

CAMPOS CONSERVATIVOS. FUNCIÓN POTENCIAL

1. Sea $\vec{F} = (4xy - 3x^2z^2, 2x^2, -2x^3z)$. Demuestre que $\int_C \vec{F} d\vec{l}$ es independiente de la trayectoria C.
2. Dado el campo vectorial $\vec{F} = (3x^2 + 2y - y^2e^x, 2x - 2ye^x)$. ¿Es posible afirmar que $\int_C \vec{F} d\vec{l}$ es nula si C está definida por $\vec{r}_{(t)}$ que es una curva simple cerrada?

Sol. Si

3. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el campo vectorial $\vec{F} = (axy - z^3; (a - 2)x^2; (a - 2)xz^2)$ es el gradiente de una función? Para esos valores, calcule la función potencial.

Sol. $a=4$ $f(x; y; z) = 2x^2y - z^3x + k$

4. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el campo vectorial $\vec{F} = (z; az^2 + 1; 10zy + x)$ es el gradiente de una función? Para esos valores, calcule la función potencial.

5. Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F} = (2xy; x^2 + z; y)$ al desplazar una partícula desde el origen de coordenadas hasta el punto (2; 0; 8), siguiendo cualquier trayectoria C que una dichos puntos.

Sol. $\vec{F}$ es conservativo, su función potencial es $f(x; y; z) = x^2y + zy + k$, $W = 0$

6. Determine en los siguientes ejemplos cuándo el campo vectorial $\vec{F}$ es el gradiente de un campo escalar. En los casos en los que $\vec{F}$ sea conservativo, halle la correspondiente función potencial.

- a. $\vec{F} = (x; y)$
- b. $\vec{F} = (3x^2y; x^3)$
- c. $\vec{F} = (10xz^3 + 1; -6y^2; 15x^2z^2)$
- d. $\vec{F} = (2xy^3; x^2z^3; 3x^2yz^2)$

Sol. a. $\vec{F}$ es conservativo $f(x; y; z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + k$ b. $\vec{F}$ es conservativo $f(x; y; z) = x^3y + k$ c. $\vec{F}$ es conservativo $f(x; y; z) = 5x^2z^3 + x - 2y^3 + k$ d. $\vec{F}$ no es conservativo

7. Demuestre que la integral de línea dada es independiente de la trayectoria y evalúe la integral $\int_C \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (2x\sin(y), x^2\cos(y) - 3y^2)$ y C es cualquier trayectoria que va desde (-1; 0) a (5; 1)

Sol. $\vec{F}$ es conservativo por lo que la integral no depende de la trayectoria, $f(x; y) = x^2\sin(y) - y^3 + k$, valor de la integral $25\sin(1) - 1$

8. Sea $\vec{F} = (yz(2x + y); xz(x + 2y); xy(x + y))$
 - a. Demuestre que $\vec{F}$ es conservativo
 - b. Encuentre el potencial escalar f
 - c. Calcule $\int_C \vec{F} d\vec{l}$ donde $C \equiv \{\vec{r}_{(t)} = (1 + t; 1 + 2t^2; 1 + 3t^3)\}$

Sol. a. $\vec{F}$ es conservativo, b. $f(x; y; z) = x^2yz + y^2zx + k$, c. 118

CIRCULACIÓN DE CAMPO. TEOREMA STOKES

9. Demuestre que la integral de línea dada es independiente de la trayectoria y evalúe la integral $\int_C \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (6xy^2 - y^3, 6x^2y - 3xy^2)$ y C es cualquier trayectoria que va desde (1; 2) a (3; 4)

- Utilizando la función potencial del campo vectorial
- Parametrizando el segmento que une el punto inicial y final

Sol. a. 236

10. Dado el campo de fuerza $\vec{F} = (y^3 + 1, 3xy^2 + 1)$

- ¿Es $\vec{F}$ conservativo? Si es conservativo halle la función potencial.
- Halle el trabajo realizado para mover la partícula a lo largo de la circunferencia completa
- Halle el trabajo realizado para mover una partícula desde el punto (0; 0) al (2; 0) a lo largo de la semicircunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$

Sol. a. $\vec{F}$ es conservativo y $f(x; y; z) = y^3x + x + y + k$ b. 0 c. 2 J

11. Considere el campo de fuerzas $\vec{F} = (y; z; zy)$

- Determine si $\vec{F}$ es conservativo
- Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ para desplazar una partícula a lo largo de la curva dada por la parametrización $\vec{r}(t) = [\cos(t); \sin(t); e^t]; 0 \leq t \leq \pi$

Sol. a. $\vec{F}$ no es conservativo b. $-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(1 + e^\pi) + \frac{1}{5}(e^{2\pi} + 1)$

12. Calcular la circulación del campo $\vec{F} = (3xy, 2x^2)$ sobre las curvas $C_1 \equiv \{y = x\}$
 $C_2 \equiv \{y = x^2 - 2x\}$. **Sol: 27/4**

13. Calcular la circulación del campo $\vec{F} = (y, -x, yz)$ sobre la curva $C \equiv \{z = x^2 + y^2 \cap z = 1\}$

14. Calcular la circulación del campo $\vec{F} = (x, y, z)$ sobre la curva $C \equiv \{z = x^2 + y^2 \cap z = 4\}$

15. Probar el teorema de Stokes para el campo $\vec{F} = (x, y, z)$ y la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / R^2 = x^2 + y^2 + z^2; z \geq 0\}$

16. Calcular la circulación del campo $\vec{F} = (\ln(z), x, \sin(3y))$ sobre la curva
 $C \equiv \{9 = x^2 + y^2; z = 5\}$

17. Obtenga el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = (x^2 - y^2, 2xy)$ para mover una partícula desde el punto $A = (1; 0)$ y $B = (2; 2)$ a lo largo de la curva $y = x^2 - x$

Sol. $-\frac{16}{15}$

18. Verifique el teorema de Stokes para el campo $\vec{F} = (y - x, 2x - y)$, donde C es la frontera tomada con orientación positiva, de la región acotada por las gráficas $y = x$ e $y = x^2 - x$

Sol. $\frac{4}{3}$

19. Utilice el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea a lo largo de la curva orientada de manera positiva $\int_C \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (xy + e^{x^2}, x^2 - \ln(1+y))$ y C consiste del segmento de recta que va desde $(0; 0)$ a $(\pi; 0)$ y la curva $y = \sin(x)$ con $0 \leq x \leq \pi$

Sol. π

20. Calcule $\int_C \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (xy, x+y)$ y C es la frontera situada entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 9$ y $x^2 + y^2 = 16$

Sol. 7π

21. Calcule $\int_C \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (ye^{xy}, xe^{xy})$ y C es la curva formada por los siguientes segmentos de rectas: *Inicio* $(2; 1) \rightarrow (1; 2) \rightarrow (-1; 2) \rightarrow (-2; 1) \rightarrow (-2; -1) \rightarrow (-1; -2) \rightarrow (1; -2) \rightarrow (2; -1)$ *Final*

Sol. $-e^2 + e^{-2}$

22. Si $\vec{F} = k \frac{(x; y; z)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$ calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ al desplazar una partícula a lo largo del segmento de recta que va desde el punto $(3; 0; 0)$ al punto $(3; 0; 4)$. Evalúe sin utilizar una función potencial.

Sol. $\frac{2}{15} k [J]$

23. Calcule el trabajo que realiza el campo $\vec{F} = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ para trasladar una partícula desde el punto $(-1; 1)$ hasta el punto $(1; 1)$ a lo largo de la parábola $y = x^2$

Sol. $-\frac{14}{15}$

24. Calcule $\int_C \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (x + 2; 3z; y^2)$ y C es la curva intersección de las superficies $1 = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = x - 1$

Sol. $\frac{3\sqrt{2}}{4} \pi$

25. Calcule $\int_C \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (x^2; 2y; x)$ a lo largo de la trayectoria cerrada por los arcos $\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3$ dados por las ecuaciones:

$$\gamma_1 \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \\ y \geq 0; z \geq 0 \end{cases} \quad \gamma_2 \begin{cases} 2x + z = 1 \\ y = 0 \\ x \geq 0; z \geq 0 \end{cases} \quad \gamma_3 \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Sol. $-\frac{1}{4} - \frac{\pi}{128}$

26. Calcule $\int_C \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (y^2; xy; xz)$ y C la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y = z$

27. Calcule $\int_C \vec{F} d\vec{l}$ donde $\vec{F} = (x; z; y)$ y C es la curva intersección de las superficies $1 = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = x - 1$

28. Calcule la integral del campo vectorial $\vec{F} = (2a - y; x)$ a lo largo de la cicloide parametrizada por $\vec{r}(t) = [a(t - \sin(t)); a(1 - \cos(t))]; 0 \leq t \leq 2\pi$
Sol. $-2\pi a^2$

29. Calcula la integral curvilínea del campo $\vec{F} = (yx^2; y)$ siendo la curva $y^2 + 2x^2 - 2Rx = 0$
Sol. $\vec{r}(t) = \left[\frac{R}{2} + \frac{R}{2}\cos(t); \frac{R}{\sqrt{2}}\sin(t)\right]; 0 \leq t \leq 2\pi; -\frac{5\pi R^4}{32\sqrt{2}}$

FLUJO DE CAMPO. TEOREMA DE GAUSS

30. Calcular el flujo de $\vec{F} = (2xy + x^2 \ln(x); 6y - y^2; -(x + 2x \ln(x))z)$ a través de la superficie S formada por $S_1: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 (-1 \leq z \leq 1) \cup S_2: 4x^2 + 9y^2 = 36z^2 (-1 \leq z \leq 1)$
Sol. 48π

31. Aplicando el teorema de Gauss, calcule el flujo del campo $\vec{F} = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2\right)\vec{i} + 2x \arctg(y)\vec{j} - \frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\vec{k}$ a través del lado exterior del segmento de la superficie $z = 1 - x^2 - y^2$ que se encuentra sobre el plano XY
Sol. π

32. Cerrando de un modo adecuado las superficies abiertas dadas y utilizando el teorema de Gauss, calcular los flujos de los campos vectoriales a través de las superficies indicadas (la normal a la superficies cerradas se toma exterior)
- $\vec{F} = (1 - 2x; y; z), \quad S: x^2 + y^2 = z^2 (0 \leq z \leq 4)$ **Sol. $\frac{256}{3}\pi$**
 - $\vec{F} = (z^2; xz; y), \quad S: x^2 + y^2 = 4 - z (0 \leq z)$ **Sol. 8π**
 - $\vec{F} = (x^2 + y^2; -y^2; 2yz), \quad S: x^2 + z^2 = y^2 (0 \leq y \leq 1)$ **Sol. 0**

33. Calcular $\iint (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{S}$, sabiendo que $\vec{F} = (e^{z^2}, 4z - y, 8x \sin(y))$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$

34. Calcular el flujo de $\vec{F} = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$ a través de la superficie compuesta por las superficies $S_1 \equiv x = a; S_2 \equiv y = a; S_3 \equiv x = 0; S_4 \equiv y = 0; S_5 \equiv z = 0$

35. Calcular el flujo del Campo $\vec{F} = (xyz, xyz, xyz)$ a través de la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 = z^2 - x^2 - y^2; z \in [0; 4]\}$

36. Calcular el flujo del Campo $\vec{F} = (x, y, z)$ a través de la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 = z^2 - x^2 - y^2; z \in [0; 4]\}$

37. Probar el teorema de Gauss para el campo $\vec{F} = (x, y, z)$ y la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / R^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$

38. Calcular el flujo del campo $\vec{F} = (x^2, y^2, z^2)$ a través de un cilindro de radio R y altura h

39. Probar el teorema de Gauss para el campo $\vec{F} = (x, y, z)$;
 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 25 = x^2 + y^2 + z^2; z \geq 0\}$
40. Probar el teorema de Gauss para el campo $\vec{F} = (xyz, xy, z)$;
 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 = z - x^2 - y^2; z \in [0; 3]\}$
41. Calcular el flujo de $\vec{F} = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$ a través de la superficie
 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 25 = x^2 + y^2 + z^2; z \geq 0\}$
42. Calcular el flujo de $\vec{F} = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$ a través de la superficie
 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 = z^2 - x^2 - y^2; z \geq 0 \cup 9 \geq x^2 + y^2; z = 3\}$
43. Probar el teorema de Gauss para el campo $\vec{F} = (x, y, z)$: $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \right.$
 $\left. \begin{array}{ll} \text{si } 4 \leq z \leq 4 + \sqrt{2} & x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 2 \\ \text{si } 2 \leq z \leq 4 & x^2 + y^2 = 2 \\ \text{si } 0 \leq z \leq 2 & z - x^2 - y^2 = 0 \end{array} \right\}$