DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Analisis de Variable Real. Curso 13–14.
Sucesiones y series. Hoja 4

62 *Demostar*
i) que la sucesión cuyo término general es $x_n = \frac{3n^2+5}{n^2+n+1}$ *converge hacia* 3.
ii) que la sucesión $y_n = 3^{2n-1}$ *tiende a* $+\infty$.
iii) que la sucesión $z_n = 2 + (-1)^n$ *no tiene límite.*

63 *i) ¿Pueden existir dos sucesiones de números reales que tengan infinitos términos iguales y distinto límite?*
ii) ¿ Pueden existir dos sucesiones de números reales $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *tales que* $a_n \neq b_n$ *para todo* n *y con el mismo límite?*
iii) Una sucesión es convergente y tiene sus términos alternativamente positivos y negativos. ¿Cual es su límite?.

64 *Demostrar que si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *y* $\{b_n\}$ *es acotada entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
Poner ejemplos en los que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *pero* $\{b_n\}$ *es no acotada y que se verifique, respectivamente, que* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$ *no existe.*

65 *Probar que si* x_n *es una sucesión de números reales o complejos no nulos tales que*
i) $\lim_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}| < 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
ii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

66 *Calcular*
i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(3+6+\cdots+3n)$, *ii)* $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$, *iii)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n$, *iv)* $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$, *v)* $\lim_{n\to\infty} (n^{-2} + (n+1)^{-2} + \cdots + (2n)^{-2})$, *vi)* $\lim_{n\to\infty} \frac{3(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})}{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$, *vii)* $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{\frac{n+1}{2}}$, *viii)* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

67 *Probar que si* $x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ *donde* $P(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$ *y* $Q(z) = \sum_{k=0}^l b_k z^k$ *son polinomios con* $a_m > 0$, $b_l > 0$, *se tiene*
i) Si $m = l$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a_m}{b_l}$.
ii) si $m > l$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.
iii) si $m < l$ *entonces* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

68 *Sea* $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, *probar que* x_n *es monótona creciente y que*

$$x_{2^k} \geq \frac{k}{2}$$

y por tanto concluir que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.
Indicación: *agrupar los sumandos en* x_{2^k} *entre los inversos de dos potencias de 2 consecutivas.*

69 *Probar que la sucesión definida por*

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$$

es monótona creciente y acotada y calcular su límite.

70 *Probar que las siguientes sucesiones son monótonas y acotadas. Calcula su límite.*
i) $y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 3)$, $y_1 = 1$.
ii) $z_{n+1} = \sqrt{2z_n}$, $z_1 = 1$.

71 *Dado $a > 0$ sea*

$$s_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n + \frac{a}{s_n}), \quad s_1 > 0$$

Probar que $s_{n+1}^2 \geq a$, para $n \geq 1$, s_n es decreciente y converge a $\sqrt{a}$.

72 *Calcular el límite de la sucesión*

$$a_1 = \sqrt{a}, \quad a_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad a_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \ldots$$

siendo $a > 0$.

73 Límite superior e inferior de una sucesión

Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión acotada y definimos para $N \in \mathbb{N}$

$$a_N = \inf\{x_n,\ n \geq N\}, \qquad b_N = \sup\{x_n,\ n \geq N\}.$$

Demostrar que

i) a_N es monótona creciente, b_N es decreciente, $a_N \leq x_N \leq b_N$, para todo $N \in \mathbb{N}$.

Definimos el **límite inferior y superior** *de x_n como*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} a_N, \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{N\to\infty} b_N.$$

Probar que estan bien definidos.

ii) Probar que x_n converge si y sólo si $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

iii) Si $s > \limsup_{n\to\infty} x_n$ entonces, excepto posiblemente para una cantidad finita de índices, se tiene $x_n \leq s$.

Probar algo semejante para $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

iv) Si x_{n_k} es una subsucesión de x_n que converge a x_0 entonces $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq x_0 \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

v) Existe una subsucesión de x_n que converge a $\liminf_{n\to\infty} x_n$ y otra que converge a $\limsup_{n\to\infty} x_n$.

Por tanto $\liminf_{n\to\infty} x_n$ y $\limsup_{n\to\infty} x_n$ **son el infimo y el supremo, respecivamente de todos los puntos de acumulación** *de x_n.*

vi) Si $x_n \to x$ y $a > 0$ entonces $a^{x_n} \to a^x$ donde la exponencial está definida como en el Problema 38.

74 *Si a_n es una sucesión de números reales positivos,*

i) Demostrar que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Indicación: *Si $k = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ usar la propiedad iii) del Problema 73.*

ii) ¿Qué se puede deducir del límite de $\sqrt[n]{a_n}$ cuando existe el de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$?.

Dar un ejemplo de una sucesión para la que no exista el límite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ pero si el de $\sqrt[n]{a_n}$.

iii) Aplicar lo anterior al cálculo de los límites

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$$

75 La exponencial de base variable

Siguiendo las notaciones del Problema 38, sea $a > 0$.

i) Probar que si $0 < a < b$ y $x > 0$, entonces $a^x < b^x$. Si $x < 0$ probar que entonces $a^x > b^x$.

ii) Supongamos $x \in \mathbb{R}$ fijo. Probar que si a_n es monótona convergente a $a > 0$ entonces $a_n^x \to a^x$.

Usando el Problema 73 probar que si $a_n \to a > 0$ entonces $a_n^x \to a^x$.

Indicación: *Distinguir los casos $x > 0$, $x < 0$ y $x = 0$.*

iii) Si $x > 0$, probar que $a^x = \sup\{b^x,\ b < a\} = \inf\{c^x,\ a < c\}$.

Si $x < 0$, probar que $a^x = \inf\{b^x,\ b < a\} = \sup\{c^x,\ a < c\}$.

v) Probar que si a_n es monótona convergente a $a > 0$ y x_n es monótona convergente a x, entonces $a_n^{x_n} \to a^x$.

Usando el Problema 73 probar que si $a_n \to a > 0$ y $x_n \to x$, entonces $a_n^{x_n} \to a^x$.
vi) Extender el apartado anterior al caso en que los límites $a \in (0, \infty]$ y $x \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ (excepto los casos 1^∞ e ∞^0).

76 *Supongamos que una sucesión de numeros verifica:*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|, \quad n = 2, 3, 4 \dots$$

con $k \neq 1$.
i) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^{n-1}|x_2 - x_1|$$

ii) Demostrar que si $M > N$

$$|x_M - x_N| \leq \Big(\sum_{j=N-1}^{M-2} k^j \Big) |x_2 - x_1| = \frac{k^{N-1} - k^{M-1}}{1 - k} |x_2 - x_1|$$

iii) Concluir que si $0 < k < 1$ (decimos que la sucesión es **Contractiva***) entonces x_n tiene límite.*

77 *Usando que $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ probar que $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^{-n} = e$.*

78 *Usando que $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ y $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^{-n} = e$, probar*
i) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$.
Indicación: *Usar la parte entera: si $x \in \mathbb{R}$, $[x] \in \mathbb{Z}$ y $[x] \leq x < [x] + 1$*
ii) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ entonces $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$.
iii) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ entonces $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x_n}{a_n})^{a_n} = e^x$.
iv) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ y existe $\lim_{n\to\infty} a_n(x_n - 1) = x$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n^{a_n} = e^x$.

79 *Calcular*
i) $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^n$, ii) $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n^2})^n$, iii) $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n^2}$, iv) $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n^2})^n$, v) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n^2-5n+6}{n^2-2n+1})^{\frac{n^2+5}{n+2}}$, vi) $\lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2-5n+7}{8n^2+4n-1})^{\frac{5n-7}{3n}}$, vii) $\lim_{n\to\infty}(\frac{3n+1}{3n-7})^{5n}$, viii) $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{n}{n^2+1})^{\sqrt{n}}$.

80 *Si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es condicionalmente convergente, probar que la serie de los terminos positivos y la serie de los términos negativos de a_n son divergentes.*

81 *Si es $\sum_{n=1}^\infty a_n$ absolutamente convergente, ¿convergen las series*
i) $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$, ii) $\sum_{n=1}^\infty \sqrt{a_n}$ (supuesto $a_n \geq 0$), iii) $\sum_{n=1}^\infty \sqrt{a_{n+1}a_n}$ (supuesto $a_n \geq 0$), iv) $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{n}$, v) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ (supuesto $a_n \geq 0$), vi) $\sum_{n=1}^\infty a_n \operatorname{sen}(n)$, vii) $\sum_{n=1}^\infty \sqrt{\frac{a_n}{n}}$ (supuesto $a_n \geq 0$), viii) $\sum_{n=1}^\infty n^{\frac{1}{n}} a_n$, ix) $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{a_{n+1}}$?

¿Y si la convergencia es condicional?

82 *Si $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es absolutamente convergente y b_n es acotada, probar que $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ converge absolutamente.*

83 *i) Si $a_n \geq 0$ es monótona decreciente y $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge probar que entonces $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.*
ii) Si $a_n \geq 0$ y existe $\lim_{n\to\infty} n^p a_n$ con $p > 1$, entonces $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge. Probar que con $p = 1$ lo anterior es falso.

84 *i) Si $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ y $\sum_{n=1}^\infty b_n^2$ son convergentes probar que $\sum_{n=1}^\infty |a_n b_n|$ converge.*
Indicación: *Usar la desigualdad de Cauchy.*
ii) Si $\sum_{n=1}^\infty n^2 a_n^2$ converge, probar que $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ converge.

85 *Si las sumas parciales de* a_n *son acotadas, probar que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt}$ *es convergente para todo* $t > 0$.

86 Series telescópicas *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es telescópica si* $a_n = x_n - x_{n+1}$ *para cierta sucesión de números* x_n.
i) Probar que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es telescópica y* $x_n \to 0$ *entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = x_1$.
ii) Usar esto para probar que si $a \geq 0$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+1+a)} = \frac{1}{n_0 + a}$$

(observa el caso particular $n_0 = 1$, $a = 0, 1, 2$*).*

87 *Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las series*
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$, *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, *iv)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, *v)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, *vi)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, *vii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2(n+1)}}$, *viii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$, *ix)* $\sum_{n=1}^{\infty} n^n e^{-n}$, *x)* $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$, *xi)* $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^2}$, *xii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n)^3}$, *xiii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(an+b)^p}$, $a, b, p > 0$, *xiv)* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-n}$

88 *Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las series*
i) $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n - \operatorname{sen}(n))^{-1}$, *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos(n)}{n}$, *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} (n^n)^{-1}$, *iv)* $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1}$, *v)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n+n^2}$, *vi)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \operatorname{sen}(n)}$, *vii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}$, *viii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!-n!}{4^n}$, *ix)* $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$, *x)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n))^n}$, *xi)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$, *xii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$, *xiii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{2n} x^{2n}$

89 *Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las series*
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$, *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, *iv)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+3)!!}$, *v)* $\sum_{n=1}^{\infty} a^{2n+1} + a^{2n}$, *vi)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$, *vii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$, *viii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$, *ix)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$, *x)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}$, *xi)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$, *xii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$, $a > 0$.
Notación: $k!! = k(k-2)(k-4)\cdots$.

90 *Estudiar la convergencia absoluta y condicional de las series*
i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, *ii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$, *iii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$, *iv)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg}(\frac{1}{2^n})$, *v)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n \cos^2(\frac{a}{2^n})}$, *vi)* $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \operatorname{sen}^3(\frac{a}{3n+1})$, *vii)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos^3(3^n a)}{3^n}$

91 Teorema de Cauchy–Hadamard
Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ *fijo y consideremos la* **serie de potencias** $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.
Sea $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.
i) Probar que si $|z| < R$ *entonces la serie converge absolutamente.*
ii) Si $|z| > R$ *probar que la serie no converge.*
iii) si $z_0 \in \mathbb{C}$ *fijo, discutir para que* $z \in \mathbb{C}$ *converge la serie de potencias* $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.
iv) Estudia la convergencia de las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x+1)^n$.