u$

(caso b) B: $p \vee q \vee r \vee s \vee t \rightarrow u$

Ejercicio 22.

Decide si las siguientes afirmaciones son correctas o no. Justifica la respuesta mediante interpretaciones:

(a) La fórmula es $\neg(q \rightarrow p) \vee \neg(p \rightarrow q)$ es una contradicción

(b) La fórmula $\neg((p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q))$ es una tautología

Ejercicio 23.

Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en cada una de las habitaciones puede haber un tigre o una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarlo, en cada puerta hay un letrero:

puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.

puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama y en una de estas habitaciones hay un tigre.

Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, determinar la puerta que debe de elegir el prisionero.

Ejercicio 24.

Mostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto.

$$p \wedge q \rightarrow r, r \wedge s \rightarrow t \} \models \neg t \rightarrow \neg(p \wedge q) \vee s$$

Ejercicio 25.

Dadas las siguientes fórmulas decir para cada una de ellas si es válida, contingente, contradicción o no es posible saber con certeza qué es, a partir de la información disponible sobre A, B, C y D (donde A, B, C y D son fórmulas cualesquiera :

- $A \vee \neg B$ sabiendo que B es insatisfacible
- $(C \vee B) \rightarrow (C \vee A)$ sabiendo que B es insatisfacible
- $B \rightarrow (A \leftrightarrow D) \vee C$ sabiendo que B es satisfacible, C es satisfacible, A es válida
- $\neg (A \vee \neg B) \vee (C \rightarrow \neg B)$ sabiendo que B es válida, A es insatisfacible
- $\neg A \wedge [A \rightarrow (B \vee \neg A)]$ sabiendo que A es válida, B es insatisfacible
- $A \wedge (C \rightarrow (B \vee \neg A))$ sabiendo que A es sat. y todo modelo de A es modelo de C

Ejercicio 26.

Determinar la corrección del siguiente argumento. Se sabe que

- (1) Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
- (2) Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
- (3) Los ungulados de cuello largo son jirafas.
- (4) Los ungulados con rayas negras son cebras.

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

Ejercicio 27.

Definir $(A \wedge B)$ en función de la conjunción \rightarrow y la negación \neg . Justificar la respuesta mediante una tabla de verdad.

Ejercicio 28.

Probar que la siguiente fórmula es una tautología, semánticamente, sin tablas de verdad

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \wedge r)$$

Ejercicio 29.

(a) Definir el ó exclusivo en función de algunas de las 5 conectivas habituales.

(b) Definir $(A \leftrightarrow B)$ intuitivamente en función de las conectivas \neg y \vee . Comprobar con una tabla de verdad.