ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
CURSO 2015-2016
HOJA 5

1. ¿Pueden ser $f(x) = x$ y $g(x) = e^x$ soluciones de la ecuación

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

donde $a_1(x)$ y $a_2(x)$ son funciones continuas, en el intervalo $(0, 2)$? ¿Y en $(-6, -1)$?

2. Reduce el orden de la ecuación diferencial

$$xy'' + 2y' + xy = 0, \qquad \text{con } x > 0,$$

y resuélvela sabiendo que $y_1 = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es una solución particular.

3. Halla la solución general de la ecuación diferencial

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0, \qquad \text{con } x > 0,$$

buscando previamente una solución particular de tipo exponencial.

4. Halla la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$
b) $y'' - y' - 6y = 0$
c) $4y'' + 8y' + 3y = 0$
d) $y''' - 5y'' + 4y = 0$
e) $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$
f) $y'' - 4y' + 4y = 0$
g) $y'' + 4y' + 5y = 0$
h) $y'' + 6y' + 11y = 0$
i) $y''' + 6y' + 20y = 0$
j) $y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0$

5. Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales:

a) $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$
b) $y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 1$
c) $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0$

6. Utiliza el método de variación de las constantes para encontrar una solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' + 3y' + 2y = 4e^x$
b) $y''' + y' = \operatorname{cosec} x$
c) $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$
d) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \log x$

7. Halla la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y'' - y' - 6y = 2 \operatorname{sen} 3x$
b) $y'' + y = x \operatorname{sen} x$
c) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \operatorname{sen} x$
d) $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$
e) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^x - xe^{2x}$
f) $x^2y'' - 6x^2y' + 9x^2y = e^{3x} \quad \text{con } x > 0$

8. Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales:

a) $y'' + 4y = 2x, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 2$
b) $y'' + 3y' + 2y = e^x, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 3$
c) $y''' + y'' = x + e^{-x}, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = -3$

9. Indica, para las siguientes ecuaciones diferenciales, cuál es la forma de la función y_p que hay que utilizar para encontrar una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados. No es preciso determinar los valores de los coeficientes.

a) $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$

b) $y^{(5)} - y^{(3)} = e^x + 2x^2 - 5$

c) $y'' - 6y' + 13y = xe^x \operatorname{sen} 2x$

d) $y''' - 5y'' + 4y = e^{2x} - e^{3x}$

10. Una objeto de 400 g de masa cuelga de un muelle. En el punto de equilibrio el muelle sufre un alargamiento de 245 cm. Se tira del muelle hacia abajo 10 cm y cuando se suelta sale dirigido hacia arriba a una velocidad de $\sqrt{84}$ cm/s. Indica cuál es la ecuación del movimiento suponiendo que no hay amortiguamiento y resuélvela. Expresa la solución en la forma amplitud fase.

11. Una objeto de masa 0,5 kg se fija a un resorte lo que hace que se estire 0,98 m al llegar al punto de equilibrio. Se desplaza el objeto 1 m hacia abajo y se suelta. Determina el movimiento del objeto si el sistema se encuentra en un medio que tiene una constante de amortiguamiento de 1 N s/m, y está sometido a una fuerza externa de $2\cos(2t)$ N.

12. Un objeto que flota en agua sufre un empuje hacia arriba igual al peso del agua que desplaza. Un pájaro de masa m está posado en una boya cilíndrica de densidad ρ, radio R y altura h, que está flotando en reposo. ¿Que proporción de la boya está por debajo de la superficie del agua?

El pájaro sale volando. Demuestra que ahora la boya se mueve hacia arriba y hacia abajo, y que la altura de la parte de la boya sumergida oscila alrededor de ρh con amplitud $\frac{m}{\pi R^2}$ y periodo $2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{g}}$.

13. La ecuación diferencial

$$y'' + \lambda y' + \omega^2 y = 0$$

donde λ y ω son constantes, nos proporciona un modelo de la vibración de una copa de vino. Supongamos que cuando se golpea la copa esta vibra a 660 hercios. Demuestra que $\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2} = 2640\pi$.

Si el sonido tarda 3 segundos en apagarse, y esto ocurre cuando las vibraciones originales se han reducido a la centésima parte de su nivel inicial, demuestra que $\lambda = \dfrac{2\log 100}{3}$.

La copa sólo se puede deformar hasta un valor de $y \approx 1$. Un tono puro con una frecuencia de 660 hercios y una potencia de D decibelios dirigida a la copa produce una fuerza externa

$$F_e(t) = \frac{10^{(D/10)-8}}{3}\cos(1320\pi)t.$$

¿Qué potencia debe tener dicho sonido, es decir cuál debe ser el valor de D, para que la copa se rompa?

14. Consideremos un circuito eléctrico formado por una resistencia de 10 ohmios, una autoinducción de 0,1 henrios y un condensador de 2×10^{-3} faradios. Inicialmente, cuando la intensidad de la corriente y la carga del circuito son nulas, se conecta a una fuente externa que le proporciona una corriente alterna de 122 voltios con una frecuencia de 10 hercios. Determina la impedancia, la reactancia y la intensidad de la corriente en el circuito

15. Un circuito eléctrico está formado por una autionducción de 0,1 henrios y un condensador de 0,1 faradios. El condensador falla si su carga supera los 2 culombios. Supongamos que inicialmente no hay ninguna carga en el condensador y no hay corriente en el circuito. Se conecta el circuito a una fuente con una corriente alterna de $(1/10)\cos 10t$ voltios. Determina la carga y si el condensador falla.