ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. HOJA DE PROBLEMAS 1.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN DIMENSIÓN UNO.

Existencia y unicidad.

1. Estudiar la existencia (local y global) y la unicidad de los siguientes problemas de valor inicial:

1. $x'(t) = a\,x(t)$, $x(0) = x_0$;
2. $x'(t) = x(t)^2$, $x(0) = x_0$;
3. $x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$, $x(0) = x_0$.

Identificar ejemplos de las siguientes situaciones:

- existe solución localmente, pero no globalmente (para todo t);
- existen infinitas soluciones, y por tanto no hay unicidad;
- existe solución global y es única.

En todos los ejemplos precedentes la función f que define la ecuación es continua. En general, si f no es continua, no hay garantía de que exista alguna solución:

2. Probar que no existen soluciones del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = g(x(t)), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

que estén definidas en un entorno de $t = 0$, donde $g(x) = 1$ si $x \geq 0$, y $g(x) = -1$ si $x < 0$.

3. Sea $f \in C^1(U)$, y sean c un cero de f y $x > c$ tales que $f(y) \neq 0$ para $y \in (c, x)$. Probar que entonces

$$\int_c^x \frac{1}{f(y)} dy = \pm\infty.$$

Concluir que si f es de clase C^1 y tiene ceros aislados entonces (2) tiene solución única.

La desigualdad de Gronwall en el caso unidimensional. Unicidad

4. Sea $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que

$$u'(t) \leq a\,u(t)$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$. Probar que entonces

$$u(t) \leq e^{a(t-t_0)} u(t_0)$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Indicación: considerar la función $v(t) = u(t)e^{-at}$ y comprobar que su derivada es negativa.

5. Proposición (desigualdad de Gronwall) Sea $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que

$$|x'(t)| \leq a\,|x(t)|,\ t \in [t_0, t_1]$$

para cierta constante $a > 0$. Entonces

$$|x(t)| \leq e^{a(t-t_0)} |x(t_0)|$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Indicación: aplicar el ejercicio anterior a la función $u(t) = |x(t)|^2$.

6. Proposición (Unicidad local) Si f es localmente Lipschitz entonces, para todo $x_0 \in U$, las soluciones del p.v.i. (2) son localmente únicas (en el sentido de que si dos soluciones de $x' = f(x)$ coinciden en un t_0 entonces son iguales en el intervalo común en que ambas estén definidas).

Indicación: si x_1, x_2 son dos tales soluciones, aplicar la desigualdad de Gronwall a $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$, usando que f es Lipschitz en cualquier intervalo compacto contenido en el intervalo común en donde x_1, x_2 están definidas.

Algunas ecuaciones con soluciones explícitas.

7. Encontrar una fórmula para las soluciones de la ecuación de variables separables

$$x'(t) = g(t)f(x(t)).$$

8. Resolver la ecuación $x'(t) = g(t)\tan x$.

9. Resolver la ecuación lineal homogénea

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in I \end{cases}$$

siendo a una función continua definida en un intervalo I

10. Resolver la ecuación $x'(t) = \operatorname{sen}(t)x(t)$.

11. Usando "variación de las constantes", resolver la ecuación lineal no homogénea

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}, t_0 \in I, \end{cases}$$

donde $a, b \in C(I)$. Probar que la solución es única.

12. Supongamos que $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es periódica de período $T > 0$, y consideremos la ecuación

$$x'(t) = a(t)x(t).$$

Para $t \in \mathbb{R}$ escribamos $t = kT + \tau$, con $k \in \mathbb{Z}$, $\tau \in [0, T)$. Probar que toda solución de esta ecuación satisface

$$x(t) = e^{k\langle a\rangle}x(\tau), \text{ donde } \langle a\rangle = \int_0^T a(s)ds.$$

Probar además que:

1. Si $\langle a\rangle < 0$ entonces toda solución tiende, cuando $t \to \infty$, a la solución estacionaria.
2. Si $\langle a\rangle > 0$ entonces toda solución distinta de la estacionaria tiende a $\pm\infty$.
3. Si $\langle a\rangle = 0$ entonces todas las soluciones son periódicas de período T.