DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Analisis de Variable Real. Curso 13–14.
Cálculo diferencial: optimización y representación gráfica. Hoja 7

148 *Resuelve estos problemas de optimización:*

1. *Dividir un número positivo en dos sumandos de tal forma que su producto sea lo mayor posible.*
2. *Torcer un trozo de alambre de longitud L de manera que forme un rectangulo cuya área sea la mayor posible.*
3. *¿Cuál de los triangulos rectángulos de perímetro dado igual a P tiene mayor área?*
4. *Con L metros de malla metálica hay que hace un vallado rectangular usando como cuarto lado una pared. ¿Qué forma ha de tener para que quepan mas ovejas?*
5. *Con un carton cuadrado de lado L hay que hacer una caja de base rectangular y abierta (sin tapa) quitando para ello cuadrados en las esquinas y doblando los salientes de la figura de cruz obtenida. ¿Cómo conseguir la caja de mayor volumen?*
6. *Hay que hacer un depósito de lata de base cuadrada, sin tapa y en el que quepan V litros de líquido. ¿Cómo hacerlo con la menor cantidad de lata?.*
7. *¿Cuál de los cilindros de volumen dado tienen menor superficie total?*
8. *Inscribir en una esfera dada un cilindro de volumen máximo.*
9. *Inscribir en una esfera dada un cilindro que tenga la mayor superficie lateral posible.*
10. *Inscribir en una esfera dada un cono de volumen máximo*
11. *Inscribir en una esfera dada un cono circular recto que tenga la mayor superficie lateral posible.*
12. *Circunscribir en torno a un cilindro dado un cono recto que tenga el menor volumen posible (los planos y centros de sus bases circulares coinciden).*
13. *De una hoja circular hay que cortar un sector tal que enrollado nos de un embudo con la mayor capacidad posible.*
14. *Un recipiente abierto esta formado por un cilindro terminado en su parte inferior por una semiesfera. ¿Cuáles han de ser las dimensiones para que sin variar la capacidad se emplee la menor cantidad de material?*
15. *Por un punto en $\mathbb{R}^2$ de coordenadas positivas pasa una recta que corta a los dos semiejes positivos. Encontar la recta para que el área sea mínima y determinar dicha área.*
16. *Inscribir en una elipse un rectangulo de lados paralelos a los ejes de la elipse y cuya área sea máxima.*
17. *Inscribir un rectángulo de mayor área posible entre la parábola $y = 2px^2$ y la recta $x = 2a$.*
18. *Hallar el punto de la gráfica de $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el que la tangente a la gráfica forme con el eje horizontal el ángulo con mayor valor absoluto posible.*
19. *Una persona tiene que ir de un punto A en la orilla de un rio de anchura constante, h, y recto, a un punto B en la otra. Sabiendo que la velocidad con la que se mueve por la orilla es k veces la velocidad con la que nada (en linea recta) determinar el ángulo con el que debe cruzar el rio para llegar lo antes posible.*

20. *En los puntos A y B hay dos focos luminosos de intensidades p y q. Hallar el punto menos iluminado del segmento AB, usando que la iluminacion en un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco luminoso.*

21. *Una lámpara esta colgada sobre el centro de una mesa circular de radio r. ¿A qué altura debe estar la lampara para que la iluminación en el borde sea lo mejor posible? (la iluminacion es proporcional al coseno del ángulo de incidencia e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco de luz).*

22. *En un momento dado un barco B se encuentra a 65 millas náuticas de otro A. B empieza a moverse en direccion oeste a 10 millas por hora y A lo hace hacia el sur con velocidad 15 millas por hora. Si ambos mantienen rumbo y velocidad encuentra el tiempo en que la distancia sea mínima y hallar dicha distancia.*

23. *Se quiere construir un recipiente cilíndrico de base circular y de 64 cm^3 de volumen. Hallar las dimensiones para que se use una cantidad mínima de material en los casos de que el recipiente sea abierto o sea cerrado.*

24. *En una fábrica el coste total de producción de x unidades diarias es de $1/4x^2+35x+25$ céntimos de euro, mientras que el precio de venta unitario es de $50-1/2x$ céntimos. Hallar la producción diaria óptima.*

25. *Hallar el punto de la parábola $y=4-x^2$ en la que la tangente determina con los ejes coordenados en el primer cuadrante, un triangulo de área mínima.*

26. *Hallar mínima distancia (Euclídea) del punto $(4,2)$ a la parábola $y^2=8x$.*

27. *Inscribir en un cono circular recto un cilindro circular recto, de manera que el volumen sea máximo. Idem con el área lateral. Idem con el área total.*

28. *Encontrar el área mínima de todos los triangulos isosceles que se pueden circunscribir en una circunferencia dada. Comprobar que dicho triangulo es equilátero.*

149 *Obtener la velocidad y la altura en cada momento, de un objeto de masa m que se mueve en vertical bajo la acción exclusiva de la gravedad (supuesta constante).*

150 *La probabilidad de que una molécula de masa m en un gas a temperatura T tenga una velocidad v viene dada por la distribucion de Maxwell-Boltzmann*

$$f(v)=4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}v^2e^{\frac{-mv^2}{2kT}}$$

donde k es la constante de Boltzmann.

Calcular la velocidad más probable, es decir, la velocidad para la que la probabilidad alcanza el máximo.

151 *Una persona está observando desde el suelo, con un telescopio, un avión que se aproxima a una velocidad de 15 km/minuto y a una altura constante de 10 km. ¿A qué ritmo está variando el ángulo del telescopio cuando la distancia horizontal del avión a esa persona es de 36 km? ¿Y cuando el avión pasa por la vertical de esa persona?*

152 *Un caudal de agua fluye en un tanque cónico al ritmo constante de 3 m^3 por segundo. El cono tiene 5 m de radio, 4 m de altura y está situado con el vértice hacia abajo. Sea $h(t)$ la altura del agua sobre el fondo en el instante t. Hallar $h'(t)$ (velocidad a la que sube el nivel del agua) y $h''(t)$ cuando el tanque está lleno hasta una altura de 2 m.*

153 *Encontrar dos números x, y de suma dada tales que*
i) xy *sea máximo*
ii) $x^2 + y^2$ *sea mínimo*
iii) x^2y^3 *sea máximo*

154 *En el plano se traza una recta desde el punto* $(0, a)$ *hasta el eje horizontal y desde ahí otra al punto* $(1, b)$*, siendo* $a, b > 0$.

Demostrar que la longitud total es mínima cuando los ángulos de ambas rectas con el eje horizontal son iguales.

155 *Representar graficamente las siguientes funciones.*

Para ello estudiar: dominio de definición, simetrías (par, impar, periódica), cortes con los ejes, limites en la frontera del dominio, continuidad, derivabilidad, crecimiento/decrecimiento, concavidad/convexidad, máximos/mínimos/puntos de inflexión, asíntotas (verticales, horizontales, oblícuas).

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f(t) = \frac{t^3}{(1+t)^2}$, $f(z) = \frac{z}{z^2-z-2}$, $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$, $f(t) = \frac{\ln(|t|)}{t}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x > 1/2 \\ -2x^2+1 & \text{si } x \leq 1/2, \end{cases}$ $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, $f(t) = e^{-t^2}$, $f(t) = t^n e^{-t}$, $f(t) = e^{-at}\cos(bt)$, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $f(z) = e^{\operatorname{sen}(z)}$