Curso 2021/22

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

PROBLEMAS. Hoja 6

1. Consideramos un método lineal multipaso (MLM) de k pasos. Sea

$$C_q = \frac{1}{q!}\left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j j^q - q\sum_{j=0}^{k} \beta_j j^{q-1}\right)$$

- Probar que con $C_q = 0$ para $q = 0, \ldots, p$ el método será consistente de orden al menos p.
- Si $C_{p+1} \neq 0$, el método no puede tener orden de consistencia $p+1$. Considerar para ello el PVI:

$$y'(t) = \frac{t^p}{p!}, \qquad t \in [0, T], \qquad y(0) = 0.$$

2. Sea el método de salto de rana:

$$y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}.$$

- Ver que es 0-estable
- Estudiar su orden de consistencia.
- Analizar su estabilidad

3. Un MLM es simétrico si sus coeficientes satisface:

$$\alpha_j = -\alpha_{k-j}, \qquad \beta_j = \beta_{k-j}, \qquad j = 0, \ldots, k.$$

Desarrollando alrededor del punto medio, probar que los métodos simétricos tienen orden par.

4. Sea el método de Simpson:

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}).$$

- Ver que es 0-estable
- Estudiar su orden de consistencia.
- Analizar su estabilidad

5. Sea el método de dos pasos:

$$y_{n+2} = y_n + \frac{2}{3}h\left(f(t_{n+2}, y_{n+2}) + f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)\right)$$

Determinar su convergencia y su orden de consistencia. Identificar el dominio de estabilidad lineal. Es A-estable?

6. Los métodos explícitos de Adams-Bashforth se escriben como

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h\sum_{j=0}^{k-1} \beta_{k,j} f_{n+j},$$

donde los primeros coeficientes son:

k	$\beta_{k,0}$	$\beta_{k,1}$	$\beta_{k,2}$	$\beta_{k,3}$
1	1			
2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$		
3	$\frac{5}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{23}{12}$	
4	$-\frac{9}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{55}{24}$

- Comprobar que convergen y obtener su orden de consistencia.
- Identificar su región de estabilidad
- Son A-estables?

7. Los métodos BDF (Backward differentiation formula) de k pasos se escriben como

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} y_{n+j} = h f_{n+k},$$

donde los valores de los coeficientes $\alpha_{k,j}$ para $k \leq 4$ son:

k	$\alpha_{k,0}$	$\alpha_{k,1}$	$\alpha_{k,2}$	$\alpha_{k,3}$	$\alpha_{k,4}$
1	-1	1			
2	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$		
3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	-3	$\frac{11}{6}$	
4	$\frac{1}{4}$	$-\frac{4}{3}$	3	-4	$\frac{25}{12}$

- Comprobar que convergen y obtener su orden de consistencia.
- Identificar su región de estabilidad
- Cuales son A-estables?

8. Sea $\Pi(r, z)$ el polinomio de estabilidad de un método lineal multipaso (MLM) de k pasos. Sean

$$r_1(z), \ldots, r_{q(z)}(z), \qquad q(z) \leq k,$$

las raíces de dicho polinomio con respectivas multiplicidades

$$m_1(z), \ldots, m_{q(z)}(z), \qquad \sum_{i=1}^{q(z)} m_i(z) = k.$$

Probar que existen c_{ij} tal que la solución general del MLM es:

$$y_n = \sum_{i=1}^{q(z)} \sum_{j=0}^{m_i(z)-1} c_{ij} n^j r_i(z)^n$$

donde las k constante c_{ij} quedan determinados de manera única por los k-valores y_0,..., y_{k-1}. En particular, probar que

$$\sum_{j=0}^{k} (\alpha_j - z\beta_j) y_{n+j} = 0.$$