Tema 8: Sucesiones de números

1. Calcula los siguientes límites de sucesiones:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{\sqrt{2n}}-\frac{n+2}{\sqrt[3]{n}}\right)$ (Sol: $-\infty$)
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[7]{n^2}}{\sqrt{n^2+2n}}$ (Sol: 0)
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{2n^2}{n-1}\right)$ (Sol: $-\infty$)
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$ (Sol: $\frac{1}{2}$)
   (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+1}{3n-1}\right)^{7n}$ (Sol: ∞)
   (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{3n^2-1}\right)^{\frac{3n^2}{n-4}}$ (Sol: 1)
   (g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}+\ldots+n\sqrt[n]{n}}{n^2}$ (Sol: $\frac{1}{2}$)
2. Halla $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sin(\frac{\pi}{3k})}{\log(n^2)}$ (Sol: $\frac{\pi}{6}$)
3. Determina $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\sin\left(\frac{1}{k}\right)$ (Sol: $\frac{1}{2}$)
4. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(3k-2)^{\frac{1}{n^2}}$ (Sol: 1)
5. Calcula los siguientes límites aplicando la fórmula de Stirling:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^n}{3\,n!}$ (Sol: 0)
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{n}{\sqrt[2n]{n!}}$ (Sol: $-\infty$)
6. Sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ definida a través de la siguiente relación de recurrencia
   $$a_0=\frac{1}{2},\qquad a_{n+1}=\frac{a_n^3+6}{7}$$
   Demuestra que es monótona y acotada. Determina hacia qué valor converge.
   (Sol: Para demostrar que es mónotona y acotada aplicamos el método de inducción. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$)
7. Sea la sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ definida a través de la siguiente relación de recurrencia
   $$c_0=a,\quad c_1=b,\qquad c_n=\frac{c_{n-1}+c_{n-2}}{2}$$
   Calcula su límite.
   (Sol: El procedimiento es el mismo que el llevado a cabo para obtener el término general de la sucesión de *Fibonacci*. $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{a+2b}{3}$)