Hoja de ejercicios 1

Ejercicio 1: Hallar la distribución exacta de la media muestral si la muestra procede de una población X tal que:

$a)$ $X \sim B(1, p)$.
$b)$ $X \sim exp(\lambda)$.
$c)$ $X \sim Cauchy$.
$d)$ $X \sim N(\mu, \sigma)$.
$e)$ Distribución asintótica de $\bar{X}$ si la distribución de la población es desconocida.

Ejercicio 2: Calcular la distribución exacta del estadístico $\sum_{i=1}^{n} X_i$ obtenido a partir de muestras de tamaño n de una población X tal que:

$a)$ $X \sim N(0, 1)$.
$b)$ $X \sim exp(\lambda)$.
$c)$ $X \sim B(m, p)$.
$d)$ $X \sim P(\lambda)$.
$e)$ $X \sim \Gamma(a, p)$.

Ejercicio 3: En una urna hay 100 pelotas enumeradas. Se extraen 10 pelotas con remplazamiento. Sea $\bar{X}$ el estadístico media muestral de los numero obtenidos. Determinar $E\bar{X}$ y $Var\bar{X}$.

Ejercicio 4: Obtener la función de verosimilitud muestral si $X_1, ..., X_n$ es m.a.s. de X tal que:

$a)$ $X \sim B(1, p)$.
$b)$ $X \sim B(m, p)$.
$c)$ $X \sim P(\lambda)$.
$d)$ $X \sim U(a, b)$.
$e)$ $X \sim exp(\lambda)$.
$f)$ $X \sim \Gamma(a, p)$.
$g)$ $X \sim N(\mu, \sigma)$.
$g)$ $X \sim \beta(a, b)$.

Ejercicio 5: Sea X una población con f. de probabilidad:

X	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Se selecciona una muestra de tamaño $n = 2$ y se pide: $a)$ Obtener la f. de probabilidad de la m.a.s.
$b)$ Obtener la f. de probabilidad de $\bar{X}$.
$c)$ Obtener la f. de probabilidad de S^2 y la cuasivarianza .
$d)$ Comprobar que $E\bar{X} = EX$, $Var\bar{X} = \frac{varX}{n}$, $ES^2 = \frac{n-1}{n} VarX$ y que la Esperanza de la cuasivarianza es igual a la Varianza Poblacional.

Ejercicio 6: Sea $X_1, ..., X_n$ m.a.s. de una población X. Calcula la Cota de Cramer-Rau y el Estimador Insesgado de Mínima Varianza si:

$a)$ $X \sim B(m, p)$.
$b)$ $X \sim P(\lambda)$.
$c)$ $X \sim N(\mu, \sigma_0)$.

Ejercicio 7: Sea $X_1, ..., X_n$ m.a.s. de una población X. Determinar un estadístico suficiente para:

$a)$ p si $X \sim B(m, p)$.
$b)$ θ si $X \sim U(0, \theta)$.
$c)$ λ si $X \sim exp(\lambda)$.
$d)$ a si $X \sim \Gamma(a, p_0)$.
$e)$ p si $X \sim \Gamma(a_0, p)$.
$f)$ μ si $X \sim N(\mu, \sigma_0)$.
$g)$ σ si $X \sim N(\mu_0, \sigma)$.
$h)$ p si $X \sim P(\lambda)$.

Ejercicio 8: Sea $X_1, ..., X_n$ m.a.s. de una población X. Determinar un estadístico Insesgado de Mínima Varianza corrigiendo el sesgo del estadístico suficiente para:

$a)$ p si $X \sim P(\lambda)$.
$b)$ p si $X \sim \Gamma(a_0, p)$.
$c)$ σ si $X \sim N(\mu_0, \sigma)$.
$d)$ μ si $X \sim N(\mu, \sigma_0)$.
$e)$ θ si $X \sim U(0, \theta)$.
$f)$ λ si $X \sim exp(\lambda)$.
$g)$ a si $X \sim \Gamma(a, p_0)$.

Ejercicio 9: Sea $X_1, ..., X_n$ m.a.s. de una población X. Determinar un estimador

Máximo Verosimil para:

$a)$ p si $X \sim B(m, p)$.
$b)$ p si $X \sim P(\lambda)$.
$c)$ θ si $X \sim U(0, \theta)$.
$d)$ a si $X \sim \Gamma(a, p_0)$.
$e)$ p si $X \sim \Gamma(a_0, p)$.
$f)$ μ si $X \sim N(\mu, \sigma_0)$.
$g)$ σ si $X \sim N(\mu_0, \sigma)$.

Ejercicio 10: Sea $X_1, ..., X_n$ m.a.s. de $X \sim f(x, \theta)$ siendo:

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & fuera \end{cases}$$

Determinar:

$a)$ El estimador Máximo Verosimil
$b)$ El estimador Insesgado de Mínima Varianza.
$c)$ Coinciden? Alcanzan la Cota de Cramer-Rao?

Ejercicio 11: Sea $X_1, ..., X_n$ m.a.s. de $X \sim f(x, \theta)$ siendo:

$$f(x,\theta) = \begin{cases} e^{-x} e^{\theta} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & fuera \end{cases}$$

Determinar:

$a)$ El estimador Máximo Verosimil
$b)$ El estimador Insesgado de Mínima Varianza.
$c)$ Coinciden? Alcanzan la Cota de Cramer-Rao?

Ejercicio 12: Sea $X_1, ..., X_n$ m.a.s. de $X \sim N(\mu, \sigma)$ con μ y σ desconocidos. Obtener el E.M.V. de μ y σ.

Ejercicio 13: Sea $X_1, ..., X_n$ m.a.s. de $X \sim f(x, \theta)$ siendo:

$$f(x,\theta) = \begin{cases} k e^{-\frac{|x|}{\theta}} & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ , } \theta \geq 0 \\ 0 & fuera \end{cases}$$

Se pide:

$a)$ Obtener un estadístico suficiente para estimar θ
$b)$ El estimador Insesgado de Mínima Varianza.
$c)$ Alcanza la cota de Cramer-Rao
$d)$ El estimador M'aximo Verosimil
$b)$ Obtener el estimador por el método de los momentos para θ
$c)$ Decir si cada uno de los estimadores anteriores es consistente para θ