

ProblemasTermoSOLUCIONES.pdf



Albepm



Termodinámica



2º Grado en Física



**Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid**

SI VAS A DEJAR DE ESTUDIAR PARA MIRAR EL MÓVIL, AL MENOS QUE SEA PARA LLEVARTE ALGO.

Abrir cuenta en N26



Disfruta de 12 meses gratis de la cuenta bancaria premium N26 Smart con el código **N26WUOLAH**.
¡Gestiona tu dinero desde el móvil y no vuelvas a pisar una sucursal!

TIN 0 %, TAE: -1,17 % para un supuesto en el que se mantenga de forma constante durante un año un saldo diario de 5.000 €, aplicando un tipo de interés nominal anual de 0 % y el coste mensual de la cuenta bancaria de 4,90 €/mes. La liquidación de la cuenta se realiza con periodicidad mensual.

PROBLEMAS DE TERMODINÁMICA 2º CURSO GRADO EN FÍSICAS. UCM

PRINCIPIO CERO Y TEMPERATURA

1. Los sistemas **A** y **B** son sales paramagnéticas con coordenadas (H, M) y (H', M') respectivamente, mientras que el sistema **C** es un gas con coordenadas (p, V) . Cuando **A** y **C** están en equilibrio térmico se cumple : $nRcH - MpV = 0$, y cuando lo están **B** y **C** se cumple : $M'pV - nR(c'H' + aM') = 0$, siendo los símbolos n, R, a, c y c' constantes:

- a) ¿Cuáles son las funciones, del par de variables de cada sistema, iguales entre sí en el equilibrio térmico? *Sol.: $pV = nRcH/M = nR(c'H' + aM')/M'$*
- b) ¿Cuál es la relación que expresa el equilibrio térmico entre los sistemas **A** y **B**? *Sol.: $cH/M = (c'H' + aM')/M'$*

2. La resistencia de un termómetro de platino es de 18,56 Ω en el punto de fusión del estaño y de 9,83 Ω en el punto triple del agua. En estos mismos puntos las presiones de un termómetro de H₂ a volumen constante son 12,70 bar y 6,80 bar. Para otra cantidad de gas en el bulbo se obtiene 1,85 bar y 1,00 bar. Además, las fuerzas electromotrices de un termómetro cobre-níquel en los mismos puntos son 9,02 mV y 2,98 mV. Determínese la temperatura de fusión del estaño en las distintas escalas termométricas.
Sol.: 515,75 K; 510,17 K; 505,35 K; 826,81 K

3. Los valores límite a $p \rightarrow 0$ del producto pV en un termómetro de gas a volumen constante, en contacto térmico con dos sistemas, θ_1 y θ_2 , son 45,423 y 53,394 Pa·m³, respectivamente. Calcúlese la relación de temperaturas $T(\theta_1)/T(\theta_2)$, de los dos sistemas. Si el sistema θ_1 es una célula de punto triple del agua, ¿cuál es la temperatura $T(\theta_2)$?
Sol.: 0,85; 321,10 K

4. Un termómetro de gas, a volumen constante, se utiliza para determinar la temperatura absoluta de un sistema. Las lecturas corregidas de la presión en el bulbo cuando, lleno con diversas cantidades de gas, se pone en contacto con agua en el punto triple (p_{PT}) y con el sistema (p) son:

p_{PT} (mmHg)	1000,00	800,00	500,00	200,00	100,00
p (mmHg)	1296,02	1036,86	648,11	259,30	129,66

Calcúlese la temperatura del sistema en la escala del gas ideal.
Sol.: 354,19 K

N26 Tu Banco Móvil



DESCRIPCIÓN FENOMENOLÓGICA DE LOS SISTEMAS TERMODINÁMICOS MÁS USUALES

5. Una vasija contiene 8,450 g de agua a 0°C y el resto de la misma se llena con parafina. Cuando el agua se congela a 0°C, se expulsan 0,620 g de parafina. La densidad de la parafina a 20°C es 0,800 g/cm³ y su coeficiente de dilatación 9,0·10⁻⁴K⁻¹. Calcúlese la densidad del hielo. Considérese la densidad del agua igual a 1g/cm³.
Sol.: 0,917 g/cm³

6. Los coeficientes de dilatación cúbica y de compresibilidad isotérmica de cierta sustancia vienen dados por $\alpha = \frac{3aT^3}{V}$ y $\kappa_T = \frac{b}{V}$, siendo a y b constantes. Determinése la ecuación de estado que relaciona p , V y T . *Sol.: $V = 3aT^4/4 - bp + cte$*

7. Un metal, cuyos coeficientes de dilatación cúbica y de compresibilidad isotérmica son 5·10⁻⁵ K⁻¹ y 1,2·10⁻¹¹ Pa⁻¹ respectivamente, está a una presión de 10⁵ Pa y a una temperatura de 20°C. Si se le recubre con una capa gruesa y muy ajustada de una sustancia de dilatación y compresibilidad despreciables

- a) ¿cuál será su presión final al elevar su temperatura hasta 32 °C?, (*Sol.: 5,01·10⁷ Pa*)
b) ¿cuál es la máxima temperatura que puede alcanzar el sistema si la presión más alta que puede resistir la envoltura es 1,2·10⁸ Pa? (*Sol.: 48,78 °C*)

8. Un hilo metálico de 0,0085 cm² de sección, sometido a una fuerza de 20 N y a la temperatura de 20°C, está situado entre dos soportes rígidos separados 1,2 m.

- a) ¿Cuál es la fuerza recuperadora final si la temperatura se reduce a 8°C?.
(*Sol.: 50,6 N*)
b) Si además de la anterior disminución de temperatura los soportes se acercan 0,012cm, ¿cuál será la fuerza recuperadora final?. (*Sol.: 33,6 N*)

Supóngase que en todo momento el hilo se mantiene rectilíneo y que el coeficiente de dilatación lineal y el módulo de Young isoterma tienen valores constantes e iguales a 1,5·10⁻⁵ K⁻¹ y 2·10¹¹ N/m², respectivamente.

9. La ecuación de estado de una sustancia elástica ideal es:
$$F = KT \cdot \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right),$$
 donde

F es la fuerza recuperadora, K es una constante y L_0 (valor de la longitud a fuerza recuperadora nula) es función sólo de la temperatura.

- a) Determinése el coeficiente de dilatación lineal.

$$\text{Sol.: } \alpha_L = - \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) / T \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2} \right)$$

- b) Determinése el módulo de Young de la sustancia, así como el valor de este último a fuerza recuperadora nula. *Sol.: $\gamma_{(F=0)} = 3KT/A$*

Ya puedes imprimir desde Wuolah

Tus apuntes sin publi y al mejor precio

1 Añadir a la cesta

2 Cola de impresión

3 Impresión

4 Copistería Lowcost

Te enviamos los apuntes a casa

Recogelos en tu copistería más cercana



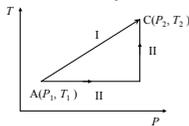
TRABAJO EN TERMODINÁMICA

10. Determine el trabajo realizado en la expansión isoterma de un mol de gas ideal a la temperatura de 300 K cuando:

- El gas se expandiona en una etapa, desde 10 a 1 bar, contra una presión exterior constante de 1 bar.
Sol.: -2244,8 J
- La expansión se realiza en dos etapas. En la primera el gas se expandiona desde 10 a 5 bar, contra una presión exterior constante de 5 bar. En la segunda el gas se expandiona desde 5 a 1 bar, contra una presión exterior constante de 1 bar. *Sol.: -3242,5 J*
- La expansión se realiza en tres etapas: 1) desde 10 a 5 bar a presión exterior constante de 5 bar, 2) desde 5 a 2 bar a presión exterior constante de 2 bar, 3) desde 2 a 1 bar a presión exterior constante de 1 bar.
Sol.: -3990,7 J
- La expansión se realiza en 9 etapas, desde 10 a 1 bar, reduciendo progresivamente presión exterior en incrementos de 1 bar. *Sol.: -4813,8 J*
- La expansión se realiza en un número infinito de etapas, haciendo que la presión externa sea un infinitésimo inferior de la presión interna en cada etapa sucesiva. *Sol.: -5743 J*

Compárense entre sí los resultados obtenidos en cada uno de los apartados anteriores.

11. Un mol de gas ideal evoluciona cuasiestáticamente desde el estado A hasta el estado C. Determínese el trabajo realizado cuando la evolución tiene lugar a lo largo de los caminos I y II indicados en el diagrama pT de la figura. *Sol.:*



$$W_I = \left[RT_1 - R p_1 \frac{(T_2 - T_1)}{(p_2 - p_1)} \right] \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$W_{II} = RT_1 \ln \frac{p_2}{p_1} + R(T_1 - T_2)$$

12. Un sólido paramagnético ideal de volumen V adquiere, cuasiestáticamente, una imanación m en presencia de un campo magnético externo variable. La temperatura del sólido varía durante la imanación según la ley $T = T_0 \exp(Km^2)$, siendo K una constante. Hállese el trabajo que se realiza en la imanación del sólido en función de la temperatura T . *Sol.: $W = \mu_0 V(T - T_0)/2KC$*

13. Calcular el trabajo efectuado por un mol de gas que obedece a la ecuación de Van der Waals al expandirse desde el volumen V_1 al volumen V_2 en los siguientes casos:

- Por vía reversible e isoterma. *Sol.: $W = a(1/V_1 - 1/V_2) - RT \ln((V_2 - b)/(V_1 - b))$*
- Por vía irreversible a presión constante. *Sol.: $W = -p_{ext}(V_2 - V_1)$*

Determínense las expresiones del trabajo en ambos casos si el gas fuese ideal.

Sol.: a) $W = -RT \ln(V_2/V_1)$ b) $W = -p_{ext}(V_2 - V_1)$

14. Un mol de agua se comprime reversiblemente en una prensa hidráulica, a la temperatura constante de 20,0°C, desde la presión inicial $p_1 = 1,0$ bar hasta la presión final $p_2 = 100,0$ bar. Calcúlese el trabajo realizado en el proceso sabiendo que, a esta temperatura, el coeficiente de compresibilidad isoterma y la densidad valen $45,30 \cdot 10^{-6} \text{ bar}^{-1}$ y $0,9982 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, respectivamente. *Sol.: 0,511 J*

15. El nitrobenzono líquido es un material dieléctrico. En un cierto intervalo de temperaturas, la polarización eléctrica o momento dipolar por unidad de volumen, P , está relacionada con el campo E por:

$$P = \epsilon_0 (23,8 - 4,16 \cdot 10^{-4} E) E$$

donde P está expresado en C/m^2 , E en V/m y ϵ_0 es la permitividad del vacío igual a $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$. Calcúlese el trabajo realizado por cm^3 de nitrobenzono cuando el campo eléctrico aumenta de 0 a 10^4 V/m e indíquese si se da o se recibe trabajo del sistema. *Sol.: $8,08 \cdot 10^{-3} \text{ J/m}^3$*

PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

16. Un mol de agua a 24°C y 1,013 bar se calienta a presión constante hasta 100°C. El coeficiente de dilatación cúbica del agua vale $4 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Calcúlese el cambio de energía interna experimentado por el agua, considerando que la densidad media del líquido en dicho intervalo de temperaturas es de 1 g/cm^3 y el calor específico medio a presión constante vale $4,18 \cdot 10^3 \text{ J/kg K}$. *Sol.: 5718,2 J.*
17. Un recipiente de 15 m^3 contiene radiación electromagnética en equilibrio con sus paredes a la temperatura de 300 K. Dicha radiación se comporta como un sistema (gas de fotones) con ecuaciones térmica de estado y energética dadas por las expresiones: $p = aT^4/3$ y $U = aVT^4$, donde $a = 7,56 \cdot 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$.
- a) Calcúlese el calor absorbido por el sistema de radiación en un proceso isotermo reversible en el que su volumen se duplica. *Sol.: $1,22 \cdot 10^4 \text{ J}$*
- a) Obténgase, por otra parte, la ecuación que rige, en coordenadas (p, V) , los procesos adiabáticos reversibles experimentados por dicho sistema. *Sol.: $pV^{4/3} = \text{cte}$*
18. Un cilindro vertical de paredes adiabáticas y 100 cm de altura está dividido en dos partes por una membrana impermeable que se encuentra a 50 cm de la base. La parte superior del cilindro está cerrada por un pistón adiabático sobre el que se ejerce una presión exterior constante. Inicialmente la parte inferior está vacía, mientras que la parte superior contiene un mol de gas ideal monoatómico a 300 K, encontrándose el pistón a 100 cm de altura. En un momento determinado se rompe la membrana y, en consecuencia, el pistón desciende. Determínese la altura a la que se detiene el pistón una vez que se ha alcanzado el equilibrio y el trabajo realizado sobre el gas. *Sol.: 70 cm de la base, 1496,5 J.*
19. Un mol de gas ideal biatómico experimenta cambios reversibles desde $p_i = 10 \text{ bar}$ y $V_i = 10 \text{ l}$ a $p_f = 1 \text{ bar}$, de acuerdo con los siguientes procesos: a) $V = \text{cte}$, b) $T = \text{cte}$, y c) adiabáticamente. Calcúlese W , Q , ΔU y ΔH en cada proceso. Representense los procesos en un diagrama PV . *Sol.: a) 0; -22,5 kJ; -22,5 kJ; -31,5 kJ; b) -23,0 kJ; 23,0 kJ; 0; 0; c) -12,15 kJ; 0; -12,15 kJ; -16,87 kJ*
20. Un gas ideal biatómico, encerrado en un cilindro de paredes adiabáticas, se calienta a la presión constante de 2 bar mediante una resistencia de capacidad calorífica despreciable. El volumen ocupado por el gas aumenta de 25 a 42 litros en 6 minutos. Calcúlese:
- a) El cambio de energía interna experimentado por el gas. *Sol.: 8500 J*
- b) El trabajo eléctrico suministrado a la resistencia. *Sol.: -3400 J*
- c) La intensidad que circula por la resistencia de valor 100Ω . *Sol.: 0,57 A*
21. La energía interna molar de un gas monoatómico que obedece la ecuación de Van der Waals viene dada por:

$$\bar{U} = \frac{3}{2} RT - \frac{a}{v}$$

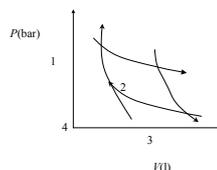
donde v es el volumen molar a la temperatura T y a es una constante. Inicialmente un mol de este gas se encuentra a la temperatura T_1 y ocupando un volumen v_1 . Se permite al gas expandirse adiabáticamente hacia un espacio adicional vacío. ¿Cuál es el cambio de energía interna? ¿cómo varía la temperatura? *Sol.: $\Delta U = 0$. El gas se enfría.*

INSIDE

LLEGO EL DÍA ¿TE VAS A RESISTIR?

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

22. Un mol de gas ideal monoatómico recorre un ciclo de Carnot reversible, como el indicado en la figura, con $V_1=20$ l, $V_2=40$ l, $T_1=300$ K y $T_3=200$ K. Calcúlense ΔP , ΔV , ΔT , ΔU , ΔH , y ΔS en cada etapa del ciclo.



Sol.:

(1-2): $-0,62$ bar; 20 l; 0 K; 0 ; 0 ; $R \ln 2$; (2-3): $-0,397$ bar; $33,48$ l; -100 K; -150 R; -250 R; 0 ; (3-4): $0,226$ bar; $-36,74$ l; 0 ; 0 ; $-R \ln 2$; (4-1): $0,794$ bar; $-16,74$ l; -100 K; 150 R; 250 R; 0

23. Una máquina térmica funciona entre un depósito que contiene $1 \cdot 10^3$ m³ de agua y un río a temperatura constante de 10°C . Si la temperatura inicial del depósito es 100°C , ¿cuál es la cantidad máxima de trabajo que puede realizar la máquina térmica? Sol.: $4,93 \cdot 10^{10}$ J.

24. Una máquina térmica reversible funciona entre tres focos térmicos de temperaturas $T_1 = 500$ K, $T_2 = 400$ K y $T_3 = 300$ K. Si en un ciclo realiza un trabajo de 3616 kJ y del primer foco absorbe la cantidad de calor $Q_1 = 2926$ kJ, calcule: a) las cantidades de calor intercambiadas con los otros dos focos. b) El rendimiento del ciclo. Sol.: a) $Q_2 = 9782,4$ kJ; $Q_3 = -9092,4$ kJ; b) 28%

25. Un sistema tiene una capacidad calorífica a volumen constante dada por: $C_v = AT^2$, donde $A = 0,0418$ J/K³. El sistema se encuentra inicialmente a 200°C y puede ser enfriado a 0°C mediante uno u otro de los siguientes procesos: a) por contacto directo con un foco térmico a esa temperatura, b) haciendo funcionar una máquina térmica reversible entre el sistema y el foco térmico. Determinése, en cada caso, el trabajo obtenido y los cambios de entropía del sistema, del foco y del universo. Sol.: a) 0 ; $-3118,28$ J/K; $4362,6$ J/K; $1244,32$ J/K; b) $339696,1$ J; $-3118,28$ J/K; $3118,28$ J/K; 0

26. Calcúlese la diferencia entre las entropías molares del mercurio líquido subenfriado y el mercurio sólido, ambos a -50°C y $1,013$ bar de presión. El punto de fusión del mercurio es de -39°C y su entalpía de fusión a esta temperatura es de $2340,8$ J/mol. La capacidad calorífica molar a presión constante del mercurio líquido es $c_p(l) = 29,68 - 6,69 \cdot 10^{-3} T$ J mol⁻¹ K⁻¹ y el del mercurio sólido $c_p(s) = 26,75$ J mol⁻¹ K⁻¹. Sol.: $-9,93$ J/mol K

27. Cierta sistema hidrostático tiene isothermas dadas por $pV^2 = \text{cte}$ y una energía interna dada por $U = pV/2$. Dicho sistema describe un ciclo $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ en tres etapas, siendo el proceso $A \rightarrow B$ adiabático reversible, el proceso $B \rightarrow C$ diabático irreversible y el proceso $C \rightarrow A$ isotermo reversible. Calcúlese el calor intercambiado por el sistema y el cambio de entropía de éste en cada uno de los procesos, en función de las coordenadas de cada punto. Sol.: (AB): 0 ; 0 ; (BC): 0 ; $(p_A V_A - p_C V_C)/2T_A$; (CA): $-(p_A V_A - p_C V_C)/2$; $(p_C V_C - p_A V_A)/2T_A$

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

28. Un mol de un gas ideal monoatómico a la temperatura de 399 K y 4 bar de presión, se encuentra encerrado en un cilindro de paredes adiabáticas provisto de un pistón no conductor del calor. Determinar la variación de entropía del gas al expandirse bruscamente contra una presión exterior de 1 bar. *Sol.: 4,11 J/K*
29. Un cilindro vertical de paredes adiabáticas y provisto de un pistón no conductor del calor, está dividido por una pared fija y diatérmica. La parte superior contiene 10 moles de un gas ideal y la inferior una mezcla en equilibrio a 1,013 bar de 100 g de agua y 100 g de hielo. Se introduce lentamente el pistón hacia dentro hasta que la presión del gas se duplica. ¿Cuál es la variación de entropía del gas, de la mezcla y del universo en este proceso? *Sol.: -57,63 J/K; 57,63 J/K; 0 J/K.*
30. Un sistema experimenta las siguientes transformaciones reversibles:
- De A a B, isotérmica a 600 K con absorción de 1254 kJ.
 - De B a C, adiabática hasta 100 K.
 - De C a D, isotérmica a 100 K con absorción de 2090 kJ.
 - De D a E, adiabática hasta 400 K.
 - De E a F, isotérmica a 400 K con cesión de 3344 kJ.

Se trata de volver al estado inicial cediendo calor solamente por vía isotérmica a 350 K. ¿Cuál es esta cantidad de calor?. *Sol.: -5120,5 kJ*

31. Un recipiente cilíndrico cerrado, de paredes adiabáticas y 10 litros de volumen, está dividido en dos partes por un pistón interno, también adiabático, que se puede mover sin rozamiento. En cada parte hay la misma cantidad de gas ideal diatómico, estando inicialmente ambos gases a la misma temperatura (27 °C) y presión (71 cm de Hg). La parte izquierda tiene un dispositivo calefactor que permite calentar lentamente su contenido. Se pone éste en funcionamiento, durante un cierto tiempo, y se observa que, como consecuencia de ello, el valor de la presión en el sistema se triplica. Calcúlense: **a)** la temperatura y el volumen, en el estado final, de cada uno de los gases, **b)** la cantidad de calor absorbida por el gas de la izquierda, **c)** el cambio de entropía del sistema total. *Sol.: a) $T_I = 1389,6 \text{ K}$; $T_D = 410,7 \text{ K}$; $V_I = 7,72 \text{ l}$; $V_D = 2,28 \text{ l}$; b) 1131,1 cal; c) 16,5 cal/K*
32. Un mol de gas ideal se expande isotérmicamente, a 27°C, desde 20 a 40 litros en tres procesos diferentes:
- El primero se efectúa, de forma reversible, reduciendo lentamente la presión sobre el pistón hasta que se alcanza el valor final p_{ext} .
 - En el segundo, la presión disminuye bruscamente hasta su valor final p_{ext} .
 - En el tercero, el gas ocupa inicialmente un volumen de 20 litros; repentinamente y por rotura de una fina membrana, se deja que se expanda en el vacío hasta los 40 litros restante.

Calcúlense en cada proceso Q , W , ΔU y ΔS del gas, del foco y del sistema total aislado adiabáticamente (gas+foco).

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

33. En un recinto aislado, se mezclan 2 litros de oxígeno a 1 bar y 0°C y 1 litro de helio a 4 bar y -5°C . El volumen final es de 3 litros. Calcule el cambio de entropía en el proceso. *Suponer gases ideales. Sol.: 1,96 J/K*
34. En cierto experimento, 5 g de helio líquido con temperatura de 0,5 K se ponen en contacto, en un recinto adiabático, con 100 g de sal paramagnética de temperatura T_s , observándose que en equilibrio la temperatura final común es de 0,04 K. Sabiendo que el calor específico del líquido puede expresarse como $c_l = 0,02 \cdot T^3 \text{ Jg}^{-1}\text{K}^{-1}$ y el de la sal como $c_s = 10^{-4} T^{-2} \text{ Jg}^{-1}\text{K}^{-1}$, calcúlense la temperatura inicial de la sal (T_s) y el cambio de entropía del universo. *Sol.: 0,04 K; 0,035 J/K*
35. Un cilindro de paredes adiabáticas, provisto de un pistón también adiabático, está dividido en dos compartimentos, I y II, por una pared fija y diatérmica, conteniendo cada uno de ellos un mol de gas ideal monoatómico. Inicialmente el pistón se fija en una posición tal que $V^I = V^{II}$, siendo $P^I = 5 \text{ bar}$ y $T^I = 300 \text{ K}$. Se suelta el pistón, expansionándose el gas II contra una presión exterior constante de 1 bar. Determine :
a) Los cambios de energía interna, entalpía y entropía de cada uno de los gases de los compartimentos. **b)** El cambio de entropía del universo.
Sol.: $\Delta U_I = \Delta U_{II} = -748,3 \text{ J}$; $\Delta H_I = \Delta H_{II} = -1247,1 \text{ J}$; $\Delta S_I = -2,78 \text{ J/K}$; $\Delta S_{II} = 8,74 \text{ J/K}$; ; $\Delta S_U = 5,96 \text{ J/K}$

FORMALISMO TERMODINÁMICO PARA SISTEMAS CERRADOS

36. Determine la ecuación fundamental, en la representación entrópica, de un gas ideal monoatómico. *Sol.*: $S = S_0 + \frac{3}{2}nR \left(\ln U + \frac{2}{3} \ln V \right)$
37. La ecuación fundamental, en la representación entrópica, de cierto sistema hidrostático viene dada por $S = 3 (AnVU)^{1/3}$, donde A es una constante. Halle la ecuación térmica de estado así como C_v , C_p , α y k_T del sistema. *Sol.*: $p^2V = AnT^3$; $C_v = S/2$; $C_p = 2S$; $\alpha = 27AnV/S^2$; $k_T = 54nAV^2/S^3$
38. La energía interna molar de una sustancia pura viene dada por $u = 3pv/2$ y su ecuación térmica de estado es $p = AvT^4$, siendo A una constante. Determine la ecuación fundamental en la representación entrópica, $s = s(u,v)$, salvo una constante aditiva. *Sol.*: $S = A^{1/4} 2(2/3)^{3/4} U^{3/4} V^{1/2} + cte$

SI ESTÁS LEYENDO ESTO SIGNIFICA QUE ESTÁS ESTUDIANDO, Y ESO SE MERECE UNA RECOMPENSA.

Abrir cuenta en N26



Disfruta 12 meses gratis de la cuenta bancaria premium N26 Smart con el código N26WUOLAH y accede a descuentos en tus marcas favoritas, pagos sin comisiones en cualquier moneda ¡y mucho más!

TIN 0 %, TAE: -1,17 % para un supuesto en el que se mantenga de forma constante durante un año un saldo diario de 5.000 €, aplicando un tipo de interés nominal anual de 0 % y el coste mensual de la cuenta bancaria de 4,90 €/mes. La liquidación de la cuenta se realiza con periodicidad mensual.

REPRESENTACIONES ALTERNATIVAS

39. La ecuación fundamental de cierto gas real, en la representación del potencial de Gibbs, bien dada por la expresión:

$$G = nRT \ln P + P \left(nb - \frac{na}{RT} \right) + F(T)$$

donde a y b son constantes y $F(T)$ es una función exclusiva de la temperatura. Determinése la ecuación de estado de dicho gas y demuéstrese que coincide con la ecuación de Van der Waals si:

- se consideran las constantes a y b como infinitésimos de primer orden y se desprecian los infinitésimos de segundo orden, y
- se supone que para el volumen molar, en los términos correctivos, puede tomarse el correspondiente a un gas ideal.

Sol.: $V/n = RT/p + (b-a/RT)$

40. Utilizando el principio de mínimo para el potencial de Helmholtz, demuéstrese que la condición de equilibrio para el sistema compuesto formado por dos sistemas simples, en contacto con un foco térmico y separados por una pared móvil, adiabática e impermeable, es que las presiones de ambos sistemas simples sean iguales.
41. Sea la función F expresada en función de sus variables naturales T y V . Obtenga la ecuación de estado, la entropía, C_V , C_P , k_T , α y β en función de F y sus derivadas respecto al volumen y la temperatura.

N26 Tu Banco Móvil



ECUACIONES PRÁCTICAS DE LA TERMODINÁMICA

42. Un cilindro contiene 100 g de agua a 15°C. Mediante un pistón se aumenta la presión sobre el agua isotérmica y reversiblemente desde 1 a 100 bar. Determinense ΔU , ΔH , ΔF y ΔG en dicho proceso.

Datos: $\alpha=1,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, $\kappa_T=0,47 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$.

Sol.: -40, 42 J; 949,58 J; 2,35 J; 992,35 J

43. Determinense ΔU , ΔH , ΔF y ΔG en la compresión isoterma reversible, a 25°C, de 0,9 kg de agua desde 1 a 100 atm, sabiendo que en este intervalo de presiones el volumen molar, a 25°C, viene dado por:

$$\bar{v} = 18 - 7,15 \cdot 10^{-4} p + 4,6 \cdot 10^{-7} p^2 \text{ (cm}^3/\text{mol)}$$

y que

$$\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial T}\right)_p = 4,5 \cdot 10^{-3} + 1,4 \cdot 10^{-6} p \text{ (cm}^3/\text{mol K)}$$

donde p se mide en atmósferas.

Sol.: -666,4 J; 8352,1 J; 16,55 J; 9035,1 J

44. Los coeficientes de dilatación térmica y de compresibilidad isoterma de cierto gas real vienen dados por las expresiones

$$\alpha = \frac{(V-b)}{TV} \quad \kappa_T = \frac{(V-b)}{PV}$$

siendo $b=3,64 \cdot 10^{-2} \text{ l/mol}$. Calcúlense los valores de ΔU , ΔH , ΔF y ΔG , cuando manteniendo la temperatura constante en 300 K, se comprime 1 mol de dicho gas desde 1 a 2 bar.

Sol.: 0; 3,64 J; 1728,8 J; 1732,4 J

45. La tensión superficial de una lámina de agua líquida es una función exclusiva de la temperatura:

$$\sigma = 0,145 - 2,5 \cdot 10^{-4} T \text{ (J/m}^2\text{)}$$

- a) Determine la variación de energía interna de la lámina cuando a temperatura constante de 300 K su superficie A aumenta en 100 cm^2 . Sol.: $1,45 \cdot 10^{-3} \text{ J}$
- b) Suponiendo constante la capacidad calorífica, $C_A=4,25 \text{ J/K}$, calcule la variación de temperatura de la lámina, si el aumento de superficie es isoentrópico. Sol.: $-1,76 \cdot 10^{-4} \text{ K}$
- c) ¿Cuál hubiera sido la variación de energía interna en el proceso isoterma a) si la tensión superficial variase en la forma:

$$\sigma = cte \left(\frac{T}{A} \right) ?$$

Sol.: 0

ECUACIONES PRÁCTICAS DE LA TERMODINÁMICA

46. La fuerza recuperadora de una varilla elástica estirada está relacionada con su longitud y temperatura por la expresión $F = c T^2 (L - L_0)$ donde c y L_0 son constantes positivas (L_0 es la longitud de la varilla sin estirar). Para $N = N_0$, la capacidad calorífica de la varilla, medida a longitud constante, es $C_{L_0} = dV$, siendo d una constante. Determine :

- La expresión general de la capacidad calorífica $C_L(L, T)$. Sol.: $C_L = bT - aT(L - L_0)^2$
- El cambio de entropía de la varilla cuando se aumenta su longitud, reversible e isotérmicamente, desde L_0 a $3L_0/2$. Sol.: $\Delta S = -aTL_0^2/4$
- La entropía $S(L, T)$, a cualquier longitud y temperatura, supuesta conocida $S(L_0, T_0)$. Sol.: $S(L, T) = S(L_0, T_0) + b(T - T_0) - a(L - L_0)^2(2T - T_0)$
- La temperatura final T_f , cuando, estando la varilla adiabáticamente aislada y partiendo del estado (L_i, T_i) , se ejerce una tracción reversible hasta que la varilla alcanza una longitud L_f .

47. La capacidad calorífica, a campo magnético constante, de un sólido paramagnético que obedece a la ley de Curie viene dada por

$$C_H = \frac{A + \mu_0 C H^2}{T^2},$$

donde C es la constante de Curie y A otra constante. Determinése:

- El calor transferido en la imanación isotérmica y reversible del sólido, a la temperatura T_1 , desde H_0 hasta H .

$$\text{Sol.: } Q = -\frac{\mu_0 C}{2T_1} (H^2 - H_0^2)$$

- La temperatura final cuando, adiabática y reversiblemente, se desimana el sólido desde H hasta H_0 .

$$\text{Sol.: } T_f = T_i \left(\frac{A + \mu_0 C H_0^2}{A + \mu_0 C H^2} \right)^{1/2}$$

SISTEMAS DE MASA Y COMPOSICIÓN VARIABLE

48. Un recipiente que contiene agua líquida a 25°C y 100 bar se conecta, por medio de una membrana rígida y permeable, a otro recipiente que contiene agua líquida a 25°C y 1 bar. Utilizando el concepto de potencial químico demuestre que, en estas condiciones, el agua fluye desde el recipiente de presión superior al de presión inferior.
49. Demuestre que en un sistema monofásico y multicomponente se verifica la siguiente relación:

$$\alpha dT - \kappa_T dP + \sum_i \bar{V}_i dc_i = 0$$

donde α es el coeficiente de dilatación cúbica, κ_T el de compresibilidad isotérmica y c_i y \bar{V}_i la concentración molar y el volumen molar parcial, respectivamente, del componente i .

50. Pruébese que:

a) $\sum_k n_k \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial n_k} \right)_{T,P,n_j} = 0$, en un sistema formado por una sola fase.

b) $\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T,P} = \frac{U}{V}$, en un sistema monofásico y monocomponente.

Ayuda: Utilícese el teorema de Euler de las funciones homogéneas.

51. ¿Cuántos grados de libertad posee un sistema formado por:
- Una disolución de KCl y NaCl en agua, coexistiendo con cristales de ambas sales.
 - Una disolución de las mismas sales en agua en presencia de hielo, cristales de ambas sales y sus vapores?
- (Sol: a) 2; b) 0)
52. ¿Cuántos grados de libertad posee cada uno de los siguientes sistemas?
- Agua líquida en equilibrio con una mezcla de vapor de agua y gas neón.
 - Una disolución líquida de agua y alcohol en equilibrio con vapores de ambos.
 - Cloruro amónico sólido parcialmente descompuesto en el vacío en ClH y NH₃ gaseosos.
- (Sol: a) 2; b) 2; c) 1)

SI VAS A DEJAR DE ESTUDIAR PARA MIRAR EL MÓVIL, AL MENOS QUE SEA PARA LLEVARTE ALGO.

Disfruta de 12 meses gratis de la cuenta bancaria premium N26 Smart con el código **N26WUOLAH**.
¡Gestiona tu dinero desde el móvil y no vuelvas a pisar una sucursal!

TIN 0 %, TAE: -1,17 % para un supuesto en el que se mantenga de forma constante durante un año un saldo diario de 5.000 €, aplicando un tipo de interés nominal anual de 0 % y el coste mensual de la cuenta bancaria de 4,90 €/mes. La liquidación de la cuenta se realiza con periodicidad mensual.

Abrir cuenta en N26



TEMA 11: TRANSICIONES DE FASE

53. La temperatura de fusión del mercurio a la presión atmosférica es de 234,1 K y la entalpía molar de fusión es 2,34 kJ/mol. Sabiendo que la masa molar del mercurio es 0,2 kg/mol y que las densidades del mercurio sólido y líquido, en el punto de fusión, son 14,19 y 13,69 g/cm³, respectivamente, calcule:

- El cambio de energía interna y de entropía en el proceso de fusión de un mol.
- El cambio en la temperatura de fusión provocado por un aumento de presión de 1 bar.
(Sol: a) 2,34 kJ/mol, 10 J/K mol; b) 0,0052 K)

54. La presión de vapor de los hexafluoruros de uranio (UF₆) sólido y líquido (en mm Hg) está dada por:

$$\log P_S = 10,648 - \frac{2559}{T} \quad \log P_L = 7,540 - \frac{1511}{T}$$

- ¿Bajo qué condiciones pueden estar en equilibrio UF₆ sólido, líquido y gaseoso?
- ¿A qué temperatura puede estar el UF₆ en equilibrio con su vapor a 1 atm? ¿Es sólido o líquido en estas condiciones?
- Determine las entalpías de sublimación, vaporización y fusión para el UF₆.
(Sol: a) 337,24 K, 1,51×10⁵ Pa; b) 329,5 K; c) 48,9 kJ/mol, 28,9 kJ/mol, 20,0 kJ/mol)

55. Calcúlese el punto de ebullición del agua a 2000 m de altura sobre el nivel del mar sabiendo que la entalpía de vaporización del agua es de 2,26 kJ/g, y suponiendo una temperatura media del aire de 17 °C. Considérese que el aire es un gas ideal de masa molar media 29 g/mol. (Sol: 93,6°C)

56. La entalpía de vaporización del agua entre 0 y 100 °C, expresado en J/g, varía con la temperatura según la expresión:

$$\Delta H_v = 3068,12 - 2,17T$$

Calcúlese la presión de vapor del agua a 25°C. (Sol: 3,284×10³ Pa)

57. A bajas temperaturas, la capacidad calorífica de los metales es proporcional a la temperatura. Si el metal pasa al estado superconductor su capacidad calorífica se hace proporcional al cubo de la temperatura. Demuéstrese que a la temperatura crítica $C_s = 3C_n$.

58. Demuéstrese que en una transición de segundo orden, según la clasificación de Ehrenfest, se cumple que:

$$\Delta C_p = -T \left(\frac{dP}{dT} \right)^2 \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

$$\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \left(\frac{dP}{dT} \right) \Delta \left(\frac{dV}{dP} \right)_T$$

N26 Tu Banco Móvil



TEMA 12: TERCER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

59. Demuestre que la capacidad calorífica a volumen constante, C_V , de un sólido cuya ecuación de estado es $PV = aU + b(V)$, donde a es una constante, U la energía interna y $b(V)$ es función únicamente del volumen V , tiende a cero cuando la temperatura tiende a cero.
60. Constrúyase en un diagrama TS un ciclo de Carnot con un foco a la temperatura T_1 y otro a la temperatura $T_2 = 0$ K. ¿Qué contradicción resulta al aplicar la ecuación $\oint_R \frac{\delta Q}{T} = 0$ a dicho ciclo?
61. ¿Es válida la relación de Mayer para un gas ideal en el cero absoluto? Razone la respuesta.
62. Se propone que la capacidad calorífica, C , de un sólido puro a bajas temperaturas cumpla, hasta su límite inferior, la ecuación de estado:

$$C(T, P) = a + bT - \frac{kP}{T}$$

donde a , b y k son constantes, P es la presión y T la temperatura. ¿Es compatible esa expresión con el Tercer Principio de la Termodinámica?

Ejercicios Termodinámica

Tema 2 (T1 no tiene ejercicios, aparte PPT)

- ① Sistema A (H, M) $A \leftrightarrow C : nRcH - MPV = 0$
 Sistema B (H', M') $B \leftrightarrow C : M'PV - nR(c'H' + aM') = 0$
 Sistema C (P, V)
- $n, R, a, c, c' : \text{cte}$

a) $nRcH = MPV$ $M'PV = nR(c'H' + aM')$
 $\frac{nRcH}{M} = PV$ $PV = nR\left(\frac{c'H'}{M'} + a\right)$

$PV = \frac{nRcH}{M} = nR\left(\frac{c'H'}{M'} + a\right)$

b) $A \leftrightarrow B$
 $\frac{nRcH}{M} = nR\left(\frac{c'H'}{M'} + a\right) \Rightarrow \frac{cH}{M} = \frac{c'H'}{M'} + a$

	PFestón	Punto Triple Agua
② A Termómetro Platina : $18,56 \Omega$	$18,56 \Omega$	$9,83 \Omega$
③ Termómetro H ₂ (Vide) : 7270 bar	7270 bar	$6,80 \text{ bar}$
④ Gas en bulbo : $7,85 \text{ bar}$	$7,85 \text{ bar}$	$7,00 \text{ bar}$
⑤ Termómetro Cu-Ni : $9,07 \text{ mV}$	$9,07 \text{ mV}$	$2,98 \text{ mV}$

$$T_F = 273,15 \cdot \left(\frac{x_F}{x_{PT}}\right)$$

A : $515,75 \text{ K}$
 B : $510,17 \text{ K}$
 C : $505,35 \text{ K}$
 D : $826,87 \text{ K}$

$$\textcircled{3} \quad T(\theta_1) = 273,16 \cdot \left(\frac{PV_1}{(PV)_{PT}} \right)$$

$$\frac{T(\theta_1)}{T(\theta_2)} = \frac{(PV)_1}{(PV)_2} = \boxed{0,85}$$

$$T(\theta_2) = 273,16 \cdot \left(\frac{PV_2}{(PV)_{PT}} \right)$$

$$T_{PT} = T(\theta_1) = 273,16 \cdot \frac{(PV)_{PT}}{(PV)_{PT}} = 273,16 \text{ K} \Rightarrow T(\theta_2) = (0,85)^{-1} T(\theta_1) = \boxed{321,30 \text{ K}}$$

$\textcircled{4}$ $C_i = \text{Cantidad } A^i$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
PT: P_{PT}	100000	80000	60000	20000	10000
B: P	1296,92	1085,86	648,17	259,20	129,66

$$T(C_i) = 273,16 \cdot \left(\frac{P}{P_{PT}} \right)$$

$$T(C_1) = 354,02 \text{ K}$$

$$T(C_2) = 354,07 \text{ K}$$

$$T(C_3) = 354,08 \text{ K}$$

$$T(C_4) = 354,15 \text{ K}$$

$$T(C_5) = 354,18 \text{ K}$$

$$\boxed{T(S) = 354,10 \text{ K}}$$

Ejercicios Termodinámica

Tema 5 | Tema 6

⑤ 8,450 g agua + Parafina = 0°C

↓ se congela

0°C ~~densidad~~

Se expulsan 0,520g parafina

$\rho_{\text{parafina}} = 0,800 \text{ g/cm}^3$ a 20°C

Coefficiente dilatación: $9,0 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} = \alpha$

$\rho_{\text{agua}} = 1 \text{ g/cm}^3$

Parafina:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \Rightarrow \alpha \Delta T = \frac{\Delta V}{V} \quad \ln V = \alpha T + h(P)$$

$$V = f(P) e^{\alpha T}$$

$$\rho_{\text{parafina}}(T) = \frac{m_P}{V} = \frac{m}{f(P)} e^{-\alpha T} \quad T = 20^\circ\text{C} = 293\text{K} \Rightarrow f(P) = \frac{m e^{-\alpha \cdot 293}}{\rho_{\text{parafina}}(293\text{K})}$$

$$\rho_{\text{parafina}}(T) = \frac{m e^{-\alpha T}}{\frac{m e^{-\alpha \cdot 293}}{\rho_{\text{parafina}}(293\text{K})}} = \rho_{\text{parafina}}(293\text{K}) e^{\alpha(293 - T)}$$

$$\rho_{\text{parafina}}(273\text{K}) = \rho_{\text{parafina}}(293\text{K}) e^{\alpha(293 - 273)} = 0,814 \text{ g/cm}^3$$

$$\text{Vol}_{\text{parafina}} = \frac{m_{\text{parafina}}}{\rho_{\text{parafina}}(273\text{K})} = 0,761 \text{ cm}^3 = \frac{\Delta V}{\rho_{\text{hielo}} - \rho_{\text{agua}}} = m_{\text{agua}} \left(\frac{1}{\rho_{\text{hielo}}} - \frac{1}{\rho_{\text{agua}}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{hielo}} = \frac{1}{\frac{\Delta V}{m} + \frac{1}{\rho_{\text{agua}}}} = \boxed{0,917 \text{ g/cm}^3}$$

$$\textcircled{6} \quad \alpha = \frac{3aT^3}{V} \quad k_T = \frac{b}{V} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \Rightarrow \frac{3aT^3}{V} \delta T = \frac{\delta V}{V} \Rightarrow 3aT^3 \delta T = \delta V$$

$$\frac{3a}{4} T^4 = V + h(P) \quad \textcircled{1}$$

$$k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \Rightarrow \frac{b}{V} \delta P = -\frac{\delta V}{V} \Rightarrow b \delta P = -\delta V$$

$$bP = -V + g(T) \quad \textcircled{2}$$

~~$$bP = -V + g(T)$$~~

Ecuación de estado

$$\textcircled{1} \quad V = \frac{3aT^4}{4} - h(P) \quad h(P) = bP$$

$$\textcircled{2} \quad V = g(T) - bP$$

$$g(T) = \frac{3aT^4}{4}$$

$$V = \frac{3aT^4}{4} - bP + \text{cte}$$

$$\textcircled{7} \quad \alpha = 5 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$$

$$k_T = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{Pa}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$P_1 = 10^5 \text{Pa}$$

$$T_1 = 20^\circ\text{C} = 293 \text{K}$$

$$k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

$$a) \quad \alpha \delta T = \frac{\delta V}{V} \Rightarrow \ln V = \alpha T + h(P) \Rightarrow V = f(P) e^{\alpha T}$$

$$\Rightarrow V = C e^{\alpha T - k_T P} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$k_T \delta P = -\frac{\delta V}{V} \Rightarrow \ln V = -k_T P + g(T) \Rightarrow V = \tilde{f}(T) e^{-k_T P}$$

Al cubrirlo con una capa gruesa y ajustada que prácticamente no se dilata, el volumen permanece constante. $T_2 = 32^\circ\text{C} = 305 \text{K}$

$$\alpha T - k_T P = \text{cte}$$

$$\alpha T_1 - k_T P_1 = \alpha T_2 - k_T P_2 \quad P_2 = \frac{\alpha}{k_T} (T_2 - T_1) + P_1 = 5,01 \cdot 10^7 \text{Pa}$$

$$b) \quad T_2 = \frac{k_T}{\alpha} (P_2 - P_1) + T_1 = 327,78 \text{K} \quad (P_2 = 1,7 \cdot 10^8 \text{Pa})$$

$$\boxed{48,78^\circ\text{C}}$$

8) $S = 0,0085 \text{ cm}^2$ c) $\alpha \Delta T = \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \ln L = \alpha T + h(F) \Rightarrow L = g(F) e^{\alpha T}$

$F_1 = 20 \text{ N}$

$T_1 = 20^\circ \text{C} = 293 \text{ K}$

$d = 1,2 \text{ m}$

$\alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_F$

$\frac{\partial L}{L} = \frac{\partial F}{A Y} \Rightarrow \ln L = \frac{F}{A Y} + g(T)$

$L = \tilde{g}(T) e^{\frac{F}{A Y}} \Rightarrow$

Hilo rectilíneo

$\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$

$\Rightarrow L = C e^{\alpha T + \frac{F}{A Y}} \quad C \in \mathbb{R}$

$Y = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ a) Por ser los soportes rígidos, $L = \text{cte}$ $L_1 = L_2$

$\begin{pmatrix} V \Rightarrow L \\ -P \Rightarrow F \\ T \Rightarrow T \end{pmatrix}$

$\alpha T_1 + \frac{F_1}{A Y} = \alpha T_2 + \frac{F_2}{A Y}$

$F_2 = A Y \alpha (T_1 - T_2) + F_1 = \boxed{50,6 \text{ N}}$

$T_2 = 28^\circ \text{C} = 281 \text{ K}$

b) $T = \text{cte}$

$L_2 - C e^{\alpha T + \frac{F_2}{A Y}} = L_3 - C e^{\alpha T + \frac{F_3}{A Y}}$

$L_3 = 1,19988$

$\ln(L_2) - \alpha T - \frac{F_2}{A Y} = \ln(L_3) - \alpha T - \frac{F_3}{A Y}$

$F_3 = A Y \ln\left(\frac{L_3}{L_2}\right) + F_2 = \boxed{33,6 \text{ N}}$

9) $F = k T \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L^2}{L^2} \right) \quad k \in \mathbb{R}$

a) $\alpha = \frac{1}{L} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_F \quad \frac{F}{k T} = \frac{L}{L_0} - \frac{L^2}{L^2} = \frac{L^3 - L_0^3}{L_0 L^2} \Rightarrow F L_0 L^2 = k T (L^3 - L_0^3)$

$\left(\frac{\partial F L_0 L^2}{\partial T} \right) = \left(\frac{\partial k T (L^3 - L_0^3)}{\partial T} \right) \Rightarrow 2 F L_0 L \frac{\partial L}{\partial T} = k (L^3 - L_0^3) + k T \cdot L^2 \frac{\partial L}{\partial T}$

$$9) a) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial T} (2Fl_0L - 3kTL^2) = k(L^3 - l_0^3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial T} = \frac{k(L^3 - l_0^3)}{2Fl_0L - 3kTL^2}$$

$$\alpha_L = \frac{k(L^3 - l_0^3)}{2Fl_0L^2 - 3kTL^3} = \frac{k(L^3 - l_0^3)}{2kT(L^3 - l_0^3) - 3kTL^3} = \frac{L^3 - l_0^3}{-TL^3 - 2Tl_0^3} = \boxed{-\frac{L^3 - l_0^3}{T(L^3 + 2l_0^3)}} =$$

$$= -\frac{\frac{l_0L^5 - l_0^4L^2}{l_0L^2}}{T\frac{l_0L^5 + 2l_0^4L^2}{l_0L^2}} = -\frac{\frac{l_0L^3 - l_0^3L^2}{l_0 - \frac{l_0^3}{L^2}}}{T\left(\frac{l_0L^3}{l_0} + \frac{2l_0^3L^2}{L^2}\right)} = \boxed{-\frac{\left(\frac{L}{l_0} - \frac{l_0^2}{L^2}\right)}{T\left(\frac{L}{l_0} + \frac{2l_0^2}{L^2}\right)}}$$

$$b) Y = \frac{L}{A} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)_T$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial kT \frac{L}{l_0}}{\partial L} - \frac{\partial kT \frac{l_0^2}{L^2}}{\partial L} = \frac{kT}{l_0} + 2kT \cdot \frac{l_0^2}{L^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \frac{L}{A} \left(\frac{kT}{l_0} + \frac{2kTl_0^2}{L^3} \right) = \frac{kTL}{Al_0} + \frac{2kTl_0^2}{AL^2} = \frac{kT}{A} \left(\frac{L}{l_0} + \frac{2l_0^2}{L^2} \right)$$

$$F=0 \rightarrow \frac{L}{l_0} = \frac{l_0^2}{L^2} \Rightarrow l_0^3 = L^3 \Rightarrow L = l_0 \Rightarrow \boxed{Y = \frac{3kT}{A}}$$

SI VAS A DEJAR DE ESTUDIAR PARA MIRAR EL MÓVIL, AL MENOS QUE SEA PARA LLEVARTE ALGO.

Abrir cuenta en N26



Disfruta de 12 meses gratis de la cuenta bancaria premium N26 Smart con el código **N26WUOLAH**.
¡Gestiona tu dinero desde el móvil y no vuelvas a pisar una sucursal!

TIN 0%, TAE: -1,17% para un supuesto en el que se mantenga de forma constante durante un año un saldo diario de 5.000 €, aplicando un tipo de interés nominal anual de 0% y el coste mensual de la cuenta bancaria de 4,90 €/mes. La liquidación de la cuenta se realiza con periodicidad mensual.

Ejercicios Termodinámica

Tema 3

90) Expansión isoterma $n=1$ 1 mol gas ideal $PV=nRT$ $T=300K$ $R=0,082 \frac{Latm}{Kmol} = 0,083 \frac{kJ}{Kmol}$

a) $P_1=10 \text{ bar}$ $P_{ext}=1 \text{ bar}$
 $P_2=1 \text{ bar}$

$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
 $1L = 10^{-3} \text{ m}^3$

$8,314 \frac{m^3 Pa}{Kmol}$

Proceso no estático

$V_1 = \frac{nRT}{P_1} = 2,49L$

$\delta W = -P_{ext} \cdot dV$

$W = -P_{ext}(V_2 - V_1) = \boxed{-2241 J}$

$V_2 = \frac{nRT}{P_2} = 24,9L$

b) 2 etapas

$P_1=10 \text{ bar}$ $P_{ext1}=5 \text{ bar}$
 $P_2=5 \text{ bar}$ $P_{ext}=1 \text{ bar}$
 $P_3=1 \text{ bar}$

$V_1 = 2,49 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$V_2 = 4,99 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$V_3 = 2,49 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$

$\delta W = -P_{ext1} dV_1 - P_{ext2} dV_2$

$W = -P_{ext1}(V_2 - V_1) - P_{ext2}(V_3 - V_2)$

$\boxed{-3241 J}$

c) 3 etapas

$P_1=10 \text{ bar}$ $P_{ext1}=5 \text{ bar}$
 $P_2=5 \text{ bar}$ $P_{ext2}=2 \text{ bar}$
 $P_3=2 \text{ bar}$ $P_{ext3}=1 \text{ bar}$
 $P_4=1 \text{ bar}$

$V_1 = 2,49 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$V_2 = 4,99 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$V_3 = 7,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$V_4 = 2,49 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$

$W = \sum_{i=1}^3 -P_{exti}(V_{i+1} - V_i)$

$\boxed{-3992 J}$

d) 9 etapas

$V_1 = 2,49 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ $V_8 = 8,31 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$V_2 = 2,77 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ $V_9 = 7,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$V_3 = 3,12 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ $V_{10} = 2,49 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$

$V_4 = 3,56 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$V_5 = 4,16 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$V_6 = 4,99 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$V_7 = 6,24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$W = \sum_{i=1}^9 -P_{exti}(V_{i+1} - V_i) = \boxed{-4874 J}$

$P_{exti} = P_{i+1}$

$P_i = 11-i$

N26 Tu Banco Móvil



Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

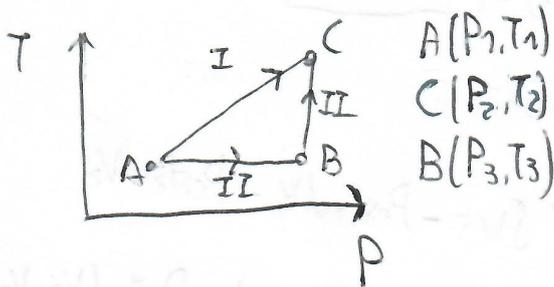
10 e) $P = \frac{nRT}{V}$

$\int W = -P \cdot dV$

$W = - \int_{V_0}^{V_f} P dV = -nRT \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V} = -nRT \cdot \ln \left(\frac{V_f}{V_0} \right) = \boxed{-5743 J}$

$W: e) < d) < c) < b) < a)$

11) 1 mol Gas ideal A → C
 $n=1$ $PV=nRT$ Cuasiestático



I: Cuasiestático
 $\int W = -P dV \Rightarrow W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \cdot \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$

$PV = nRT$ $V_1 = \frac{nRT_1}{P_1}$ $W = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV$
 $T = \frac{PV}{nR}$ $V_2 = \frac{nRT_2}{P_2}$

$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP = \frac{nR}{P} dT$

I: Recta AC

$T_2 = aP_2 + b$ $T_2 - T_1 = a(P_2 - P_1) \Rightarrow a = \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1}$
 $T_1 = aP_1 + b$ $T_2 = \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} P_1 + b \Rightarrow b = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} P_1$

Recta: $T = \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} P + T_2 - \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} P_1 = \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} (P - P_1) + T_2$

$PV = nRT$

$PV = nR \left(\frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} (P - P_1) + T_2 \right)$

$V = \frac{nR}{P} \left(\frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} (P - P_1) + T_2 \right)$

$V_1 = nR \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} - \frac{nR}{P} \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} + \frac{nRT_2}{P}$

$V = \frac{nR}{P} \left(T_2 - \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} \right) + nR \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1}$

$$(11) \quad V = \frac{Rn}{P} \left(T_2 - \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} \right) + nR \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1}$$

$$dV = -Rn \left(T_2 - \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} \right) \frac{dP}{P^2}$$

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = + \int_{P_1}^{P_2} P Rn \left(T_2 - \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} \right) \frac{dP}{P^2} = Rn \left(T_2 - \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} \right) \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} =$$

$$= \boxed{Rn \left(T_2 - \frac{T_2 - T_1}{P_2 - P_1} \right) \cdot \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)} \quad W_I$$

II:

II₁: $T_1 = a'P_1 + b' \quad 0 = a'(P_2 - P_1) \Rightarrow a' = 0$
 Isoterma $T_1 = a'P_2 + b' \quad b' = T_1$

$$T = T_1$$

$$PV = nRT \quad V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow dV = -\frac{nRT}{P^2} dP$$

$$W_{II_1} = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{P_1}^{P_2} P \cdot \frac{nRT_1}{P^2} dP \Rightarrow W_{II_1} = nRT_1 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

II₂: $T_1 = a''P_2 + b'' \quad P = P_2 \quad PV = nRT$
 Isobara $T_2 = a''P_2 + b'' \quad V = \frac{nRT}{P}$
 No recta (función) $dV = \frac{nR}{P} dT$

$$W_{II_2} = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = -P \cdot \int_{T_1}^{T_2} \frac{nR}{P} dT \Rightarrow W_{II_2} = nR(T_1 - T_2)$$

$$W_{II} = W_{II_1} + W_{II_2} = \boxed{nR \left[T_1 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) + (T_1 - T_2) \right]} \quad W_{II}$$

- 92) Sólido paramagnético ideal
 Imagnación m (Adquirida cuasiestáticamente)
 Volumen V
 $T = T_0 e^{km^2}$ $k = \text{cte}$

$$W = - \int_{m_1}^{m_2} \mu_0 V H dm$$

Ley de Curie
 $T = \frac{CH}{m}$

$$T = T_0 e^{km^2}$$

$$\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = km^2 \Rightarrow \frac{dT}{T} = 2k m dm$$

$$\frac{1}{k} \frac{dT}{T} = 2m dm$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{T} dm = \frac{1}{k} \frac{dT}{T} \Rightarrow 2CH dm = \frac{dT}{k}$$

$$dm = \frac{dT}{2CHk}$$

$$W = - \int_{m_1}^{m_2} \mu_0 V H dm = - \int_{T_0}^T \mu_0 V H \frac{dT}{2CHk} = \boxed{- \frac{\mu_0 V}{2CHk} (T - T_0)}$$

93) 1 mol
 $\gamma = 1$

Equation van der Waals

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right) (V - nb) = nRT$$

$n = 1$

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right) (V - b) = RT$$

a) Reversible isoterma

$$P + \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V-b} \Rightarrow P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV = - \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV = - \left[RT \cdot \ln\left(\frac{V_2-b}{V_1-b}\right) + a \cdot \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) \right] =$$

$$= \boxed{a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) - RT \ln\left(\frac{V_2-b}{V_1-b}\right)}$$

INSIDE

LLEGO EL DÍA ¿TE VAS A RESISTIR?

13) b) Irreversible en Pcte

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P_{ext} dV = \boxed{- P_{ext} (V_2 - V_1)}$$

Si gases ideales

a) $\boxed{W = - RT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}$

b) $\boxed{- P_{ext} (V_2 - V_1)}$

44)

1 mol de agua

Reversible

$T_{cte} = 20,0^\circ C$

$P_1 = 1 \text{ bar}$

$P_2 = 100 \text{ bar}$

$k_T = 45,30 \cdot 10^{-6} \text{ bar}^{-1}$

$\rho = 0,9982 \text{ g/cm}^3$

$$k_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

1 mol agua $\Rightarrow 18 \text{ g}$ agua $\Rightarrow V_i = \frac{m}{\rho} = 18,03 \text{ cm}^3 = 18,03 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$

$m_A = 18 \text{ g}$

$$k_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \Rightarrow k_T \partial P = - \frac{\partial V}{V} \Rightarrow k_T P = - \ln V + K \Rightarrow V = K e^{-k_T P} \Rightarrow K = V e^{k_T P}$$

$$\boxed{K = V e^{k_T P}}$$

$$K = V_i e^{k_T P_1} = V_f e^{k_T P_2} \Rightarrow V_f = V_i e^{k_T (P_2 - P_1)}$$

$$= 1,795 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$\Downarrow$$

$$K = 1,803 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$K = V e^{k_T P} \Rightarrow 0 = e^{k_T P} dV + V k_T e^{k_T P} dP \Rightarrow dV = - V k_T dP = \frac{-K}{e^{k_T P}} k_T dP$$

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = + \int_{P_1}^{P_2} P \frac{K}{e^{k_T P}} k_T dP = K k_T \int_{P_1}^{P_2} \frac{P}{e^{k_T P}} dP = K k_T \int_{P_1}^{P_2} P e^{-k_T P} dP$$

$$= K k_T \left[- \frac{P e^{-k_T P}}{k_T} + \frac{1}{k_T} \int e^{-k_T P} dP \right] = K \left[- P e^{-k_T P} - \frac{e^{-k_T P}}{k_T} \right]_{P_1}^{P_2}$$

1.4) 1 mol agua

Reversible

$T_{de} = 20^\circ C$

$$k_T = 45,30 \cdot 10^6 \text{ bar}^{-1}$$
$$\rho = 0,9982 \text{ g/cm}^3$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_1 = 1 \text{ bar} \quad P_2 = 100 \text{ bar}$$

$$k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \Rightarrow k_T \Delta P = -\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \ln V = -k_T P + k$$
$$V = k e^{-k_T P} \quad k \in \mathbb{R}$$

~~$k = V_i e^{k_T P_i}$~~ 1 mol agua \Rightarrow 18 g agua \Rightarrow 18,03 cm³ agua = $18,03 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$

$$k = V_i e^{k_T P_i} = 1,803 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$
$$dV = -k k_T e^{-k_T P} dP$$

$$\delta W = -P dV \Rightarrow W = -\int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{P_1}^{P_2} P k k_T e^{-k_T P} dP = \left[\begin{array}{l} U = P \quad dV = dP \\ dV = k_T e^{-k_T P} \quad V = -e^{-k_T P} \end{array} \right]$$

$$= k \cdot \left[-P e^{-k_T P} + \int e^{-k_T P} dP \right]_{P_1}^{P_2} = k \left[-P e^{-k_T P} - \frac{e^{-k_T P}}{k_T} \right]_{P_1}^{P_2} = \boxed{0,407 \text{ J}}$$

1.5) Dielectrico

$$P = \epsilon_0 (23,8 - 4,76 \cdot 10^{-7} E) E$$

$$P = \frac{P}{V} \quad (\text{C/m}^2)$$

$$E_1 = 0 \text{ V/m}$$

$$E = \text{Compo electrico (V/m)} \quad E_2 = 10^4 \text{ V/m}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

$$W = -\int_{P_1}^{P_2} E dP \quad dP = \epsilon_0 [23,8 - 8,32 \cdot 10^{-7} E] dE$$

$$W = -\int_{P_1}^{P_2} E dP = -\int_{E_1}^{E_2} \epsilon_0 [23,8 - 8,32 \cdot 10^{-7} E] E dE = -\epsilon_0 \cdot \left[(23,8 E - 8,32 \cdot 10^{-7} E^2) dE \right] =$$

$$= -\epsilon_0 \cdot \left[\frac{23,8}{2} E^2 - \frac{8,32 \cdot 10^{-7}}{3} E^3 \right]_{E_1}^{E_2} = \boxed{8,08 \cdot 10^{-3} \text{ J/m}^3}$$

Ejercicios Termodinámica

Tema 4 Tema 5 Tema 6 Tema 7

16) 1 mol agua 24°C 1,013 bar
 ||
 18g agua 100°C 1,013 bar

γ : Coeficiente dilatación cúbica

$$\gamma = 4 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

$$\rho = 1 \text{ g/cm}^3 \quad C_p = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J/kg K}$$

$$\Delta U = m C_p \Delta T = \boxed{5378,2 \text{ J}}$$

17) Recipiente 15 m³ = V₁
 Radiación electromagnética (Gas de fotones)

$$T = 300 \text{ K}$$

$$P = \frac{a T^4}{3}$$

$$U = a V T^4$$

$$a = 7,56 \cdot 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

a) Proceso isoterma $T = \text{cte}$
 $V_2 = 2V_1$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = a T^4 (V_2 - V_1) = a T^4 V_1$$

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = - P \cdot (V_2 - V_1) = - \frac{a T^4}{3} V_1$$

$$\Delta U = W + Q \Rightarrow Q = \Delta U - W = a T^4 V_1 + \frac{a T^4}{3} V_1 = \frac{4}{3} a T^4 V_1 = \boxed{1,72 \cdot 10^4 \text{ J}}$$

b) Procesos adiabáticos reversibles

$$P = \frac{a T^4}{3} \quad U = a V T^4 \quad \text{Adiabático} \quad Q = 0 \Rightarrow \Delta U = W$$

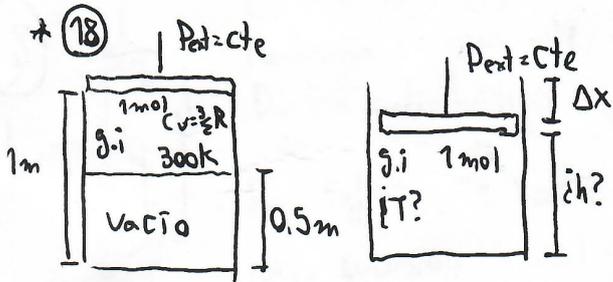
$$\Delta U = a T^4 (V_2 - V_1) = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{a T^4}{3} dV = a T^4 V_1$$

$$dU = \delta W \Rightarrow a T^4 dV + 4 a V T^3 dT = - P dV \Rightarrow a T^4 dV + 4 a V T^3 dT = - \frac{a T^4}{3} dV \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T dV + 4 V dT = - \frac{1}{3} dV \Rightarrow \frac{4}{3} T dV + 4 V dT = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \frac{dV}{V} = - \frac{dT}{T} \Rightarrow$$

17) $\Rightarrow \frac{1}{3} \ln V = -\ln T + C \Rightarrow \ln V^{1/3} = -\ln T + C \Rightarrow \ln(V^{1/3}T) = C$
 $T V^{1/3} = C$

$P = \frac{\alpha T^4}{3} \Rightarrow T^4 = \frac{3P}{\alpha} \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{3P}{\alpha}} V^{1/3} = C \Rightarrow \frac{3P}{\alpha} V^{1/3} = C \Rightarrow \boxed{PV^{4/3} = C}$ cte



El gas se expande sin realizar trabajo
 No hay intercambio de calor (Proceso adiabático)

1º Principio $\Delta U = \overset{0}{Q} + W = W_{mec} \Rightarrow nC_v(T_f - T_i) = P_{ext} \cdot A \cdot \Delta x$

$\Delta U = nC_v(T_f - T_i)$

$W_{mec} = P_{ext} \cdot A \cdot \Delta x$

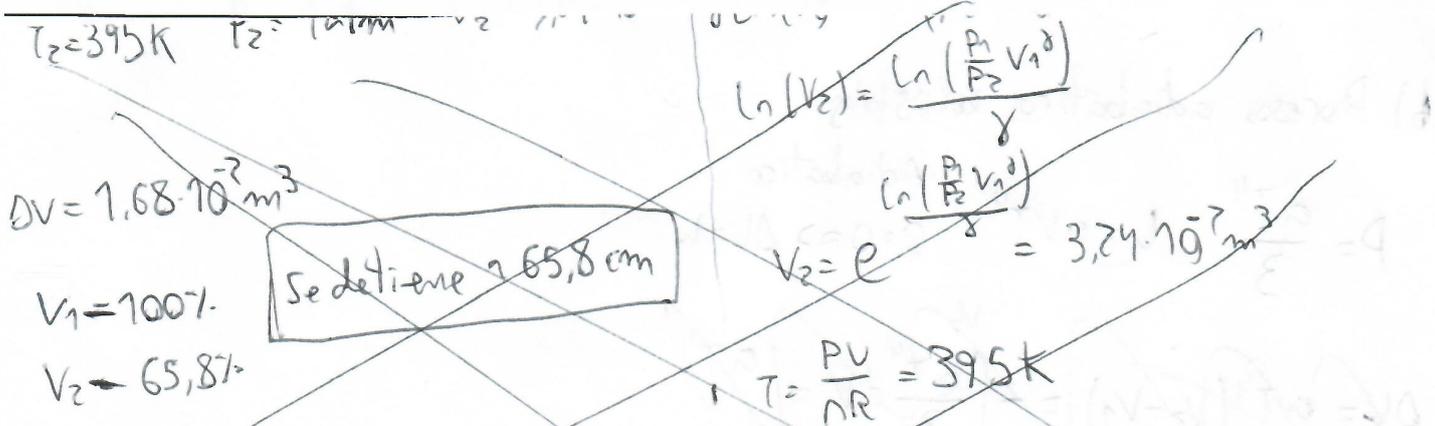
$nC_v((P_{ext} \cdot (1 - \Delta x) \cdot A/R) - (P_{ext} \cdot 0.5 \cdot A/R)) = P_{ext} \cdot A \cdot \Delta x$

$\Delta x = 0.3m \Rightarrow \boxed{h = 0.7m}$

$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f} \Rightarrow P_{ext} \cdot A \cdot 0.5 / T_i = P_{ext} \cdot A \cdot (1 - \Delta x) / T_f$

$T_f = 420K$

$W = \Delta U = nC_v(T_f - T_i) = \boxed{1496.5J}$



19) \Rightarrow 1)

$W_{01} = -P_{ext} \cdot (V_1 - V_0) = -P_{ext} \cdot V_0$ (Expansión vacío)

2) \Rightarrow 2) $W_{12} = \Delta U = \frac{3}{2} nR \cdot (T_2 - T_1) = \boxed{918.5J}$

SI ESTÁS LEYENDO ESTO SIGNIFICA QUE ESTÁS ESTUDIANDO, Y ESO SE MERECE UNA RECOMPENSA.

Abrir cuenta en N26



Disfruta 12 meses gratis de la cuenta bancaria premium N26 Smart con el código N26WUOLAH y accede a descuentos en tus marcas favoritas, pagos sin comisiones en cualquier moneda ¡y mucho más!

TIN 0%, TAE: -1,17% para un supuesto en el que se mantenga de forma constante durante un año un saldo diario de 5.000 €, aplicando un tipo de interés nominal anual de 0% y el coste mensual de la cuenta bancaria de 4,90 €/mes. La liquidación de la cuenta se realiza con periodicidad mensual.

19) 1 mol gas ideal biatómico $P_i = 10 \text{ bar} \Leftrightarrow P_f = 1 \text{ bar}$
 $n = 1$ $PV = nRT$ $C_V = \frac{5}{2} nR$ $V_i = 10 \text{ L}$
 $C_P = \frac{7}{2} nR$ $T_i = 1203 \text{ K}$

a) $V = \text{cte} \Rightarrow V_i = V_f$

$W = 0$ ($dV = 0$)

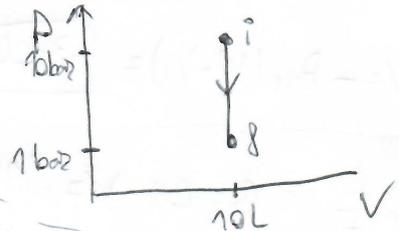
$\Delta U = \frac{5}{2} nR (T_f - T_i) = \frac{5}{2} nR \left(\frac{P_f V_f}{nR} - T_i \right) = -2,25 \cdot 10^4 \text{ J}$

$Q = \Delta U = -2,25 \cdot 10^4 \text{ J}$ $\Delta H = \frac{7}{2} nR (T_f - T_i) = -3,15 \cdot 10^4 \text{ J}$

b) $T = \text{cte}$ $T_i = T_f$

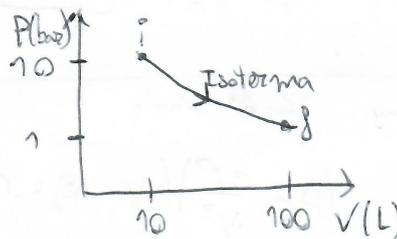
$\Delta U = 0$

$\Delta H = 0$



$W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = -nRT_f \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = -nRT_f \ln \left(\frac{nRT_f}{P_f V_i} \right) = -2,30 \cdot 10^4 \text{ J}$

$Q = -W = 2,30 \cdot 10^4 \text{ J}$

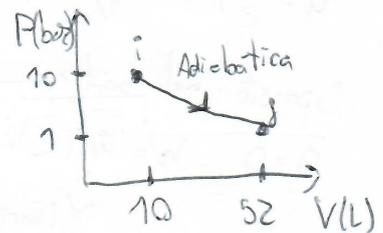


c) Adiabática

$Q = 0$ $\gamma = \frac{7}{5}$

$\ln \left(\frac{P_i}{P_f} \frac{V_i^\gamma}{V_f^\gamma} \right) = 0 \Rightarrow V_f = 51,8 \text{ L}$

$P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma \Rightarrow V_f = e^{\frac{\ln \left(\frac{P_i}{P_f} \frac{V_i^\gamma}{V_f^\gamma} \right)}{\gamma}} = 51,8 \text{ L}$
 $T_f = \frac{P_f V_f}{nR} = 623 \text{ K}$



$\Delta U = \frac{5}{2} nR (T_f - T_i) = -1,71 \cdot 10^4 \text{ J}$ $\Delta H = \frac{7}{2} nR (T_f - T_i) = -2,39 \cdot 10^4 \text{ J}$

$W = \Delta U = -1,71 \cdot 10^4 \text{ J}$

WUOLAH

N26 Tu Banco Móvil



20) Gas ideal
 $PV = nRT$
 biatómico
 $C_v = \frac{5}{2} nR$
 $C_p = \frac{7}{2} nR$

Cilindro paredes adiabáticas
 Caliente $P_{cte} = 2 \text{ bars}$

$V_f = 42 \text{ L}$ En 6 min
 $V_i = 25 \text{ L}$

~~$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_f - V_i}{t} = \frac{42 - 25}{6}$~~

a) $\Delta U = C_v (T_f - T_i) = \frac{5}{2} nR \cdot \left(\frac{P_f V_f}{nR} - \frac{P_i V_i}{nR} \right) = \frac{5}{2} (P_f V_f - P_i V_i) = \frac{5}{2} P_{cte} (V_f - V_i)$
8500 J

b) $W = -P_{cte} (V_f - V_i) = \text{-3400 J}$

c) $I = \frac{q}{t}$ $Q = \Delta U - W = 11900 \text{ J}$

$P = I \cdot V \Rightarrow Q = IVt = Q = I^2 R t$

$V = IR$

$I = \sqrt{\frac{Q}{Rt}} = \text{0,57 A}$

21) Gas monoatómico
 $C_v = \frac{3}{2} nR$
 $C_p = \frac{5}{2} nR$

Van der Waals

$\left(P + \frac{a n^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$

$U = \frac{3}{2} RT - \frac{a}{V_m}$

Expansión adiabática al vacío

$Q = 0$ $W = P_{ext} \Delta V = 0$ $\Delta U = Q + W = 0$
 \Downarrow
 0 (Vacío) $\Delta U = 0$

$\Delta U = 0$ $U_1 = U_2$

$\frac{3}{2} RT_1 - \frac{a}{V_{1m}} = \frac{3}{2} RT_2 - \frac{a}{V_{2m}}$

$\frac{3}{2} R (T_1 - T_2) = a \left(\frac{1}{V_{1m}} - \frac{1}{V_{2m}} \right)$

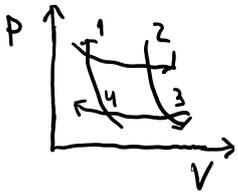
$V_{2m} > V_{1m}$
 \Downarrow
 $T_1 > T_2$ El gas se enfría

Ejercicios Termodinámica

Tema 8 Tema 9 Tema 10

22) $n=1$ gas ideal monoatómico
 $PV=nRT$ $C_v = \frac{3}{2} nR$

Ciclo Carnot reversible $C_p = \frac{5}{2} nR$



$V_1 = 20L$ $V_2 = 40L$
 $T_1 = 300K$ $T_3 = 200K$

	1	2	3	4
P	124710 Pa	62355 Pa	22626 Pa	45259 Pa
V	20L	40L	73,49L	36,74L
T	300K	300K	200K	200K

1 → 2 Isoterma
 $T_2 = T_1$

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$\Delta P = -0,62 \text{ bar}$$

$$\Delta V = 20L$$

$$\Delta T = 0K$$

$$\Delta U = C_v \Delta T = 0J$$

$$\Delta H = C_p \Delta T = 0J$$

$$\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 5,76 \text{ J/K}$$

$$ds = \frac{\delta Q_{rev}}{T} = -\frac{\delta W}{T} = \frac{PdV}{T}$$

$$= nR \frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta S = nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

2 → 3 Adiabática

$$\delta Q = 0$$

$$\Delta U = C_v \Delta T = \frac{3}{2} nR (T_3 - T_2) \quad \Delta U = \Delta W$$

$$\Delta P = -0,40 \text{ bar}$$

$$\Delta V = 33,49L$$

$$\Delta T = -100K$$

$$\Delta U = C_v \Delta T = -1247J$$

$$\Delta H = C_p \Delta T = -2079J$$

$$\Delta S = 0 \text{ J/K}$$

$$\Delta H = C_p \Delta T = \frac{5}{2} nR (T_3 - T_2)$$

Ahora sea adiabática

$$P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma \quad P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = P_3 \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma$$

$$\frac{nRT_2}{V_2} = \frac{nRT_3}{V_3} \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma$$

$$T_2 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

$$\ln\left(\frac{T_2}{T_3}\right) = (\gamma-1) \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$$

$$V_3 = V_2 e^{\frac{\ln(T_2/T_3)}{\gamma-1}} = 73,49L$$

3 → 4 Isoterma

$T_3 = T_4$ $\Delta P, \Delta V$ se sacan del 1 → 4

$$\Delta P = 0,23 \text{ bar}$$

$$\Delta V = -36,75L$$

$$\Delta T = 0$$

$$\Delta U = C_v \Delta T = 0$$

$$\Delta H = C_p \Delta T = 0$$

$$\Delta S = -5,76 \text{ J/K}$$

$$\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

4 → 1 Adiabática

$$\delta Q = 0$$

$$\Delta P = 0,79 \text{ bar}$$

$$\Delta V = -16,74L$$

$$\Delta T = 100K$$

$$\Delta U = C_v \Delta T = 1247J$$

$$\Delta H = C_p \Delta T = 2079J$$

$$\Delta S = 0 \text{ J/K}$$

$$V_1 = V_4 e^{\frac{\ln(T_4/T_1)}{\gamma-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$V_4 = V_1 e^{-\frac{\ln(T_4/T_1)}{\gamma-1}} = 36,74L$$

23) Dep

M=9 Term

$V_D = 1 \cdot 10^3 m^3$ $T_D = 373K$ O (Rev)

$\rho_w = 1000 kg/m^3$ $C_{ev} = 4180 J/kg$

$$\Delta S_{sup} = \Delta S_D + \Delta S_{r2} + \Delta S_{sist}$$

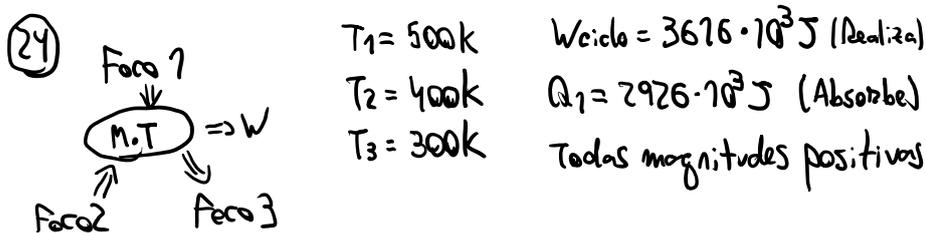
O (Ciclo $\delta Q = 0$)
Carnot

Rio

$T_2 = 283K$

$$\Delta S_D = -\Delta S_{r2} = \int_{T_D}^{T_2} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_D}^{T_2} m C_{ev} \frac{dT}{T} = \rho_w V_D C_{ev} \ln\left(\frac{T_2}{T_D}\right) = -1,15 \cdot 10^9 \text{ J/K}$$

23) $Q_2 = T_2 \Delta S_2 = 3,75 \cdot 10^{11} \text{ J}$
 $\Delta U_D = Q_D + W^0 (dV=0)$
 $Q_D = \Delta U_D = m C_{ev} \Delta T = \rho V C_{ev} (T_2 - T_0) = -3,76 \cdot 10^{11} \text{ J}$
 $W_{max} = |Q_D| - |Q_2| = 57 \cdot 10^{10} \text{ J}$



$W_{ciclo} = Q_1 + Q_2 - Q_3$
 $\Delta S_{univ} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_{sist} \quad (\text{Ciclo rev } \Delta Q=0)$
 Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_3}{T_3} = 0$

$Q_2 - Q_3 = W_{ciclo} - Q_1$
 $\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_3}{T_3} = -\frac{Q_1}{T_1}$
 $Q_2 = 9,78 \cdot 10^6 \text{ J}$
 $Q_3 = 9,09 \cdot 10^6 \text{ J}$

Tomando el convenio de signos

$Q_2 = 9,78 \cdot 10^6 \text{ J}$
 $Q_3 = -9,09 \cdot 10^6 \text{ J}$

$\eta = \frac{|W|}{|Q_{Abs}|} = \frac{|W|}{|Q_1 + |Q_2||} = 28,46\%$

25) $C_v = AT^2$ $T_0 = 200^\circ\text{C} = 473\text{K}$
 $A = 0,0418 \text{ J/K}^3$ $T_f = 0^\circ\text{C} = 273\text{K}$
 Engría

a) Contacto directo Foco Térmico 0°C Proceso irreversible
 $W=0$ (No hay máquina térmica) $\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{foco} > 0$

$Q_{sist} = -Q_{foco}$ $\Delta U_{sist} = Q_{sist} = \int_{T_0}^{T_f} C_v dT = \frac{A}{3} (T_f^3 - T_0^3) = 1,19 \cdot 10^6 \text{ J}$

$\Delta S_{sist} = \int_{T_0}^{T_f} C_v \frac{dT}{T} = \frac{A}{2} (T_f^2 - T_0^2) = -3118 \text{ J/K}$

$\Delta S_{foco} = \frac{Q_f}{T_{foco}} = \frac{-Q_{sist}}{T_{foco}} = 4359 \text{ J/K}$

$\Delta S_{univ} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{foco} = 1240 \text{ J/K}$



SI VAS A DEJAR DE ESTUDIAR PARA MIRAR EL MÓVIL, AL MENOS QUE SEA PARA LLEVARTE ALGO.

Disfruta de 12 meses gratis de la cuenta bancaria premium N26 Smart con el código **N26WUOLAH**.
 ¡Gestiona tu dinero desde el móvil y no vuelvas a pisar una sucursal!

TIN 0%, TAE: -1,17% para un supuesto en el que se mantenga de forma constante durante un año un saldo diario de 5.000 €, aplicando un tipo de interés nominal anual de 0% y el coste mensual de la cuenta bancaria de 4,90 €/mes. La liquidación de la cuenta se realiza con periodicidad mensual.

N26 Tu Banco Móvil

25) b) Máquina térmica entre Sistema y foco

$$W = |Q_S| - |Q_F|$$

$$\Delta S_{sist} = \int_{T_0}^{T_f} C_V \frac{dT}{T} = \frac{A}{2} (T_f^2 - T_0^2) = -3118 \text{ J/K}$$

$\Delta S_{univ} = 0$ Por ser reversible

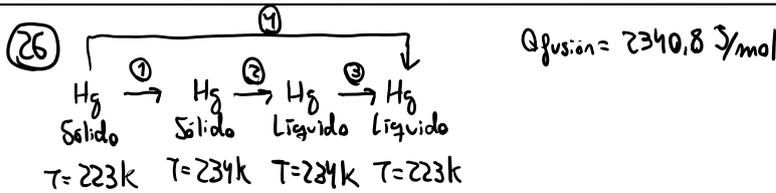
$$\Delta S_{sist} + \Delta S_{foco} + \Delta S_{máq} = 0$$

$$\Delta S_{foco} = 3118 \text{ J/K}$$

$$Q_S = \int_{T_0}^{T_f} C_V dT = \frac{A}{3} (T_f^3 - T_0^3) = -1,19 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$Q_{foco} = \Delta S_{foco} \cdot T_{foco} = 8,51 \cdot 10^5 \text{ J}$$

$$W = 3,39 \cdot 10^5 \text{ J}$$



$$\Delta S_4 = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$$

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} C_{ps} \frac{dT}{T} = C_{ps} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 1,288 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_2 = \frac{Q_{fusión}}{T_{fusión}} = 10,003 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_3 = \int_{T_3}^{T_2} C_{pl} \frac{dT}{T} = C_{pl} \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = -1,429 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_4 = 9,862 \text{ J/K}$$

27) $PV^2 = cte$ A → B Proceso adiabático reversible
 $U = \frac{PV}{2}$ B → C Proceso adiabático irreversible
 C → A Proceso isotermo reversible

A → B $\delta Q = 0$ $dS = 0$ Por ser proceso adiabático reversible
 $Q = 0$ $\Delta S = 0$

B → C $\delta Q = 0 \Rightarrow Q = 0$ Por ser proceso adiabático
 ΔS lo determinamos después $\Delta S = \frac{1}{2T} (P_A V_A - P_C V_C)$

C → A $T = cte$ $P_A V_A^2 = P_C V_C^2 = PV^2$

$$Q = \Delta U - W = \frac{P_A V_A}{2} - \frac{P_C V_C}{2}$$

$$W = - \int_{V_C}^{V_A} P dV = - P_C V_C^2 \int_{V_C}^{V_A} \frac{dV}{V^2} = - P_C V_C^2 \left[-\frac{1}{V} \right]_{V_C}^{V_A} = P_C V_C^2 \left[\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_C} \right] = P_A V_A - P_C V_C$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.



$$Q = -\frac{1}{2} (P_A V_A - P_C V_C)$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = -\frac{1}{2T} (P_A V_A - P_C V_C)$$

Recordando B+C

$$\Delta S_{\text{ciclo}} = 0 \Rightarrow \Delta S_{BC} = -\Delta S_{CA}$$

28) $n=1$ gas ideal monoatómico $T = 399\text{K}$
 $PV = nRT$ $C_V = \frac{3}{2} nR$ $P = 4\text{bar}$
 $U = U(T)$ $C_P = \frac{5}{2} nR$

Cilindro Paredes adiabáticas

Proceso no-estático. Expansión $P_{\text{ext}} = 1\text{bar}$

$$dU = \delta Q + \delta W$$

$$C_V dT = -P dV$$

$$C_V \Delta T = - \int_{V_0}^{V_f} P dV = -P_{\text{ext}} (V_f - V_0) = -P_{\text{ext}} \left(\frac{nRT_f}{P_f} - \frac{nRT_0}{P_0} \right)$$

$$C_V T_f - C_V T_0 = -nRT_f + \frac{P_{\text{ext}}}{P_0} nRT_0$$

$$T_f = \frac{\left(\frac{P_{\text{ext}}}{P_0} nR + C_V \right)}{C_V + nR} T_0 = 279,3\text{K} \Rightarrow \begin{aligned} V_0 &= 8,29 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 \\ V_f &= 2,32 \cdot 10^{-2} \text{m}^3 \end{aligned}$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU - \delta W}{T} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV = C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = C_V \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) = 4,17 \text{ J/K}$$

29)



Paredes adiabáticas

1) $n=10$ moles gas ideal

2) Mezcla equilibrio

$$P = 1,013 \text{ bar}$$

100g agua

100g hielo

Proceso cuasiestático \Rightarrow Reversible

$$P_f = 2 P_0$$

La energía aportada no fundirá todo el hielo

$$\Delta S_{\text{gas}} = \frac{-Q}{T} = \frac{-W}{T} = -57,63 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{\text{mezcla}} = \frac{Q}{T} = \frac{W}{T} = 57,63 \text{ J/K}$$

Supongamos que $T_2 = \text{cte} = 273\text{K}$ (Fusión agua)

$$W = - \int_V^{V/2} P dV = -nRT \ln\left(\frac{V}{2}\right) = nRT \ln 2 = 15733 \text{ J}$$

$\rightarrow 333,55 \text{ J/g}$

$$Q_{\text{fusión Total}} = m \Delta H_f = 33355 \text{ J}$$

$$\Delta S_{\text{univ}} = 0 \quad (\text{Proceso reversible})$$

30) Transformaciones reversibles

A → B isotermia Absorbe 1254 kJ

$$T_A = 600\text{K} = T_B$$

B → C Adiabática $T_C = 100\text{K}$

C → D Isotermia Absorbe 2090 kJ

$$T_C = 100\text{K} = T_D$$

D → E Adiabática $T_E = 400\text{K}$

E → F Isotermia Cede 3344 kJ

$$T_E = 400\text{K} = T_F$$

F → G Adiabática $T_G = 350\text{K}$

G → H Isotermia Vuelta a estado inicial

$$T_G = 350\text{K} = T_H$$

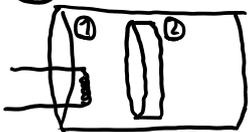
$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DE} + \Delta S_{EF} + \Delta S_{FG} + \Delta S_{GH}$$

Tomamos todas las magnitudes positivas

$$0 = \frac{Q_{AB}}{T_A} + \frac{Q_{CD}}{T_C} - \frac{Q_{EF}}{T_E} - \frac{Q_{GH}}{T_G} \Rightarrow Q_{GH} = \left(\frac{Q_{AB}}{T_A} + \frac{Q_{CD}}{T_C} - \frac{Q_{EF}}{T_E} \right) T_G = 5,12 \cdot 10^6 \text{ J}$$

31)

Paredes adiabáticas $V = 10\text{L}$



1) y 2) Misma cantidad gas ideal diatómica

$$PV = nRT \quad c_v = \frac{5}{2} nR$$

$$V = V(T) \quad c_p = \frac{7}{2} nR$$

$$T_0 = 300\text{K} \quad P_0 = 0,947 \text{ bar} \quad V_0 = 5\text{L}$$

$$n = 0,19 \text{ moles}$$

a) Una vez calentada la parte izquierda, por tripliquearse la presión se contrae 2)

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} \Rightarrow V_2^{\gamma} = \frac{P_1}{P_2} V_1^{\gamma} \Rightarrow V_2 = 2,728\text{L}$$

$$V_{1f} = V - V_2 = 7,272\text{L} \quad T_{1f} = \frac{P_2 V_{1f}}{nR} = 1388\text{K} \quad T_{2f} = \frac{P_2 V_2}{nR} = 410\text{K}$$

$$b) Q = \Delta U - W = \Delta U_1 - \Delta U_2 - W_1 + W_2 \quad (W_1 = W_2) = c_v \Delta T_1 - c_v \Delta T_2 = 3862\text{J}$$

$$c) \Delta S_{\text{sist}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 \quad (\text{Expansión adiabática reversible})$$

$$= \int_{T_0}^{T_1} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{dU}{T} - \int_{V_0}^{V_1} \frac{\delta W}{T} = c_v \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} + nR \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = \frac{5}{2} nR \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + nR \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = 6,74 \text{ J/K}$$

32) $n=1$ gas ideal Expansión isoterma
 $PV=nRT$ $T=300K$
 $U=U(T)$ $V_1=20L$ $V_2=40L$

a) Proceso reversible bajar presión hasta P_{ext}

$$P_1 = \frac{nRT}{V_1} = 1,247 \text{ bar} \quad P_{ext} = \frac{nRT}{V_2} = 0,624 \text{ bar}$$

$$\Delta U = 0 \quad (\Delta T = 0)$$

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = -nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -1729 \text{ J}$$

$$Q = \Delta U - W = 1729 \text{ J}$$

$$\Delta S_{gas} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU - \delta W}{T} = \int_{V_1}^{V_2} nR \frac{dV}{V} = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 5,76 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{poco} = -\frac{Q}{T} = -5,76 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{sist} = 0 \quad (\text{Aislado adiabático reversible})$$

b) Proceso irreversible bajar presión hasta P_{ext}

$$\Delta U = 0 \quad (\Delta T = 0)$$

$$W = -P_{ext}(V_2 - V_1) = -1248 \text{ J}$$

$$Q = \Delta U - W = 1248 \text{ J}$$

$$\Delta S_{gas} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 5,76 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{poco} = -\frac{Q}{T} = -4,16 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{sist} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{poco} = 1,60 \text{ J/K} > 0 \quad (\text{Proceso Irreversible})$$

c) Proceso irreversible expansión en el vacío

$$\Delta U = 0 \quad (\Delta T = 0)$$

$$W = -P_{ext}(V_2 - V_1) = 0 \quad (\text{Expansión vacío})$$

$$Q = \Delta U - W = 0$$

$$\Delta S_{gas} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 5,76 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{poco} = -\frac{Q}{T} = 0$$

$$\Delta S_{sist} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{poco} = 5,76 \text{ J/K} > 0 \quad (\text{Proceso Irreversible})$$

33) Recinto aislado

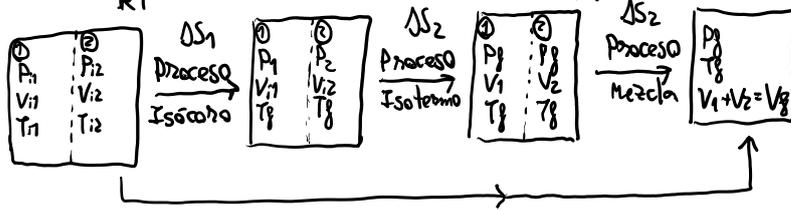
① O₂ gas ideal diatómico mezcla

Inicia
 $P = 1 \text{ bar}$
 $T = 273 \text{ K}$
 $V = 2 \text{ L}$
 $n = \frac{PV}{RT} = 0,088 \text{ moles}$

②

He gas ideal monoatómico

Inicia
 $P = 4 \text{ bar}$
 $T = 268 \text{ K}$
 $V = 1 \text{ L}$
 $n = \frac{PV}{RT} = 0,18 \text{ moles}$



Proceso isocoro

$W = 0 (\Delta V = 0) \Rightarrow \Delta U = Q$

$\Delta U_1 + \Delta U_2 = Q_1 + Q_2 = 0$ (se produce un intercambio de calor $Q_1 = -Q_2$)

$\Delta U_1 = -\Delta U_2 \Rightarrow C_{V1} \Delta T_1 = -C_{V2} \Delta T_2 \Rightarrow \frac{5}{2} n_1 R (T_f - T_{i1}) = \frac{3}{2} n_2 R (T_f - T_{i2})$

$\Delta S_{1\text{O}} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_{i1}}^{T_f} \frac{dU}{T} = C_{V1} \int_{T_{i1}}^{T_f} \frac{dT}{T} = \frac{5}{2} n_1 R \ln\left(\frac{T_f}{T_{i1}}\right) = -1,86 \cdot 10^2 \text{ J/K}$

$S n_1 T_f - S n_1 T_{i1} = -3 n_2 T_f + 3 n_2 T_{i2}$
 $T_f = \frac{3 n_2 T_{i2} + 5 n_1 T_{i1}}{5 n_1 + 3 n_2} = 270,24 \text{ K}$

$\Delta S_{1\text{He}} = \int_2^1 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_{i2}}^{T_f} \frac{dU}{T} = C_{V2} \int_{T_{i2}}^{T_f} \frac{dT}{T} = \frac{3}{2} n_2 R \ln\left(\frac{T_f}{T_{i2}}\right) = 1,87 \cdot 10^2 \text{ J/K}$

$\Delta S_1 = \Delta S_{1\text{O}} + \Delta S_{1\text{He}} = 9,85 \cdot 10^5 \text{ J/K}$

Proceso isotermo

$\Delta U_1 = \Delta U_2 = 0$ (los volúmenes se modifican hasta que se igualan las presiones)

$P_f = \frac{n_1 R T_f}{V_1} = \frac{n_2 R T_f}{V_2} = \frac{(n_1 + n_2) R T_f}{V_1 + V_2} = 2,007 \text{ bar}$

$V_1 = \frac{n_1 R T_f}{P_f} = 0,985 \text{ L}$ $V_2 = \frac{n_2 R T_f}{P_f} = 2,015 \text{ L}$

$\Delta S_{2\text{O}} = \int_1^1 \frac{\delta Q}{T} = \int_{V_{i1}}^{V_1} \frac{\delta W}{T} = \int_{V_{i1}}^{V_1} \frac{P}{T} dV = n_1 R \int_{V_{i1}}^{V_1} \frac{dV}{V} = n_1 R \ln\left(\frac{V_1}{V_{i1}}\right) = -0,518 \text{ J/K}$

$\Delta S_2 = \Delta S_{2\text{O}} + \Delta S_{2\text{He}} = 0,530 \text{ J/K}$

$\Delta S_{2\text{He}} = \int_2^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{V_{i2}}^{V_2} \frac{\delta W}{T} = \int_{V_{i2}}^{V_2} \frac{P}{T} dV = n_2 R \int_{V_{i2}}^{V_2} \frac{dV}{V} = n_2 R \ln\left(\frac{V_2}{V_{i2}}\right) = 1,048 \text{ J/K}$

33) Mezccla $x_1 = \frac{n_1}{n_1+n_2} = 0,328$ $x_2 = \frac{n_2}{n_1+n_2} = 0,672$
 $\Delta S_3 = -R \sum_i n_i \ln x_i = -R(n_1 \ln x_1 + n_2 \ln x_2) = 1,410 \text{ J/K}$

$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 1,940 \text{ J/K}$

34) 5g Helio líquido $T = 0,5 \text{ K}$ Recinto adiabático
 100g Sal para magnética T_S

$T_f = 0,04 \text{ K}$ $C_{\text{He}} = 0,02 T^3 \text{ J/gK}$
 $C_S = 10^{-4} \frac{1}{T^2} \text{ J/gK}$

$Q_{\text{sal}} = -Q_{\text{He}} = - \int_{T_0}^{T_f} m_{\text{He}} C_{\text{He}} dT = -m_{\text{He}} \cdot 0,02 \int_{T_0}^{T_f} T^3 dT = -0,02 m_{\text{He}} \frac{T_f^4 - T_0^4}{4} = 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ J}$

$Q_{\text{sal}} = \int_{T_S}^{T_f} m_S C_S dT = m_S 10^{-4} \int_{T_S}^{T_f} \frac{dT}{T^2} = -m_S 10^{-4} \left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_S} \right) \Rightarrow \frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_S} = - \frac{Q_S}{10^{-4} m_S}$
 $\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_f} + \frac{Q_S}{10^{-4} m_S}$

$T_S = \left(\frac{1}{T_f} + \frac{Q_S}{10^{-4} m_S} \right)^{-1} = 0,04 \text{ K}$

$\Delta S_{\text{He}} = \int_i \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_0}^{T_f} \frac{m_{\text{He}} C_{\text{He}} dT}{T} = m_{\text{He}} 0,02 \int_{T_0}^{T_f} T^2 dT = 0,02 m_{\text{He}} \frac{T_f^3 - T_0^3}{3} = -4,16 \cdot 10^{-3} \text{ J/K}$

$\Delta S_{\text{sal}} = \frac{Q_{\text{sal}}}{T_S} = 3,90 \cdot 10^{-2} \text{ J/K}$ $\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{He}} + \Delta S_{\text{sal}} = 3,48 \cdot 10^{-2} \text{ J/K} > 0$

35) Paredes adiabáticas

 $n_1 = n_2 = 1$ gas ideal monoatómico
 $PV = nRT$ $C_V = \frac{3}{2} nR$
 $P^I = 5 \text{ bar}$ $V = V(T)$ $C_P = \frac{5}{2} nR$
 $T^I = 300 \text{ K}$
 $V^I = 4,99 \text{ L}$ $V^{II} = 4,99 \text{ L}$

I: $\Delta U_I = Q_I + W_I$ $Q_I = -Q_{II}$

II: $\Delta U_{II} = Q_{II} + W_{II}$ $\Delta U_{II} = -Q_I + W_{II} \Rightarrow W_{II} = \Delta U_I + \Delta U_{II}$

La temperatura inicial y final de ambos gases será la misma (Pared fija y diaterma) $T^I = T^{II}$

$W_{II} = 2 \Delta U_I = 2 C_V \Delta T_1 = 3 nR (T_f - T^I)$

35) Expansión Pext

$$W_{II} = -P_{ext} \cdot (V_f - V^{II}) = 3nR(T_f - T^I)$$

Como $P_f^{II} = P_{ext}$

$$-P_{ext}V_f + P_{ext}V^{II} = 3nR(T_f - T^I)$$

$$-nRT_f + P_{ext}V^{II} = 3nRT_f - 3nRT^I$$

$$T_f = \frac{P_{ext}V^{II} + 3nRT^I}{4nR} = 240 \text{ K}$$

$$\Delta U_I = \Delta U_{II} = \frac{3}{2}nR(T_f - T^I) = -748,3 \text{ J}$$

$$\Delta H_I = \Delta H_{II} = \frac{5}{2}nR(T_f - T^I) = -1247,1 \text{ J}$$

$$Q_I = -Q_{II} = \Delta U_I = -748,3 \text{ J}$$

$$\Delta S_I = \int \frac{\delta Q_I}{T} = \int_{T^I}^{T_f} \frac{dU}{T} = \int_{T^I}^{T_f} C_V \frac{dT}{T} = \frac{3}{2}nR \ln\left(\frac{T_f}{T^I}\right) = -2,78 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{II} = \int \frac{\delta Q_{II}}{T} = \int \frac{dU - \delta W}{T} = \int_{T^I}^{T_f} C_V \frac{dT}{T} + \int_{V^{II}}^{V_f} \frac{P}{T} dV = \frac{3}{2}nR \ln\left(\frac{T_f}{T^I}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V^{II}}\right) = 8,76 \text{ J/K}$$

$$V^{II} = \frac{nRT_f}{P_{ext}} = 20 \text{ L}$$

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_I + \Delta S_{II} = 5,98 \text{ J/K}$$

Ejercicios Termodinámica

Tema 11

Gas ideal monoatómico
 $PV = nRT$ $C_V = \frac{3}{2}nR$

36) $dU = Tds - PdV$

$$Tds = dU + PdV$$

$$ds = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV = C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

$$S = S_0 + \int C_V \frac{dT}{T} + \int nR \frac{dV}{V} = S_0 + \frac{3}{2}nR \ln T + nR \ln V$$

$$S = S_0 + \frac{3}{2}nR \ln T$$

37)

$$S = 3(A_n V U)^{1/3} \quad A = \text{cte}$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right) dU - \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) dV = \frac{1}{T} dU - \frac{P}{T} dV$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = (A_n V U)^{-2/3} A_n V = (A_n V)^{1/3} U^{-2/3} = \frac{1}{T} \Rightarrow U^{2/3} = T (A_n V)^{1/3} \Rightarrow U = T^{3/2} (A_n V)^{1/2}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = (A_n V U)^{-2/3} A_n U = (A_n V)^{1/3} U^{-2/3} = \frac{P}{T} \Rightarrow U^{1/3} = \frac{P}{T} V^{2/3} (A_n)^{-1/3} \Rightarrow U = \left(\frac{P}{T}\right)^3 V^2 (A_n)^{-1}$$

$$T^{3/2} (A_n V)^{1/2} = \left(\frac{P}{T}\right)^3 V^2 (A_n)^{-1}$$

$$T^{9/2} A_n^{3/2} V^{1/2} = P^3 V^2$$

$$T^3 A_n = P^2 V$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = (A_n V)^{1/2} \frac{3}{2} T^{1/2} = \frac{3}{2} \sqrt{A_n V T}$$

$$C_P = C_V + T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{3}{2} \sqrt{A_n V T} + T \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{T A_n}{V}}\right) \left(3 \frac{T^2 A_n}{P^2}\right) = \frac{3}{2} \sqrt{A_n V T} + \left(\frac{9}{2} \sqrt{\frac{T A_n}{V}}\right) V = 6 \sqrt{A_n V T}$$

$$P = \sqrt{\frac{T^3 A_n}{V}} \quad V = \frac{T^3 A_n}{P^2} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{2} \left(\frac{T^3 A_n}{V}\right)^{1/2} 3 \frac{T^2 A_n}{V} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{T A_n}{V}}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 3 \frac{T^2 A_n}{P^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 3 \frac{T^2 A_n}{P^2 V} = \frac{3}{T}$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{V} \left(-2 \frac{T^3 A_n}{P^3}\right) = 2 \frac{T^3 A_n}{P^3 V} = \frac{2}{P}$$

SI VAS A DEJAR DE ESTUDIAR PARA MIRAR EL MÓVIL, AL MENOS QUE SEA PARA LLEVARTE ALGO.

Abrir cuenta en N26



Disfruta de 12 meses gratis de la cuenta bancaria premium N26 Smart con el código **N26WUOLAH**.
¡Gestiona tu dinero desde el móvil y no vuelvas a pisar una sucursal!

TIN 0 %, TAE: -1,17 % para un supuesto en el que se mantenga de forma constante durante un año un saldo diario de 5.000 €, aplicando un tipo de interés nominal anual de 0 % y el coste mensual de la cuenta bancaria de 4,90 €/mes. La liquidación de la cuenta se realiza con periodicidad mensual.

$$(38) \quad U = \frac{3}{2} PV \quad P = AVT^4 \quad A = \text{cte}$$

$$Tds = dU + PdV$$

$$ds = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV = \sqrt[4]{\frac{3AV^2}{2U}} dU + \sqrt[4]{\frac{3AV^2}{2U}} \left(\frac{2U}{3V}\right) dV = \sqrt[4]{\frac{3AV^2}{2U}} dU + \sqrt[4]{\frac{8AU^3}{27V^2}} dV$$

$$\frac{1}{T^4} = \frac{AV}{P} = \frac{AV}{\frac{2U}{3V}} = \frac{3AV^2}{2U}$$

$$P = \frac{2U}{3V}$$

$$S = \int \sqrt[4]{\frac{3AV^2}{2}} \frac{dU}{U^{1/4}} + \int \sqrt[4]{\frac{8AU^3}{27}} \frac{dV}{V^{1/2}} = \sqrt[4]{\frac{3AV^2}{2}} \frac{U^{3/4}}{3/4} + \sqrt[4]{\frac{8AU^3}{27}} \frac{V^{1/2}}{1/2} + C =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{128}{27}} AV^2 U^{3/4} + \sqrt[4]{\frac{128}{27}} AV^2 U^{3/4} + C = 2 \left(\frac{128}{27}\right)^{1/4} A^{1/4} V^{1/2} U^{3/4} + C$$

N26 Tu Banco Móvil



Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Ejercicios Termodinámica

Tema 13

39
PPT
(Adj)

$$G = nRT \ln P + P \left(nb - \frac{na}{RT} \right) + F(T)$$

$$dG = -SdT + VdP$$

$$\frac{\partial G}{\partial T} = nR \ln P + P \frac{na}{RT^2} + F'(T) = -S$$

$$\frac{\partial G}{\partial P} = nRT \frac{1}{P} + nb - \frac{na}{RT} = V \Rightarrow V = \frac{nRT}{P} + \left(nb - \frac{na}{RT} \right) \quad \text{Ecuación Estado}$$

$$dG = \left(nR \ln P + P \frac{na}{RT^2} + F'(T) \right) dT + \left(nRT \frac{1}{P} + nb - \frac{na}{RT} \right) dP$$

a) $PV = nRT + P \left(nb - \frac{na}{RT} \right)$

Boyle $\Rightarrow nb - \frac{na}{RT} = 0 \Rightarrow T = \frac{na}{Rb}$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \left(-\frac{nRT}{P^2} \right) = \frac{nRT}{VP^2} = \frac{nR}{VP^2} \frac{na}{Rb} = \frac{na}{VP^2 b}$$

40 $F = F(T, V)$ $T \text{ cte, } V \rightarrow \text{Mínimo}$ $dF = 0 \Rightarrow dV(P_1 - P_2) = 0 \Rightarrow P_1 = P_2$
 $\forall dV$ Condición de equilibrio mecánico

$$dF = -SdT - PdV$$

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$$

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V$$

Foco: $T_1 = T_2 \Rightarrow dT = 0$ $dF = -PdV$

$$dF = dF_1 + dF_2 = -P_1 dV_1 - P_2 dV_2 = dV(P_1 - P_2)$$

$$dV_1 = -dV_2$$

41 $F = F(T, V)$ Entropía $S = S(T, V)$

$$dF = -SdT - PdV$$

Ec. Estado $P = P(T, V)$

$$dU = dF + TdS + SdT$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V + T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V + S = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V - T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \Rightarrow C_V = C_V(T, V)$$

$$C_P = C_V + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V - T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \neq$$

$$\neq -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V + T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} \right)_{T, V} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \right)_T^{-1} = C_P(T, V)$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \right)_T^{-1} = \kappa_T(T, V)$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} \right)_{T, V} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \right)_T^{-1} = \alpha(T, V)$$

$$B = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = -\frac{1}{P} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} \right)_{T, V} = B(T, V)$$

Relación Trigonal

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -1$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T^{-1} = - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} \right)_{T, V} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \right)_T^{-1}$$

Ejercicios Termodinámica

Tema 13.2

(42)



100g agua 288K
Aumenta Presión $T = cte$
 $P_0 = 1 \text{ bar}$ $P_f = 100 \text{ bar}$

$$\alpha = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

$$k_T = 0,47 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \alpha V \Rightarrow \frac{dV}{V} = \alpha dT \Rightarrow \ln V = \alpha T + \phi(P) \Rightarrow V = e^{\alpha T + \phi(P)}$$

$$k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -k_T V \Rightarrow \frac{dV}{V} = -k_T dP \Rightarrow \ln V = -k_T P + \psi(T) \Rightarrow V = e^{-k_T P + \psi(T)}$$

$$V_0 = C e^{\alpha T_0 - k_T P_0} = 1,044 C \Rightarrow C = 9,58 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

$$V = C e^{\alpha T - k_T P} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\ln V = \alpha T - k_T P + \ln C$$

$$dU = T ds - P dV \xrightarrow{0(dT=0)} = C_V dT + \left[T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P \right] dV = \left[T \left(\frac{\alpha}{k_T} \right) - P \right] dV = \begin{cases} dV = C e^{\alpha T - k_T P} \cdot (-k_T) dP \\ dP = \frac{1}{C} e^{\alpha T - k_T P} dV \end{cases}$$

$$T ds = C_V dT + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV = - \left[T \left(\frac{\alpha}{k_T} \right) - P \right] C e^{\alpha T - k_T P} k_T dP = C [k_T P - \alpha T] e^{\alpha T - k_T P} dP$$

$$\Delta U = \int_{P_0}^{P_f} C [k_T P - \alpha T] e^{\alpha T - k_T P} dP = \boxed{-40,34 \text{ J}}$$

$$dH = T ds + V dP \xrightarrow{0(dT=0)} = C_P dT + \left[V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right] dP = \left[C e^{\alpha T - k_T P} - T \left(C e^{\alpha T - k_T P} \alpha \right) \right] dP =$$

$$T ds = C_P dT - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP = C e^{\alpha T - k_T P} (1 - \alpha T) dP$$

$$\Delta H = \int_{P_0}^{P_f} C e^{\alpha T - k_T P} (1 - \alpha T) dP = \boxed{945,26 \text{ J}}$$

$$dF = -S dT - P dV = + P C e^{\alpha T - k_T P} k_T dP$$

$$\Delta F = \int_{P_0}^{P_f} C k_T e^{\alpha T - k_T P} P dP = \boxed{2,34 \text{ J}}$$

$$dG = -S dT + V dP = C e^{\alpha T - k_T P} dP$$

$$\Delta G = \int_{P_0}^{P_f} C e^{\alpha T - k_T P} dP = \boxed{987,94 \text{ J}}$$

43) Compresión isoterma reversible

$$T = 298 \text{ K} = \text{cte}$$

$$0,9 \text{ kg agua} \quad P_0 = 1 \text{ atm} \quad V(298 \text{ K}) = 18 - 7,15 \cdot 10^{-4} P + 4,6 \cdot 10^{-7} P^2 \quad (\text{cm}^3/\text{mol})$$

$$P_f = 100 \text{ atm} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 4,5 \cdot 10^{-3} + 1,4 \cdot 10^{-6} P \quad (\text{cm}^3/\text{mol K}) \quad \text{Pen atm}$$

Todas magnitudes molares

$$dV = (-7,15 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 4,6 \cdot 10^{-7} P) dP$$

$$dU = T ds - P dV = C_p dT - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP - P dV$$

$$dH = T ds + V dP = C_p dT - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP + V dP = \left[V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right] dP$$

$$dF = -S dT - P dV = -P dV$$

$$dG = -S dT + V dP = V dP$$

$$\Delta U = \int_{P_0=1}^{P_f=100} -T(4,5 \cdot 10^{-3} + 1,4 \cdot 10^{-6} P) dP - \int_{P_0=1}^{P_f=100} P(-7,15 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 4,6 \cdot 10^{-7} P) dP = -131,57 \frac{\text{atm cm}^3}{\text{mol}}$$

$$\Delta H = \int_{P_0=1}^{P_f=100} \left((18 - 7,15 \cdot 10^{-4} P + 4,6 \cdot 10^{-7} P^2) - T(4,5 \cdot 10^{-3} + 1,4 \cdot 10^{-6} P) \right) dP = 1643,73 \frac{\text{atm cm}^3}{\text{mol}}$$

$$\Delta F = \int_{P_0=1}^{P_f=100} -P(-7,15 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 4,6 \cdot 10^{-7} P) dP = 3,27 \frac{\text{atm cm}^3}{\text{mol}}$$

$$\Delta G = \int_{P_0=1}^{P_f=100} (18 - 7,15 \cdot 10^{-4} P + 4,6 \cdot 10^{-7} P^2) dP = 1778,58 \frac{\text{atm cm}^3}{\text{mol}}$$

$$18 \text{ g agua} = 1 \text{ mol agua} \quad 1 \text{ atm cm}^3 \cdot \frac{101300 \text{ Pa}}{1 \text{ atm}} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{10^6 \text{ cm}^3} = 0,1013 \text{ J}$$

$$900 \text{ g agua} = 50 \text{ moles agua}$$

$$\Delta U = -666,40 \text{ J}$$

$$\Delta H = 8325,49 \text{ J}$$

$$\Delta F = 16,56 \text{ J}$$

$$\Delta G = 9008,51 \text{ J}$$

INSIDE

LLEGO EL DÍA ¿TE VAS A RESISTIR?

(44) $\alpha = \frac{(V-b)}{TV} \quad k_T = \frac{(V-b)}{PV} \quad b = 3,64 \cdot 10^{-2} \text{ L/mol} =$

Compresión isoterma

$T = 300 \text{ K} \quad n = 1 \text{ mol} \quad P_0 = 1 \text{ bar} \quad P_f = 2 \text{ bar}$

$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{V-b}{TV} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{V-b}{T} \Rightarrow \frac{\partial V}{V-b} = \frac{\partial T}{T} \Rightarrow \ln(V-b) = \ln T + f(P)$

$k_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{V-b}{PV} \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{V-b}{P} \Rightarrow \frac{\partial V}{V-b} = -\frac{\partial P}{P} \Rightarrow \ln(V-b) = -\ln P + g(T)$

$k = R$

$V-b = \frac{kT}{P} \quad k \in R$

$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{k}{V-b}$
 $dV = -\frac{kT}{P^2} dP$

$dU = Tds - PdV = C_V dT + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV - PdV = \left[\frac{kT}{V-b} - P \right] dV = 0$

$\Delta U = 0$

$dH = Tds + vdP = C_P dT - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dP + vdP = [V - (V-b)] dP = b dP$

$\Delta H = \int_{P_0}^{P_f} b dP = b(P_f - P_0) = 3,64 \cdot 10^{-2} \frac{\text{L bar}}{\text{mol}} \Rightarrow 3,64 \text{ J/mol} \Rightarrow \boxed{3,64 \text{ J}}$

$dF = -SdT - PdV = \frac{kT}{P} dP \quad \Delta F = \int_{P_0}^{P_f} \frac{kT}{P} dP = 1728,84 \text{ J/mol} \Rightarrow \boxed{1728,84 \text{ J}}$

$dG = -SdT + vdP = \left(\frac{kT}{P} + b \right) dP \quad \Delta G = \int_{P_0}^{P_f} \frac{kT}{P} dP + \int_{P_0}^{P_f} b dP = 1732,48 \text{ J/mol} \Rightarrow \boxed{1732,48 \text{ J}}$

(45) $\sigma = 0,145 - 2,5 \cdot 10^{-4} T \quad (\text{J/m}^2)$

a) $dU = Tds + \sigma dA \quad Tds = C_A dT - T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_A dA$

$dU = [\sigma - T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_A] dA \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_A = -2,5 \cdot 10^{-4}$

$dU = [0,145] dA \Rightarrow \Delta U = 0,145 \Delta A = 0,145 \cdot 100 \cdot 10^4 = \boxed{1,45 \cdot 10^3 \text{ J}}$

b) $Tds = C_A dT - T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_A dA \Rightarrow dT = \frac{T}{C_A} (-2,5 \cdot 10^{-4}) dA$

$\Delta T = \frac{T}{C_A} (-2,5 \cdot 10^{-4}) \Delta A = \boxed{-7,76 \cdot 10^4 \text{ K}}$

WUOLAH

$$(45) \text{ c) } \sigma = \text{cte} \left(\frac{T}{A} \right) \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_A = \frac{\text{cte}}{A}$$

$$dU = Tds + \sigma dA = c_A dT - T \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_A dA + \sigma dA = \left(\sigma - \frac{T \text{cte}}{A} \right) dA = 0$$

$$\Delta U = 0$$

(46)

$$F = aT^2(L - l_0)$$

$$a, l_0 > 0 \text{ cte}$$

$$\text{Si } L = l_0 \Rightarrow C_{L_0} = bT \quad b = \text{cte}$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} F = P \\ V = L \\ T = T \end{array} \right\} \quad \left(\frac{\partial C_L}{\partial L} \right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_L = -T 2a(L - l_0) \Rightarrow \partial C_L = -2aT(L - l_0) \partial L$$

$$C_L = -2aT \left(\frac{L^2}{2} - Ll_0 \right) + f(T)$$

$$\text{Si } L = l_0 \quad C_L = aT l_0^2 + f(T) = bT$$

$$f(T) = bT - aT l_0^2$$

$$C_L = -2aT \left(\frac{L^2}{2} - Ll_0 \right) + bT - aT l_0^2 =$$

$$= -2aT \left(\frac{L^2}{2} - Ll_0 + \frac{l_0^2}{2} \right) + bT =$$

$$= \boxed{bT - aT(L - l_0)^2}$$

b) Aumenta longitud, reversible e isoterma

$$l_0 = l_0 \quad l_f = \frac{3l_0}{2}$$

$$Tds = C_L dT - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L dL \Rightarrow ds = \frac{C_L}{T} dT - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L dL = -2aT(L - l_0) dL$$

$$\Delta S = - \int_{l_0}^{l_f} 2aT(L - l_0) dL = -2aT \int_{l_0}^{l_f} (L - l_0) dL = -2aT \left[\frac{L^2}{2} - Ll_0 \right]_{l_0}^{l_f} =$$

$$= -2aT \left[\frac{9l_0^2}{8} - \frac{3l_0^2}{2} - \frac{l_0^2}{2} + l_0^2 \right] = \boxed{-\frac{aTl_0^2}{4}}$$

$$\text{c) } ds = \frac{C_L}{T} dT - 2aT(L - l_0) dL$$

$$\int_{S_0}^S ds = \int_{T_0}^T (b - a(L - l_0)^2) dT - \int_{l_0}^L 2aT(L - l_0) dL = (b - a(L - l_0)^2)(T - T_0) - 2aT \left[\frac{L^2}{2} - Ll_0 \right]_{l_0}^L =$$

$$S = S_0 + b(T - T_0) - a(L - l_0)^2(T - T_0) - 2aT \left(\frac{L^2}{2} - Ll_0 + \frac{l_0^2}{2} \right) = \boxed{S_0 + b(T - T_0) - a(L - l_0)^2(2T - T_0)}$$

46) d) dS (Proceso adiabático)

$$dS = \frac{C_L}{T} dT - 2\alpha T(L-l_0) dL = 0$$

$$\frac{C_L}{T} dT = 2\alpha T(L-l_0) dL$$

$$(b-a(l-l_0)^2) dT = 2\alpha T(L-l_0) dL$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{2\alpha(L-l_0)}{b-a(L-l_0)^2} dL$$

$$\int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = \int_{l_i}^{l_f} \frac{2\alpha(L-l_0)}{b-a(L-l_0)^2} dL \Rightarrow \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = -\ln\left(\frac{b-a(l_f-l_0)^2}{b-a(l_i-l_0)^2}\right)$$

$$T_f = T_i \frac{b-a(l_i-l_0)^2}{b-a(l_f-l_0)^2}$$

47) Ley de Curie

$$M = \frac{CH}{T} \quad C_H = \frac{A + \mu_0 CH^2}{T^2} \quad A, C \text{ cte} \quad \begin{cases} P = -\mu_0 H \\ V = M \end{cases}$$

a) imanación isoterma y reversible

$$\delta Q = T dS = CH dT + \mu_0 T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H dH = -\mu_0 \frac{CH}{T} dH$$

$$Q = \int_{H_0}^H -\mu_0 \frac{CH}{T} dH = -\frac{\mu_0 C}{2T} (H^2 - H_0^2)$$

b) Desimanación adiabática reversible

$$dS = \frac{CH}{T} dT - \mu_0 \frac{CH}{T^2} dH = 0$$

$$CH dT = \mu_0 CH dH$$

$$\frac{A + \mu_0 CH^2}{T^2} dT = \mu_0 \frac{CH}{T} dH$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{\mu_0 CH}{A + \mu_0 CH^2} dH \Rightarrow \ln \frac{T_f}{T_0} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{A + \mu_0 CH_0^2}{A + \mu_0 CH^2} \right)$$

$$T_f = T_0 \left(\frac{A + \mu_0 CH_0^2}{A + \mu_0 CH^2} \right)^{1/2}$$

Ejercicios Termodinámica

Tema 14

48) ① Agua líquida $25^\circ\text{C} = 298\text{K}$

100 bar

----- Membrana rígida permeable

② Agua líquida $25^\circ\text{C} = 298\text{K}$

1 bar

El agua se desplazará desde el punto de mayor potencial químico al menor, hasta que se igualan.

$$d\mu = \left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T dP \Rightarrow \Delta\mu = \left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T \Delta P$$

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_T = \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = \frac{\partial V}{\partial n_i} > 0$$

$$\Delta\mu = \left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T \Delta P \Rightarrow$$

$$\mu_j - \mu_i = \left(\frac{\partial\mu}{\partial P}\right)_T (P_j - P_i) \quad P_j < P_i \Rightarrow \text{Disminuye presión}$$

$$< 0 \quad > 0 \quad < 0$$

El agua fluye del i al j, luego pasa del recipiente de mayor presión al de menor

49) Monofásica y multicomponente

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T, n_i} dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P, n_i} dT + \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{T, P, n_j} dn_i$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad \kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

$$dV = \alpha V dT - \kappa_T V dP + \sum_i \bar{v}_i dn_i$$

$$\sum_i \bar{v}_i n_i = V \Rightarrow dV = \sum_i \bar{v}_i dn_i + \sum_i n_i d\bar{v}_i$$

$$\alpha V dT - \kappa_T V dP + \sum_i \bar{v}_i dn_i = \sum_i \bar{v}_i dn_i + \sum_i n_i d\bar{v}_i$$

$$\alpha V dT - \kappa_T V dP = \sum_i n_i d\bar{v}_i$$

\Rightarrow

$$\Rightarrow \text{Como } c_i = \frac{n_i}{V}$$

$$\alpha dT - \kappa_T dP = \sum_i c_i d\bar{v}_i \Rightarrow$$

$$\sum_i c_i \bar{v}_i = 1 \Rightarrow 0 = \sum_i c_i d\bar{v}_i + \sum_i \bar{v}_i dc_i$$

$$\Rightarrow \alpha dT - \kappa_T dP + \sum_i \bar{v}_i dc_i = 0$$

□

SI ESTÁS LEYENDO ESTO SIGNIFICA QUE ESTÁS ESTUDIANDO, Y ESO SE MERECE UNA RECOMPENSA.

Abrir cuenta en N26



Disfruta 12 meses gratis de la cuenta bancaria premium N26 Smart con el código N26WUOLAH y accede a descuentos en tus marcas favoritas, pagos sin comisiones en cualquier moneda ¡y mucho más!

TIN 0%, TAE: -1,17% para un supuesto en el que se mantenga de forma constante durante un año un saldo diario de 5.000 €, aplicando un tipo de interés nominal anual de 0% y el coste mensual de la cuenta bancaria de 4,90 €/mes. La liquidación de la cuenta se realiza con periodicidad mensual.

N26 Tu Banco Móvil

50 a) $\sum_K n_K \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial n_K} \right)_{T,P,n_j} = 0$ Sistema monofásico

μ_i : variable intensiva \Rightarrow Función homogénea de grado 0 en n_K

$T = \text{Euler}$

$0 \mu_i = \sum_K n_K \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial n_K} \right) = 0 \quad \square$

b) $\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T,P} = \frac{U}{V}$ Sistema monofásico y monocompente

U : \Rightarrow Función homogénea de grado 1 en V

$1 \cdot U = V \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T,P} \Rightarrow \frac{U}{V} = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{T,P} \quad \square$

51 a) $l + f = z + c$

$l = z + c - f = 2 + 3 - 3 = 2 \text{ gdl}$

c : Componentes = 3 (KCl, NaCl, agua)

f : fases = 3 (Sal KCl, Sal NaCl, disolución)

b) $l + f = z + c$

$l = z + c - f = 2 + 3 - 5 = 0 \text{ gdl}$

c : Componentes = 3 (KCl, NaCl, agua)

f : fases = 5 (Sal KCl, Sal NaCl, Hielo, disolución, vapores)

52 a) $l = z + c - f = 2 + 2 - 2 = 2 \text{ gdl}$

c : Componentes = 2 (agua, neón)

f : fases = 2 (Agua, vapor)

b) $l = z + c - f = 2 + 2 - 2 = 2 \text{ gdl}$

c : Componentes = 2 (Agua y alcohol)

f : fases = 2 (Líquidos y vapores)

c) $l = z + c - f$
 c : Componentes = 3 (NH₃, HCl, Cloruro de Amonio)

f : fases = 2 (Sólido y gases)

1 reacción y 1 neutralidad

$l = z + c - f - r - n = 2 + 3 - 2 - 1 - 1 = 1 \text{ gdl}$



Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Ejercicios Termodinámica

Tema 14.2

53) T_{fusión} Hg = 234,1 K Δh_f = 2,34 kJ/mol
(1 atm)

1 mol Hg = 0,2 kg Hg

ρ_{HgS} = 14,19 g/cm³ ρ_{HgL} = 13,69 g/cm³

a) ΔS = ∫ $\frac{\delta Q}{T_F} = \frac{\Delta H}{T_F} = 10,00 \text{ J/mol K} \stackrel{n=1}{\Rightarrow} \boxed{10,00 \text{ J/K}}$

dU = Tds - PdV = dH - PdV

ΔU = ΔH - P(V_e - V_s) = ΔH - P m n ($\frac{1}{\rho_{HgL}} - \frac{1}{\rho_{HgS}}$) = 2339,95 J/mol $\stackrel{n=1}{\Rightarrow} \boxed{2,34 \text{ kJ/mol}}$

b) Fórmula de Clapeyron

$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta h_f}{T_f(V_e - V_s)} \Rightarrow \Delta T = \frac{T_f(V_e - V_s)}{\Delta h_f} \Delta P = \boxed{5,15 \cdot 10^{-3} \text{ K}}$

54) $\log P_S = 10,648 - \frac{2559}{T}$ $\log P_L = 7,540 - \frac{1511}{T}$

a) Equilibrio tres estados ⇒ Punto Triple

P_S = P_L = P_G ⇒ $10,648 - \frac{2559}{T} = 7,540 - \frac{1511}{T} \Rightarrow T = 337,19 \text{ K}$

P = 1745,00 mmHg

b) P = 101300 Pa = 760 mmHg

P < P_{PT} ⇒ **Fase sólida**

$T = \frac{2559}{10,648 - \log P} = \boxed{329,46 \text{ K}}$
(P en mmHg)

c) V_{vapor} >> V_{sólido}, V_{líquido} ⇒ PV = nRT

Sólido-Vapor Líquido-Vapor

$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T(V_g - V_0)} = \frac{L}{TV_g} = \frac{LP}{RT^2}$

$\Delta H_{\text{sublim}} = \frac{d(\log P)}{dT} \frac{RT^2}{\log e} = \boxed{48989 \text{ J/mol}}$ $\frac{2559}{T^2}$

$\frac{dP}{PdT} = \frac{L}{RT^2} = \frac{\Delta H}{RT^2} \Rightarrow \frac{d(\log P)}{dT} = \frac{\Delta H}{RT^2} \cdot \frac{1}{\ln 10}$

$\Delta H_{\text{vap}} = \frac{d(\log P)}{dT} \frac{RT^2}{\log e} = \boxed{28926 \text{ J/mol}}$ $\frac{1511}{T^2}$

$$(54) c) \Delta H_{fus} = \Delta H_{sub} - \Delta H_{vap} = \boxed{20063 \text{ J/mol}}$$



$$(55) \quad h = 2000 \text{ m}$$

$$1 \quad \Delta h_v = 2,26 \text{ kJ/g} \quad T = 17^\circ\text{C} = 290 \text{ K}$$

$$\text{aire gas ideal} \quad M_m = 29 \text{ g/mol} = 29 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$$

$$P_0 = 1 \text{ atm} \quad PV = nRT = \frac{m}{M_m} RT$$

$$dP = -\rho g dh \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{PM_m}{RT}$$

$$dP = -\frac{PM_m}{RT} g dh$$

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\int_{h_0}^h \frac{M_m}{RT} g dh \Rightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{M_m}{RT} g (h-h_0)$$

$$P = P_0 e^{-\frac{M_m}{RT} g (h-h_0)} \left\{ \begin{array}{l} h_0 = 0 \\ P_0 = 1 \text{ atm} \end{array} \right\} = 0,79 \text{ atm}$$

$$V_g \gg V_{liq}$$

Fórmula de Clapeyron

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta h}{TV} = \frac{\Delta h}{T} \frac{P}{nRT} = \frac{\Delta h}{RT^2} \frac{M_m P}{m} = \frac{\Delta h M_m P}{RT^2}$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{\Delta h M_m}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)$$

$$\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} = \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \frac{R}{\Delta h M_m}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} - \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \frac{R}{\Delta h M_m}$$

$$T = \left(\frac{1}{T_0} - \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \frac{R}{\Delta h M_m} \right)^{-1} = \boxed{287,5^\circ\text{C}}$$

(56)

$$M_{\text{agua}} = 18 \text{ g/mol}$$

$$1 \quad \Delta h_v = 3068,12 - 2,17T \text{ J/g}$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H_v}{TV} = \frac{\Delta H_v P}{T^2 R n} = \frac{\Delta h_v P}{T^2 R} M_m = \left(\frac{3068,12 P}{T^2 R} - \frac{2,17 P}{T R} \right) M_m$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \left[\frac{3068,12}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) - \frac{2,17}{R} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right] M_m \Rightarrow P = 3,28 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

57) $C_n = aT$ En la Temperatura Crítica $S_n = S_c$

$$C_s = bT^3$$

$$C_n = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = aT \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = a \Rightarrow S_n = aT$$

$$C_s = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = bT^3 \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right) = bT^2 \Rightarrow S_c = b \frac{T^3}{3}$$

$$aT = b \frac{T^3}{3} \Rightarrow a = \frac{bT^2}{3}$$

$$C_n = \frac{bT^3}{3} \quad C_s = bT^3$$

$$C_s = 3C_n \quad \square$$

58) 1ª Ecuación Ehrenfest:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{1}{VT} \frac{\Delta C_p}{\Delta \alpha} \quad \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{1}{VT} \frac{\Delta C_p}{\Delta \left(\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right)} = \frac{1}{VT} \frac{\Delta C_p}{\Delta \left(\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \right)}$$

$$= \frac{1}{T} \frac{\Delta C_p}{\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P} \quad \textcircled{1}$$

2ª Ecuación de Ehrenfest:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta \kappa_T} \quad \kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

$$\frac{dP}{dT} = -\frac{\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P}{\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T} \quad \textcircled{2}$$

Multiplicando ① y ②

$$\left(\frac{dP}{dT} \right)^2 = -\frac{1}{T} \frac{\Delta C_p}{\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T} \Rightarrow \Delta C_p = -T \left(\frac{dP}{dT} \right)^2 \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad \square$$

Reordenando ②

$$\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -\left(\frac{dP}{dT} \right) \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad \square$$

SI VAS A DEJAR DE ESTUDIAR PARA MIRAR EL MÓVIL, AL MENOS QUE SEA PARA LLEVARTE ALGO.

Abrir cuenta en N26



Disfruta de 12 meses gratis de la cuenta bancaria premium N26 Smart con el código N26WUOLAH. ¡Gestiona tu dinero desde el móvil y no vuelvas a pisar una sucursal!

TIN 0%, TAE: -1,17% para un supuesto en el que se mantenga de forma constante durante un año un saldo diario de 5.000 €, aplicando un tipo de interés nominal anual de 0% y el coste mensual de la cuenta bancaria de 4,90 €/mes. La liquidación de la cuenta se realiza con periodicidad mensual.

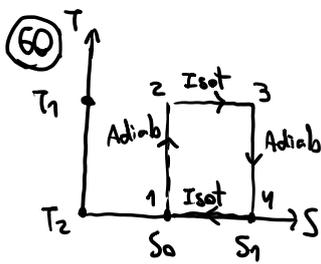
Ejercicios Termodinámica

Tema 15

(59) Ec. Estado $PV = aU + b(V) \Leftrightarrow U = \frac{PV}{a} - \frac{b(V)}{a} \quad dU = \frac{V}{a} dP$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{V}{a} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{V}{a} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \rightarrow 0 \quad \square$$

Relación de Maxwell $T \rightarrow 0K$
 $S \rightarrow 0K$



$$\Delta S_{\text{ciclo}} = \Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34} + \Delta S_{41} = 0 \quad (\text{Ciclo})$$

0 (Adiab) 0 (Adiab)

$$\Delta S_{23} = \frac{Q_{23}}{T} \quad \Delta S_{\text{ciclo}} = \Delta S_{23} \neq 0$$

$$\Delta S_{41} = 0 \quad (T=0K)$$

(61) Relación Mayer para gas ideal $C_p - C_v = NR$

Si $T \rightarrow 0K \Rightarrow C_p \rightarrow 0$
 $C_v \rightarrow 0 \Rightarrow C_p - C_v \rightarrow 0 \neq NR$ No se cumple

(62) $C(T,P) = a + bT - \frac{kP}{T}$

Proceso isóbaro

$$\lim_{T \rightarrow 0K} C = \lim_{T \rightarrow 0K} a + bT - \frac{kP}{T} = -\infty \neq 0$$

No es compatible con el 3º Principio

N26 Tu Banco Móvil



Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.