

HOJA DE EJERCICIOS 10.
Análisis Matemático.
CURSO 2021-2022.

1. Consideramos la 2-forma $\omega = dx \wedge dy + x dy \wedge dz$ y la siguiente función paramétrica:

$$\Phi : [0, 1]^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \Phi(u, v) = (u^2, uv, u + e^v) .$$

Calcula el pullback $\Phi^*\omega$ y la integral $\int_{\Phi} \omega$.

2. (1) Determina el valor de la constante c para el cual el siguiente campo de vectores en $\mathbb{R}^3$ tiene divergencia nula

$$\mathbf{F} = (cx + ze^{yz}, y, -2z) .$$

(2) Con ese valor de c , halla la 2-forma $\mathbf{F}^\flat$ (ejercicio 12 de la hoja 8) y calcula una forma de Pfaff ω tal que $d\omega = \mathbf{F}^\flat$. ¿Existe ω para otros valores de c ?

(3) Utiliza ω para dar un campo de vectores $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{rot} \mathbf{G}$ (ejercicio 9 de la hoja 9). ¿Existe un tal $\mathbf{G}$ para otros valores de c ?

(4) El método usado para obtener $\mathbf{G}$ siempre da como resultado un campo de vectores con la primera componente nula ¿Puedes explicar por qué?

3. En el abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definimos la siguiente forma de Pfaff:

$$\omega = \frac{x^2 + cy^2}{(x^2 + y^2)^2} (-y dx + x dy) .$$

- a) Demuestra que ω es cerrada, sea cual sea la constante c .
b) Demuestra que si $1 + c \neq 0$ entonces ω no es exacta en U .
-

4. Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ un subespacio vectorial de dimensión 2, con una base $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Consideramos una base diferente $B_2 = \{\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2\}$. Estudiar si estas dos bases inducen la misma orientación en V .
-

5. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie con una normal unitaria N . Tenemos una parametrización $\Phi(u, v) : R \rightarrow S$ y un difeomorfismo $\sigma(s, t) : R' \rightarrow R$. Consideramos la reparametrización $\Psi \equiv \Phi \circ \sigma : R' \rightarrow S$, es decir

$$\Psi(s, t) = \Phi(u, v)|_{(u,v)=\sigma(s,t)} .$$

Demuestra la identidad:

$$\det [N \mid \Psi_s \mid \Psi_t] = \det(D\sigma) \cdot \det [N \mid \Phi_u \mid \Phi_v] .$$

Deduce que, si Φ y Ψ son ambas compatibles con la misma normal N , entonces se tiene $\int_{\Phi} \Omega = \int_{\Psi} \Omega$ para toda 2-forma Ω cuyo dominio contenga la superficie S .

6. Consideramos el siguiente cilindro en $\mathbb{R}^3$:

$$S = \left\{ (x, y, z) : y^2 + z^2 = 1, -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4} \right\},$$

y la 2-forma $\Omega = 2 dx \wedge dy + 3 y |z| dz \wedge dx$.

Las partes de arriba y abajo de S :

$$S^+ = S \cap \{z \geq 0\}, \quad S^- = S \cap \{z \leq 0\},$$

las ponemos como $S^+ = \Phi(R)$ y $S^- = \Psi(R)$, siendo $R = [-1/4, 1/4] \times [-1, 1]$ y $\Phi, \Psi : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ las siguientes parametrizaciones:

$$\Phi(u, v) = (au, v, \sqrt{1-v^2}), \quad a \in \{1, -1\},$$

$$\Psi(u, v) = (bu, v, -\sqrt{1-v^2}), \quad b \in \{1, -1\}.$$

- a) Calcula los cuatro valores de la suma $\int_{\Phi} \Omega + \int_{\Psi} \Omega$ para las diferentes elecciones de las constantes a, b .
- b) Comprueba que $N \equiv (0, y, z)$ es una normal unitaria para S . Determina, razonadamente, para qué elección de a, b se verifica $\int_{\Phi} \Omega + \int_{\Psi} \Omega = \int_S \Omega$ cuando orientamos S por N .

7. Sea $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unidad, orientada por la normal exterior a la bola.

Calcula $\int_S \Omega$, convirtiéndola en un integral triple:

- a) $\Omega = (x + \log(1 + z^2) + x \cos(xy)) dy \wedge dz + (xyz \sin(xy) - z \cos(xy)) dx \wedge dy$.
- b) $\Omega = e^x dy \wedge dz - ye^x dz \wedge dx + (3x^2 z + 3y^2 z + z^3) dx \wedge dy$.

8. Consideramos la corona circular $U = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. De una función $f(x, y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ sabemos que:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 & \text{si } x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

calcula $\int_U d\omega$, siendo $\omega = -y f dx + x f dy$.

9. Se consideran el cilindro $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$ y la siguiente 1-forma ω en $\mathbb{R}^3$

$$\omega = \left(\sin(\pi z) e^{x^2+y^4} + y e^z \right) dx + z^2 dy + e^{x+y} dz.$$

- a) Comprueba que $N : C \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $N(x, y, z) = (x, y, 0)$ es una normal unitaria para C .
- b) Orientamos C por esta N . Explica por qué la parametrización

$$\Phi : R \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad R = (0, 2\pi) \times (0, 1), \quad \Phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

satisface $\int_{\Phi} \Omega = \int_C \Omega$ para toda 2-forma Ω cuyo dominio contenga a C . En particular, utiliza Φ para calcular $\int_C d\omega$. (Indicación: describe $\Phi|_{\partial R}$ como un camino poligonal).

- c) Consideramos otra parametrización $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por:

$$U = \{(u, v) : 1 < u^2 + v^2 < 4\}, \quad \Psi(u, v) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \sqrt{u^2 + v^2} - 1 \right).$$

Explica cómo utilizar Ψ para calcular la integral $\int_C \Omega$ de cualquier 2-forma Ω cuyo dominio contenga a C . En particular, úsala para calcular $\int_C d\omega$.

-
10. Sean $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unidad y $U \subseteq \mathbb{R}^3$ cualquier abierto espacial que la contenga. Sea N la normal unitaria exterior a la bola unidad.

Fijamos el rectángulo $R = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y la función $\Phi(u, v) : R \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$(x, y, z) = \Phi(u, v) \equiv (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v) .$$

- a) Comprueba que Φ parametriza S y es compatible con N . Explica por qué $\int_{(S, \nu)} \Omega = \int_{\Phi} \Omega$ para toda 2-forma Ω definida en U .
- b) Describe $\Phi|_{\partial R}$ como un camino poligonal y explica por qué para toda 1-forma ω , definida en U , se cumple la igualdad $\int_{\partial \Phi} \omega = 0$. Concluye que, si Ω es una 2-forma exacta en U , entonces $\int_S \Omega = 0$.
- c) Comprueba que el “campo gravitatorio”

$$\mathbf{F} \equiv \rho^{-3} \mathbf{r} \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (x, y, z) ,$$

definido en $U_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, tiene divergencia nula. Deduce que la correspondiente 2-forma $\mathbf{F}^\flat$ (problema 12 de la hoja 8 y problema 9 de la hoja 9) es cerrada en U_0 .

- d) Utiliza el resultado de b) para probar que $\mathbf{F}^\flat$ no es exacta en U . Explica por qué no existe ningún campo $\mathbf{G}$ que esté definido en un entorno de la esfera y cumpla $\text{rot } \mathbf{G} = \mathbf{F}$ en dicho entorno.
-

11. Sea C el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Consideramos los discos

$$D_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\} \quad \text{y} \quad D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\} .$$

Parametrizamos C por

$$\Phi : R \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad R = [0, 2\pi] \times [0, 1] \quad , \quad \Phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v) .$$

- a) Construye una parametrización Φ_0 de D_0 y otra Φ_1 de D_1 de tal manera que se cumpla

$$\int_{\Phi} d\omega = \int_{\Phi_0} d\omega + \int_{\Phi_1} d\omega ,$$

para toda forma de Pfaff (1-forma) ω en $\mathbb{R}^3$.

- b) Aplica lo anterior al cálculo de $\int_{\Phi} d\omega$ cuando $\omega = xy(z-1)dx + xzdy + \cos(xy)dz$.
-

12. Sea R un cono de altura h y cuya base es una región plana regular D . Demostrar que

$$\text{volumen}(R) = \frac{1}{3} h \cdot \text{área}(D) .$$

Indicación: suponer que el cono tiene el vértice en el origen de coordenadas y la base paralela al plano $z = 0$. Entonces considerar el campo $\vec{F} = (x, y, z)$.

13. Sean r, θ, z las coordenadas cilíndricas en $U = \mathbb{R}^3 \setminus (\text{eje } z)$. En particular $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- a) Determina la constante α para que el siguiente campo de vectores en U tenga divergencia nula:

$$r^\alpha (x, y, 0) = r^{\alpha+1} \nabla r .$$

- b) Una esfera inscrita en un cilindro circular recto se corta con dos planos paralelos perpendiculares al eje del cilindro. Demuestra que las porciones de la esfera y del cilindro comprendidas entre esos dos planos tienen igual área.

Nota: Arquímedes utilizó esta propiedad para calcular el área de la esfera y el volumen de la bola.