Capítulo 1

Límites y continuidad de funciones de varias variables reales

1.1. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 1. Calcular **dominio**, **recorrido**, y describir los conjuntos de nivel (identificar parábolas, hipérbolas, elipsoides,etc), así como las gráficas de las siguientes funciones.

Nota: puede ser útil usar algún programa de representación gráfico para ver el aspecto de las funciones y curvas de nivel.

a) $f(x,y) = x - y + 2$

b) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$

c) $f(x,y) = -xy$

d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$

e) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

f) $f(x,y) = x^3 - x$

g) $f(x,y) = 4 - 3x + 2c$

h) $f(x,y) = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$

i) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

j) $f(x,y) = x^2 + y^2$

k) $f(x,y) = 3x - 7y$

l) $f(x,y) = x^2 + xy$

m) $f(x,y) = x/y$

n) $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2$

ñ) $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 9z^2$

o) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$

p) $f(x,y,z) = xy$

q) $f(x,y,z) = xy + yz$

r) $f(x,y,z) = xy + z^2$

s) $f(x,y) = |y|$

t) $f(x,y) = \max(|x|,|y|)$

1.2. Limites y continuidad de las funciones de varias variables

Ejercicio 2. Demostrar la existencia de los siguientes límites

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^3 y,$

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \le \delta.$$

$$|x^3 y - 0| = |x^3 y| = \le |x|^3 |y| \le \sqrt{x^2+y^2}^3 \sqrt{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^2 \le \delta^2.$$

Tomando $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ demostramos que el límite vale 0.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} e^x y$

En este caso tenemos

$$\|(x,y) - (0,1)\| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}| \le \delta$$

Nuestro candidato a límite es 1:

$$\begin{aligned} |e^x y - 1| = &|(1 + x + \cdots)y - 1| = |(y-1) + xy| \le |(y-1)| + |x||y| \\ \le &\sqrt{(y-1)^2 + x^2} + ((y-1)^2 + x^2) \le \delta(1+\delta) \le \varepsilon \end{aligned}$$

Donde hemos usado el desarrollo de Taylor de la exponencial y hemos definido $\delta = \text{mín}\{1, \frac{\varepsilon}{2}\}$. Otra forma de proceder es usando las propiedades de los límites, de forma que el limite de la exponencial y de la función y en $(0,1)$ existe y ambos valen 1, así el limite del producto es el producto de los límites.

En lo que sigue, cuando se demuestren límites mediante el sistema $\delta - \varepsilon$ en el origen, se considera siempre que el punto (x,y) está contenido en una bola centrada en el origen y de radio δ, es decir, $0 < \sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$, tal y como se considera en la definición de límite.

c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}$,

$$\left|\frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} - 0\right| \leq \frac{2|x|^3+|y|^3}{x^2+y^3} \leq \frac{3\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 3\sqrt{x^2+y^2} \leq 3\delta = \varepsilon$$

tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

d) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

$$\left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \leq \sqrt{x^2+y^2}\left|\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \delta = \varepsilon.$$

e) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}$.

En este caso desarrollando el numerador tenemos

$$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy} = \frac{x^2+y^2+2xy-x^2-y^2+2xy}{xy} = 4$$

La función es constante y con valor 4, de forma que el límite no tiene ningún problema y vale 4.

f) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}$,

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4} - 0\right| \leq \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{2\sqrt{x^2+y^2}^3}{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} \leq 2\delta = \varepsilon,$$

considerando $\delta = \varepsilon/2$.

g) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$,

$$\left|\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}\right| = \left|\frac{(x-y)^2}{x-y}\right| = |x-y| \leq |x|+|y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \leq 2\delta = \varepsilon,$$

volviendo a tomar $\delta = \varepsilon/2$.

h) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4+ax^2y}{2x^2+2y^2-xy}$, $a \in \mathbb{R}$:

Empezamos probando los límites iterados

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}\frac{x^4+y^4+ax^2y}{2x^2+2y^2-xy}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x^4}{2x^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{2} = 0.$$

Ocurre lo mismo para el otro límite iterado. Pasamos a probar las rectas de la forma $y = mx$:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^4+m^4x^4+amx^3}{2x^2+2m^2x^2-mx^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^2+m^4x^2+amx}{2+2m^2-m} = 0$$

Puede comprobarse que el denominador no se anula $2m^2-m+2=0$ y que el discriminante $D = 1-4*2*2 = -7 < 0$ y por tanto la ecuación no tiene solución real. Vamos a probar el límite directamente (probando $y = kx^2$ se tiene un resultado análogo).

$$\left|\frac{x^4+y^4+ax^2y}{2x^2+2y^2-xy} - 0\right| \leq \frac{|x^4+y^4+ax^2y|}{|x^2+y^2+(x^2+y^2-xy)|} \leq \frac{x^4+y^4+|a|x^2|y|}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{2(x^2+y^2)^2+|a|(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \leq 2(x^2+y^2)+|a|\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta(2\delta+|a|) = \varepsilon.$$

Hemos considerado $\delta = \text{mín}\{1, \frac{\varepsilon}{2+|a|}\}$. Por otro lado, en el segundo $\leq$ hemos considerado $x^2 + y^2 + (x^2 + y^2 - xy) \geq x^2 + y^2$. Esto puede comprobarse de varias formas:

- $xy \leq |x||y| \leq \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} = x^2 + y^2$. De esta forma vemos que el segundo sumando de $x^2 + y^2 + (x^2 + y^2 - xy)$ es definido positivo, por lo que podemos eliminarlo.
- Considerando $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{x^2+y^2}{2} \leq (x^2+y^2) \Rightarrow 0 \leq x^2 + y^2 - xy$.

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+kx^3}$, $k \in \mathbb{R}$.

Si reescribimos el denominador tenemos

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+kx^3} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)(1+\frac{kx^3}{x^2+y^2})} = \frac{1}{1+\frac{kx^3}{x^2+y^2}}$$

Por un lado, el numerador tiene límite 1, y por otro, el denominador también, y puesto que el limite del denominador es distinto de 0, podemos aplicar las propiedades de los límites, de forma que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+kx^3} = 1$.

j) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

En este caso tenemos

$$\|(x,y,z) - (0,0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq \delta.$$

De esta forma

$$\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} - 0\right| \leq \frac{|x||y||z|}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq \delta = \varepsilon,$$

Tomando $\delta = \varepsilon$.

Ejercicio 3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

El único punto conflictivo es el origen. Empecemos calculando los límites iterados en primer lugar

- $\text{lím}_{x\to0}\left(\text{lím}_{y\to0} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}\right) = \text{lím}_{x\to0} \frac{x^2}{x^2} = \text{lím}_{x\to0} 1 = 1$
- $\text{lím}_{y\to0}\left(\text{lím}_{x\to0} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}\right) = \text{lím}_{y\to0} \frac{2y^2}{y^2} = \text{lím}_{y\to0} 2 = 2$

Como los límites iterados no coinciden el límite en el origen no existe y por tanto la función presenta una discontinuidad en $(x,y) = (0,0)$.

b) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

El único punto conflictivo es el origen. Es fácil comprobar que los límites iterados coinciden y valen 0. Por otro lado, tomando rectas $y = mx$ llegamos a un resultado análogo. Pasamos a comprobar si el límite en el origen existe usando la demostración $\delta - \varepsilon$:

$$\left|\frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} - 0\right| \leq \frac{x^2(|x|+|y|)}{x^2+y^2} \leq \frac{(x`2+y^2(\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} \leq 2\delta = \varepsilon,$$

considerando $\delta = \varepsilon/2$. Comprobamos así que el límite existe y coincide con el valor de la función en el punto, con lo que $f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

c) $h(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Al igual que pasaba en el apartado anterior, el único punto conflictivo es el origen, y los límites iterados y sobre las rectas $y = mx$ coinciden y valen 0. Vamos a comprobar que el límite existe

$$\left|\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \leq \delta = \varepsilon,$$

considerando $\delta = \varepsilon$. Tenemos así que la función es continua.

d) $j(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

El punto conflictivo es el origen. Consideremos una recta $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{m^2x^4 + x^2(1-m)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{m^2x^2 + (1-m)^2}$$

Para $m \neq 1$ el límite vale 0. Sin embargo, si tomamos $m = 1$ tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{m^2x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Como los límites toman valores distintos dependiendo del valor de m, concluimos que el límite no existe, y por tanto la función no es continua en el origen.

1.3. Existencia y cálculo de límites

Ejercicio 4. Calcular, en caso de que existan, los siguientes límites:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$,

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0.$$

El límite no existe , pues los límites iterados no coincide.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y^2}{x^2+y^2}$,

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \pm\infty \to \text{No existe},$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1,$$

Uno de los límites iterados no existe, por lo que el límite tampoco.

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$.

Calculemos el límite a lo largo de la recta $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{x^4(1+m^4)} = \frac{m^2}{1+m^4}$$

Como el límite depende de la recta que consideremos, no existe.

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^8+y^8}$.
empecemos por los límites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^8+y^8}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^8} = 0,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^8+y^8}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^8}=0,$$

Ahora vamos a probar el límite a lo largo de la recta $y=mx$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{m^2x^4}{m^2x^4+x^8(1+m^8)}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2}{m^2+x^4(1+m^8)}=1$$

Vemos que los límites iterados y los límites a lo largo de las rectas $y=mx$ no coinciden, por lo que el límite no existe.

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|}$.

Tómese las rectas $y=mx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|mx^2|}}{|x|+|mx|}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\sqrt{|m|}}{|x|(1+|m|)}=\frac{\sqrt{|m|}}{1+|m|}$$

Como el límite depende de la recta que consideremos, sabemos que el límite no existe.

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{y}$.

En este caso vamos a usar el desarrollo del seno mediante infinitésimos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+o(|xy|)}{y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x+x\frac{o(|xy|)}{xy}=0,$$

donde hemos usado que el limite de un producto (suma) es el producto (suma) de los límites.

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy}-1}{y}$.

Para este caso procedemos como en el anterior

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy}-1}{y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+xy+o(|xy|)-1}{y}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}x+x\frac{o(|xy|)}{xy}=0.$$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2+2}$.

Dado que el límite del denominador es 2, podemos recurrir a la propiedad de que el límite de una fracción es igual a la fracción de los límites, por lo que concluimos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2+2}=0$

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{cos(xy)-1}{x^2y^2}$.

Recurrimos al desarrollo mediante infinitésimos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{cos(xy)-1}{x^2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\frac{(xy)^2}{2}+o(|xy|^2)-1}{x^2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}-\frac{1}{2}+\frac{o(|xy|^2)}{(xy)^2}=-\frac{1}{2}$$

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy}}{x+1}=1$, ya que el denominador no se anula al tomar el límite.

k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$.

Consideremos los límites a lo largo de la recta $y=mx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-m)^2}{x^2(1+m^2)}=\frac{(1-m)^2}{1+m^2}$$

Como el límite depende de m tenemos que no existe.

l) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x) - 1 - x^2/2}{x^4 + y^4}$.

Calculemos los límites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{\cos(x) - 1 - x^2/2}{x^4 + y^4}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 - x^2/2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x) - x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{\cos x + 1}{12x^2} \to \pm\infty$$

Como este el límite iterado no existe, el límite de la función tampoco.

m) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{xyz} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz + o(|xyz|)}{xyz} = 1$

n) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2 + 2y^2}{x + 1} = 0$.

Como el denominador tiene límite 1, podemos usar las propiedades de los límites.

ñ) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x^2 y \cos(z)}{x^2 + y^2}$

Tanto limites iterados como a lo largo de las rectas $y = mx$ coinciden y toman el valor 0, por lo que pasamos a probar directamente mediante la demostración $\delta - \varepsilon$

$$\left|\frac{2x^2 y \cos z}{x^2 + y^2} - 0\right| \leq \frac{2x^2|y|}{x^2 + y^2}|\cos z| \leq \frac{2x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{2x^2|y|}{x^2} \leq 2|y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\delta = \varepsilon$$

donde hemos considerado $\delta = \varepsilon/2$.

Ejercicio 5. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en el origen de coordenadas:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Es fácil comprobar que los límites iterados y a lo largo de una recta de la forma $y = mx$ valen todos 0, por lo que pasamos a hacer la prueba $\delta - \varepsilon$

$$\left|\frac{xy(x+y)}{x^2 + y^2} - 0\right| =\leq \frac{|x||y|(|x| + |y|)}{x^2 + y^2} \leq \frac{2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\delta = \varepsilon$$

tomando $\delta = \varepsilon/2$. Por lo tanto, la función es continua.

b) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Empecemos calculando los límites iterados

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{y^3}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{|x|^3} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{y^3}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{y^3}{|y|^3} = \text{signo}(y)$$

Dado que el segundo límite depende de si nos acercamos por $y > 0$ o por $y < 0$, este no existe, y por tanto, la función no es continua en el origen.

c) $h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{3x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Tanto los límites iterados como a lo largo de rectas coinciden y son 0, así que probamos con la demostración $\delta - \varepsilon$

$$\left|\frac{x^2 y}{3x^2 + y^2} - 0\right| \leq \frac{x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta = \varepsilon$$

tomando $\delta = \varepsilon$. Tenemos así que la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$

d) $j(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Al igual que en los casos anteriores los límites iterados, a lo largo de rectas $y = mx$ o parábolas $y = kx^2$ dan como resultado 0, por lo que pasamos a la demostración $\delta - \varepsilon$

$$\left| \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} - 0 \right| \leq \frac{x^2y^2}{y^2} \leq x^2 \leq (x^2+y^2) \leq \delta^2 = \varepsilon$$

Tomando $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.