DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Analisis de Variable Real. Curso 13–14.
Aplicaciones de la integral. Hoja 9

• El **área de la región** limitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ con $g(x) \leq f(x)$ y $x \in [a, b]$ viene dada por

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Si la curva viene dada en forma paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $t \in [\alpha, \beta]$, ($a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$), entonces el area encerrada entre la curva y el eje x viene dada por

$$A = \int_a^b y\, dx = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\, dt.$$

180 *Dibujar la región limitada por las siguientes curvas y evaluar el área:*
i) $y = x^2$, $y = 2x+3$, *ii)* $y^2 - 27x = 0$, $x + y = 0$, *iii)* $y^2 = 2x$, $x - y = 4$, *iv)* $a^2x = a^2y - y^2$, $4x - y = 0$.

181 *Hallar*
i) El area de una circunferencia

$$x^2 + y^2 = R^2$$

ii) El area de una elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

182 *Hallar el área que encierra la intersección de las circunferencias de ecuaciones* $x^2 + y^2 = 4$ *y* $x^2 + y^2 = 4x$.

183 *Hallar el área acotada por la parábola* $y = 6 + 4x - x^2$ *y el segmento rectilíneo que une los puntos (-2,-6) y (4,6).*

• La **longitud de un arco** de la grafica de $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$ y f diferenciable viene dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Si la curva viene dada en forma paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $t \in [\alpha, \beta]$, ($a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$), entonces la longitud de arco viene dada por

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

184 *Calcular la longitud del arco de la curva* $y = x^{\frac{3}{2}}$ *entre dos puntos de abscisas* $0 < a < b$.

185 *Hallar la longitud de un arco de la cicloide* $x(t) = a(t - \operatorname{sen}(t))$, $y(t) = a(1 - \cos(t))$, *con* $t \in [0, 2\pi]$.

• El **volumen de un cuerpo** obtenido por revolución de la curva $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$, alrededor del eje x es

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Si la revolucion es respecto al eje y, el volumen es

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Si para cierto eje, las secciones del cuerpo transversales al eje tienen área $A(z)$ con $z \in [a, b]$, entonces el volumen del cuerpo es

$$V = \int_a^b A(z)\,dz, \qquad \textbf{Principio de Cavallieri}.$$

186 *Hallar el volumen de la esfera resultante al girar la circunferencia*

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

alrededor del eje X.

187 *Hallar el volumen del sólido generado (elipsoide) al girar la elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

alrededor del eje X.

188 *Hallar el volumen del toro engendrado al girar el círculo* $x^2 + (y - a)^2 \leq R^2$*, con* $0 < R < a$ *alrededor del eje X.*

189 *Calcular el volumen generado por la superficie limitada por* $y^2 = 8x$ *y la recta* $x = 2$*, al girar alrededor del eje Y.*

190 *Consideremos la porcion de área del primer cuadrante limitado por el eje X, la recta* $x = 1$ *y la hipérbola* $y = \frac{1}{x}$ *. Calcular el volumen engendrado por este área al girar alrededor del eje OX.*

191 *Deducir una fórmula para el volumen del tronco de cono en función de su altura h, con radio de la base inferior R y radio de la base superior r.*

Idem si la base inferior es un cuadrado de lado R y la superior de lado r.

192 *Hallar el volumen del sólido generado al girar el triángulo equilátero con vértices:* $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$*, con* $a > 0$*, alrededor del eje X.*

193 *La base de un sólido es el círculo de circunferencia* $x^2 + y^2 = r^2$*. Hallar el volumen del sólido, suponiendo que las secciones transversales perpendiculares al eje X son:*

i) Cuadrados *ii) Triángulos equiláteros.*

194 *La base de un sólido es la región limitada por la elipse:* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Hallar el volumen del sólido suponiendo que las secciones transversales perpendiculares al eje X son:

i) Triángulos rectángulos isósceles, cada uno con la hipotenusa sobre el plano XY.

ii) Cuadrados.

iii) Triángulos de altura 2.

• El **area lateral de una superfice** que resulta por revolucion de la curva $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$, alrededor del eje x es

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Si la curva viene dada en forma paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $t \in [\alpha, \beta]$, $(a = x(\alpha), b = x(\beta))$, entonces el area lateral viene dada por

$$A = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

195 *Hallar el area lateral de la esfera resultante al girar la circunferencia*

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

alrededor del eje X.

196 *i) Sea $A(R)$ el área de una circunferencia de radio R. Calcula $L(R) := A'(R)$ e interpreta el resultado.*
ii) Sea $V(R)$ es volumen de la esfera de radio R. Calcula $S(R) := V'(R)$ e interpreta el resultado.

197 *Hallar el area lateral del elipsoide resultante de girar la elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

198 *Hallar el area lateral de la superficie resultante de girar el arco de cicloide $x(t) = a(t - \operatorname{sen}(t))$, $y(t) = a(1 - \cos(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$ alrededor del eje X.*

199 *Se construye un espejo parabólico girando $y = A\sqrt{x}$, con $A > 0$ y $0 \leq x \leq a$, alrededor del eje X. Calcular la superficie del espejo.*

- **Masa y centro de masas**

200 *Una barra que ocupa el intervalo $[a, b]$ tiene densidad variable, $\rho(x)$ (gramos/cm) en x. Sea $x_0, x_1, \ldots, x_N$ una partición de $[a, b]$ y sea $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_N$ números de muestra con $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$.*

Comprueba que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \rho(\tilde{x}_i)(x_i - x_{i-1})$ es una aproximación de la masa total de la barra y que la masa exacta debe venir dada por $\displaystyle\int_a^b \rho(x)\,dx$.

201 *Supongamos que tenemos N partículas en el eje X situadas en los puntos $x_1, x_2, \ldots x_N \in [a, b]$. Si la masa de cada partícula es $m_1, m_2, \ldots, m_N$, entonces el centro de masas (centro de gravedad) del conjunto de las N partículas viene dado por la fórmula*

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} x_i m_i \in [a, b]$$

donde $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ es la masa total.

Supongamos ahora que tenemos una varilla con densidad variable $\rho(x)$ que ocupa el intervalo $[a, b]$. Si hacemos una particion del intervalo $[a, b]$ con los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y tomamos $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ números de muestra con $\tilde{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, una aproximación del centro de masas viene dado por

$$\bar{x} \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i \rho(\tilde{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

de forma que en el límite podemos escribir

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_a^b x\rho(x)\,dx \in [a, b].$$

i) Calcular la masa y centro de gravedad de una varilla que ocupa el intervalo $[0, 2]$ y tiene por densidad $\rho(x) = 1 + x$.
ii) ¿Cuál es el centro de masas de una varilla que ocupa el intervalo $[-1, 1]$ y tiene una densidad $\rho(x) = 3 + \cos(x)$?.

• **Cinemática**

Si un cuerpo se mueve en linea recta con aceleración $a(t)$ con $t \in [a, b]$ entonces su velocidad en cada instante es $v(t) = v_0 + \int_a^t a(s)\,ds$ y el espacio recorrido hasta el tiempo t es $e(t) = \int_a^t v(s)\,ds$.

202 *Con las notaciones anteriores,*
i) Probar que la variación de velocidad en ese intervalo de tiempo es

$$\Delta V = \int_a^b a(s)\,ds$$

y que la aceleración media es $a_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b a(s)\,ds$ *y que en algún momento se ha alcanzado.*
ii) Probar que la distancia final a la posición inicial es

$$\Delta e = \int_a^b v(s)\,ds$$

y que la velocidad media es $v_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(s)\,ds$ *y que en algún momento se ha alcanzado.*
iii) Probar que la distancia total recorrida es

$$D = \int_a^b |v(s)|\,ds$$

203 *Un cuerpo se mueve en linea recta con velocidad* $v(t) = 3t^2$*. Calcular la distancia recorrida en el intervalo de tiempo* $t \in [1, 2]$*.*

204 *La velocidad de un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con velocidad inicial* $v_0 > 0$ *es* $v(t) = v_0 - gt$*, siendo* g *la aceleración de la gravedad y* t *el tiempo.*

Calcular
i) El tiempo que se mantiene subiendo el cuerpo.
ii) La distancia a la posición inicial en función de t *y la altura máxima que alcanza.*

205 *Un cuerpo se mueve en linea recta con una velocidad* $v(t) = te^{-0{,}01t}$ *(m/s).*

Hallar la distancia recorrida desde que comienza a moverse hasta que se para por completo.

• **Trabajo**

Si en cada punto de un segmento $x \in [a, b]$ actua una fuerza de magnitud $f(x)$, el trabajo necesario para mover una partícula entre a y b es

$$W = \int_a^b f(x)\,dx.$$

206 *La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre una masa* m *a una distancia* r *del centro de la Tierra viene dada por la fórmula de Newton:* $F = -G\dfrac{mM}{r^2}$*, donde* M *es la masa de la Tierra y* G *es la constante gravitacional. Hallar el trabajo realizado por la gravedad al llevar en linea recta una masa* m *desde* $r = r_1$ *a* $r = r_2$*.*

Calcular el trabajo necesario para llevar una particula, en linea recta, desde $r = r_0$ *hasta* $r = \infty$*. Este valor, se llama Potencial Gravitatorio en* $r = r_0$*.*