DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
Analisis de Variable Real. Curso 15–16.
Los números reales y la propiedad de supremo. Hoja 2

26 *Probar que si* $A \subset \mathbb{R}$ *es acotado superiormente, entonces* $\alpha = \sup(A)$ *se caracteriza por que*
i) α *es una cota superior de* A
ii) Para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $x \in A$ *tal que* $\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha$.
Enunciar y demostrar una propiedad análoga para el infimo de un conjunto.

27 *Supongamos que* $E \subset F \subset \mathbb{R}$ *y* $E \neq \emptyset$.
i) Probar que si F *es acotado superiormente, entonces* E *tambien lo es y que* $\sup(E) \leq \sup(F)$.
ii) Probar que si F *es acotado inferiormente, entonces* E *tambien lo es y que* $\inf(F) \leq \inf(E)$.

28 *Sean* $A, B \subset \mathbb{R}$ *y no vacios y acotados superiormente. Probar que*

$$\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$$

$$\sup(A \cap B) \leq \inf\{\sup(A), \sup(B)\}$$

y con un ejemplo muestra que en general no se da "=". *Demostrar algo semejante para el ínfimo.*

29 *i) Probar que todo conjunto finito de* $\mathbb{R}$ *contiene a su supremo y a su ínfimo.*
ii) Probar que si una cota superior pertenece al conjunto entonces esa cota es el supremo. Demostrar algo semejante para el ínfimo.
Notación: *Cuando el supremo (o el ínfimo) de un conjunto, pertenece al conjunto, se llama* **máximo** *del conjunto (respectivamente,* **mínimo***).*

30 *Demostrar que si* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ *entonces el ínfimo de este conjunto es* 0 *y deducir que si* $|a - b| < \varepsilon$ *para todo* $\varepsilon > 0$, *entonces* $a = b$.

31 *i) Probar que* $\inf\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = 0$ *y que por tanto para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n} \in (0, \varepsilon).$$

Indicación: *Usar que* $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
ii) Probar lo mismo para $\{\frac{x}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$ *con* $x > 0$.
iii) Si $x < 0$, *probar que* $\sup\{\frac{x}{n},\ n \in \mathbb{N}\} = 0$ *y que por tanto para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_0$,

$$\frac{x}{n} \in (-\varepsilon, 0).$$

iv) Probar que para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geq n_0$,

$$\frac{(-1)^n}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

32 *Demostrar que si* $a, x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, *verifican*

$$a \leq x \leq a + \frac{y}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $x = a$.

33 *Como consecuencia de la propiedad Arquimediana de* $\mathbb{R}$ *probar que*

$$\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1]$$

(unión disjunta dos a dos) y si $x > 0$

$$\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} [nx, (n+1)x) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} (nx, (n+1)x]$$

(unión disjunta dos a dos).

34 *Sean x e y números reales tales que $x > 1$, $y > 0$.*
i) Demostrar que existe un numero $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$y < x^n$$

Indicación: *Para $y < 1$ o $y = 1$ es fácil. Si $y > 1$ argumentar por reducción al absurdo. En este caso utiliza que si $0 < \varepsilon < x - 1$ entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $x^m + \varepsilon < x^{m+1}$.*
ii) Concluye la **Propiedad Arquimediana del producto***: existe un único $p \in \mathbb{Z}$ tal que*

$$x^{p-1} \leq y < x^p \qquad (\text{ó} \quad x^{p-1} < y \leq x^p)$$

Indicación: *Para $y = 1$ es fácil. Para $y > 1$, usando i), considera el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N},\ y < x^n\}$ y usa el Buen Orden de $\mathbb{N}$. Para $0 < y < 1$ reducelo al caso anterior.*
iii) Concluye qye

$$(0, \infty) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [x^{p-1}, x^p)$$

(unión disjunta dos a dos).

Modifica ligeramente los argumentos anteriores para probar que

$$(0, \infty) = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} (x^{p-1}, x^p]$$

(unión disjunta dos a dos).

35 *i) Se llama* suma aritmética *de dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ al conjunto*

$$A + B = \{x + y,\ x \in A,\ y \in B\}.$$

Demostrar que si A y B estan acotados superiormente entonces $A + B$ también y se tiene

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Demostrar algo semejante para el ínfimo.
ii) Se llama producto aritmético *de dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ al conjunto*

$$A.B = \{xy,\ x \in A,\ y \in B\}.$$

Demostrar que si A y B estan acotados superiormente y compuestos de numeros positivos, entonces $A.B$ también y se tiene

$$\sup(A.B) = \sup(A) \sup(B).$$

Demostrar algo semejante para el ínfimo.
iii) Se llama potencia aritmética *del conjunto $A \subset \mathbb{R}$ al conjunto $A^n = \{x^n,\ x \in A,\}$, con $n \in \mathbb{N}$ fijo. ¿Es A^2 igual a $A.A$?.*

Demostrar que si A es acotado superiormente y compuesto de numeros positivos, entonces A^n también y se tiene

$$\sup(A^n) = \sup(A)^n.$$

Demostrar algo semejante para el ínfimo.

36 *Si $x \in \mathbb{R}$, probar que para todo $\varepsilon > 0$ existen $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tales que*

$$r_1 \in (x - \varepsilon, x), \quad r_2 \in (x, x + \varepsilon).$$

Concluir que de hecho hay infinitos números como r_1 y r_2. Hacer lo mismo para números irracionales.

Concluir que en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$ no hay un "numero siguiente" ni un "número anterior" a un número dado.

37 *Sea $n \in \mathbb{N}$.*
i) Si n es par y $a > 0$ probar que entonces a tiene exactamente dos raices n-ésismas reales, una opuesta de la otra, que representamos por $\pm \sqrt[n]{a}$. Si además $0 \leq a_1 < a_2$ entonces $\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_2}$. Si $a < 0$ entonces no tiene raices n-ésismas reales.
ii) Si n es impar y $a \in \mathbb{R}$ probar que a tiene exactamente una raiz n-ésisma real, con el mismo signo que a. Si además $a_1 < a_2$ entonces $\sqrt[n]{a_1} < \sqrt[n]{a_2}$.

38 Exponentes enteros y racionales
i) Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, y $m \in \mathbb{N}$ definimos

$$a^m = \overbrace{a \cdots a}^{m}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} = (\frac{1}{a})^m.$$

Probar que $a^n a^m = a^{n+m}$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}$. Probar que $(a^n)^m = a^{nm}$ para todos $n, m \in \mathbb{Z}$. Probar que $(ab)^m = a^m b^m$ para todos $a, b \neq 0$ y $m \in \mathbb{Z}$.
ii) Si $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

con $m \in \mathbb{Z}$. Probar que la definición de $a^{\frac{m}{n}}$ es consistente para todas las fracciones que representan al mismo número racional y por tanto a^r está bien definido para $r \in \mathbb{Q}$.

Probar que $a^r a^s = a^{r+s}$ para todos $r, s \in \mathbb{Q}$ y $a^0 = 1$. Probar que $(ab)^r = a^r b^r$ para todos $a, b \neq 0$ y $r \in \mathbb{Q}$. Probar que $(a^r)^s = a^{rs}$ para todos $r, s \in \mathbb{Q}$.
iii) Si $0 < a < 1$, probar que si $r < s$ entonces $a^r > a^s$ mientras que si $a > 1$ y $r < s$ entonces $a^r < a^s$ para todos $r, s \in \mathbb{Q}$.

39 La exponencial real

Probar que si $x \in \mathbb{R}$ y llamamos $I_x = \{r \in \mathbb{Q},\ r < x\}$ y $S_x = \{r \in \mathbb{Q},\ r > x\}$ entonces estos conjuntos son no vacios y

$$x = \sup I_x = \inf S_x.$$

Concluir que si $a > 1$ y definimos

$$a^x = \sup\{a^r,\ r \in I_x\}$$

entonces $a^x = \inf\{a^r,\ r \in S_x\}$ y se tiene $a^x a^y = a^{x+y}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$, $a^0 = 1$ y si $x < y$ entonces $a^x < a^y$. Probar que $(a^x)^y = a^{xy}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$ y que $(ab)^x = a^x b^x$ para todoa $a, b > 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

Si $0 < a < 1$ obtener un resultado semejante definiendo

$$a^x = \inf\{a^r,\ r \in I_x\}.$$

Prueba que es este caso $a^x = \frac{1}{(a^{-1})^x}$.

40 *Probar que si $A, B \subset \mathbb{R}$ son no vacios y tales que $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \emptyset$ y $a < b$ para todos $a \in A$, $b \in B$, entonces existe un único número real γ tal que $a \leq \gamma \leq b$ para todos $a \in A$, $b \in B$.*

41 *Determinar los conjuntos*
i) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n})$, ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n})$ iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[1+\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}]$, iv) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[2-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}]$, v) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(2-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n})$, vi) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-n, n)$

42 *Hallar el supremo y el infimo de*
i) $\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, ii) $(a,b) = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$, iii) $\{x \in \mathbb{R},\ x^2+x+1 \geq 0\}$, iv) $\{x \in \mathbb{R},\ x^2+x-1 < 0\}$, v) $\{x \in \mathbb{R},\ x < 0,\ x^2+x+1 \geq 0\}$, vi) $\{\frac{1}{n}+(-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$, vii) $\{\frac{1}{n}-\frac{1}{m},\ n, m \in \mathbb{N}\}$.

43 *Sea $\{(a_n, b_n),\ n \in \mathbb{N}\}$ una familia de intervalos en $\mathbb{R}$ y sea $a = \inf_n a_n$, $b = \sup_n b_n$.*
i) Demostrar que $\bigcup_n (a_n, b_n) \subset (a, b)$
ii) Demostrar que si $(a_{n+1}, b_{n+1}) \supset (a_n, b_n)$ entonces $\bigcup_n (a_n, b_n) = (a, b)$
iii) Probar con un ejemplo que si $\alpha = \sup_n a_n$, $\beta = \inf_n b_n$, en general no es cierto que $\bigcap_n (a_n, b_n) = (\alpha, \beta)$ aunque $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subset (a_n, b_n)$.