

HOJA DE EJERCICIOS 9
Análisis Matemático.
CURSO 2021-2022.

Problema 1. Calcula el “pull-back” $f^*\omega$ para cada una de las siguientes formas ω y funciones f :

- a) $f: \mathbb{R}_u^2 \rightarrow \mathbb{R}_x^3$, $f(u_1, u_2) = (u_1^2, u_2^2, e^{u_1 u_2})$, $\omega = x_2 dx_1 + (x_1 - x_2 - x_3) dx_2 - dx_3$.
 - b) $f: \mathbb{R}_{uv}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3$, $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, e^u)$, $\omega = (x^2 - y^2) dx \wedge dy - 3(x^2 + y^2) dy \wedge dz$.
 - c) $f: \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}_{xyz}^3$, $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $\omega = (x^2 + y^2 + z^2) dx + (x - \cos z) dy + (x^2 + y^2 - 1) dz$.
 - d) $f: \mathbb{R}_{xy}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xy}^2$, $f(x, y) = (ax - by, bx + ay)$, a, b constantes, $\omega = x dy - y dx$.
 - e) $f: \mathbb{R}_{r\theta}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{xy}^2$, $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $\omega = dx \wedge dy$.
-

Problema 2. Comprueba directamente que $\phi^* d\omega = d(\phi^* \omega)$:

$$\phi(u, v) \equiv (e^u, u^3 v, u \sin v) \quad , \quad \omega = z dx \wedge dy + xy dz \wedge dx + (y - z) dy \wedge dz .$$

Problema 3. Sean abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $U' \subseteq \mathbb{R}^s$. Sean $f: U \rightarrow U'$ al menos de clase $\mathcal{C}^2$ y ω una forma diferencial en U' .

- a) Demuestra que si ω es cerrada entonces $f^*\omega$ es también cerrada.
 - b) Demuestra que si ω es exacta entonces $f^*\omega$ también es exacta.
-

Problema 4. Para cada una de las siguientes formas de Pfaff decide si es exacta y, en caso afirmativo, encuentra un **potencial**, es decir una función escalar h tal que $\omega \equiv dh$.

- a) $\omega = (x + y) dx + (y - x) dy$ en $\mathbb{R}^2$.
 - b) $\omega = y \cos(yz) dx + (x \cos(yz) - xyz \sin(yz) + 2yz) dy + (y^2 - xy^2 \sin(yz)) dz$ en $\mathbb{R}^3$.
-

Problema 5. Halla una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de tal manera que la forma $\omega = x^2 y dx + f(x) dy$ sea exacta en $\mathbb{R}^2$.

Problema 6. Determina la constante a para que la siguiente 2-forma en $\mathbb{R}^3$ sea cerrada:

$$\omega = (1 + a z e^{yz}) dx \wedge dy + (1 - y e^{yz}) dx \wedge dz + (2y + z + \sin z) dy \wedge dz$$

Para ese valor de a , halla una 1-forma η tal que $\omega = d\eta$ ¿Existe η para otros valores de a ?

Problema 7. (a) Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, en el que tenemos una función $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ al menos de clase $\mathcal{C}^1$. Si $\phi(t): [a, b] \rightarrow U$ es un camino al menos $\mathcal{C}^1$, demuestra la igualdad:

$$\int_{\phi} df = f(b) - f(a) .$$

(b) Utiliza el resultado para demostrar que la siguiente forma de Pfaff NO es exacta:

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \quad , \quad \text{en } U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} .$$

Sugerencia: considera el camino $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$, en un intervalo $[a, b]$ adecuado.

(c) Comprueba que, sin embargo, la forma ω es cerrada en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(d) Dibuja el abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty) \times \{0\})$ y demuestra que ω es exacta en él.

Problema 8. En cada caso, dibuja la imagen $\phi(R)$, de la región R que se indica, y calcula $\int_{\phi|_R} \omega$:

a) $\phi(u, v) \equiv (\cos u, \sin u, v)$, $R = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$, $\omega = x^3 dz \wedge dx$.

b) $\phi(u, v) \equiv (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, $R = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)$, $\omega = z dx \wedge dy$.

Problema 9. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto. Para cada campo de vectores $\mathbf{F} \equiv (F_1, F_2, F_3)$ definido en U , consideramos las construcciones $\mathbf{F}^\flat$ y $\mathbf{F}^\sharp$ del problema 12 de la hoja 8. Consideramos también los operadores:

$$d_{1 \rightarrow 2} : \{ \text{1-formas en } U \} \longrightarrow \{ \text{2-formas en } U \} \quad , \quad d_{2 \rightarrow 3} : \{ \text{2-formas en } U \} \longrightarrow \{ \text{3-formas en } U \} \quad ,$$

dados por las respectivas derivadas exteriores. Demuestra las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} (\nabla f)^\flat &= df \quad , \\ d_{2 \rightarrow 3}(\mathbf{F}^\sharp) &= (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \quad , \\ d_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}^\flat) &= (\operatorname{rot} \mathbf{F})^\sharp \quad . \end{aligned}$$
