

EJERCICIOS TEMA 2. SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas.

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + 5x_2 = 3 \\ 5x_1 + 25x_2 = 15 \\ -x_1 - 5x_2 = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

2. Estudiar la compatibilidad del sistema para los distintos valores de k

$$a) \begin{cases} 5x - 11y + 9z = 4 \\ 3x - 7y + 7z = k \\ x - y - 3z = -1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} kx + y + z = k \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x + y + z = k \\ x + (k+1)y + z = 2k \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

3. Resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas mediante el método de eliminación de Gauss:

$$a) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

4. Calcular, si es posible, la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones

$$a) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

5. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y &= 1 \\ x + y + az &= a \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

- a) Encontrar todos los valores del parámetro a de manera que el sistema anterior tenga solución.
- b) Consideramos $a = 2$. Hallar la solución del sistema anterior usando las fórmulas de Cramer.

6. Resolver, cuando sea posible, los siguiente sistemas utilizando la matriz inversa y la regla de Cramer:

$$a) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - y = 0 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$$

7. Discutir según los valores de los parámetros a y b cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Resolverlos cuando sean compatibles.

$$a) \begin{cases} x_1 + x_3 + ax_2 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2 \\ -3x_1 - 7x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -3 \\ 5x_1 + 12x_2 + 6x_3 - 7x_4 = a \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + (1 + a)x_2 + x_3 = 2a \\ bx_1 + x_2 + (1 + a)x_3 = 0 \end{cases} \quad d) \begin{cases} ax_1 + x_2 = a + 2 \\ 3x_2 = 6 \\ bx_1 + x_3 = b + 3 \end{cases}$$

8. Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hallar el valor de x_2 de la solución, ¿qué método te parece el más conveniente para hacerlo?

9. Agregar una ecuación al sistema

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + y - 3z = 2 \end{cases}$$

para que resulte:

- a) Incompatible.

- b) Compatible indeterminado.
 c) Compatible determinado. En este caso hallar la solución.

10. Expresar mediante un sistema lineal usual el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolverlo en caso de que sea compatible.

11. Se disponen de tres cajas A,B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas que hay en las otras dos cajas. Si se traslada una moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que la caja B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.
12. Una empresa de análisis financiero tiene en plantilla una cantidad x_1 de técnicos de nivel I y una cantidad x_2 de técnicos del nivel II. Cada año la empresa promociona un 10 % de técnicos de nivel II a nivel I y descende un 10 % de técnicos de nivel I al nivel II.
- a) Si hay 80 técnicos de nivel I y 160 de nivel II, ¿cuántos había en cada clase y_1, y_2 el año pasado?
- b) Demostrar que existen distribuciones de plantilla y_1, y_2 que no varían de un año a otro. Hallar cuáles son esas distribuciones.
13. Una cadena hotelera planea construir varios hoteles que tendrán habitaciones individuales, dobles y cuádruples. Cada empleado puede hacer el trabajo equivalente a atender nueve habitaciones individuales, seis dobles o tres cuádruples. ¿Cuántas habitaciones de cada tipo deberán tener los hoteles de la siguiente tabla si el número total de habitaciones, el personal disponible y el número de plazas es el indicado?.

	Hotel 1	Hotel 2	Hotel 3	Hotel 4	Hotel k
Habitaciones	65	50	75	90	n_1
Personal	10	8	12	15	n_2
Plazas	110	90	130	170	n_3

14. Estudiar según los valores de m . Resolver para $m = 1$ y para $m = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x - y + mz = 0 \end{array} \right\}$$

15. Clasificar el sistema según los valores de m y resolverlo cuando sea homogéneo

$$\left. \begin{array}{l} x - y = m \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + y + mz = m \end{array} \right\}$$

16. Estudiar según los valores de m . Resolver cuando sea compatible.

$$\left. \begin{array}{l} x + my = 0 \\ 2x + (m + 1)y = m \\ -x - y = m \end{array} \right\}$$

17. Discutir el caracter del sistema según los valores de m . Resolver para $m = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} x - y = m \\ 2y + mz = 0 \\ 3x + y + mz = 0 \end{array} \right\}$$

18. Estudiar el caracter del sistema según los valores de m y resolver cuando sea compatible indeterminado.

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 2 \\ 2x + y + mz = 4 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\}$$

19. Discutir el caracter del siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores de m . Resolverlo cuando sea homogéneo.

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 2m \\ 2y + mz = m^2 \\ 3x + y + mz = 0 \end{array} \right\}$$