

Sea $f : (X, d) \rightarrow (Z, \rho)$ una aplicación entre espacios métricos.

Decimos que f es **Lipschitziana**, o simplemente **Lipschitz**, si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq M d(x, y) \quad , \quad \text{para cualesquiera } x, y \in X ,$$

y de un tal número M decimos que es una **constante de Lipschitz para f** .

Decimos que f es **localmente Lipschitziana**, o **localmente Lipschitz**, si para cada punto $x_0 \in X$ existen un entorno U de x_0 en X y un número $M_U \geq 0$ tales que

$$\rho(f(x), f(y)) \leq M_U d(x, y) \quad , \quad \text{para cualesquiera } x, y \in U ,$$

es decir que la restricción $f|_U$ es Lipschitz.

Problema 1. 1. Demuestra que toda aplicación localmente Lipschitz es continua.

2. Determina, para cada una de la siguientes funciones continuas, si es localmente Lipschitz o no y si es Lipschitz o no lo es.

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto x^2.$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \sqrt{1+x^2}.$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \arctan x.$$

$$(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \arcsen x.$$

$$[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \arcsen x.$$

$$(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \log x.$$

Problema 2. Sea $L : (\mathbb{V}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{W}, \|\cdot\|')$ una aplicación lineal entre dos espacios normados. Demuestra que son equivalentes:

1. L es continua en el punto $\mathbf{0} \in \mathbb{V}$.
 2. L es lineal acotada.
 3. L es Lipschitz para las distancias $\|v_1 - v_2\|$ en $\mathbb{V}$ y $\|w_1 - w_2\|'$ en $\mathbb{W}$.
-

Problema 3. Sea $1 < p < \infty$. Demuestra que para todo $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq \|v\|_1 \leq n \|v\|_\infty .$$

Problema 4. Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ dos normas en $\mathbb{R}^n$.

- Demuestra que un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado para $\|\cdot\|$ si y sólo si es acotado para $\|\cdot\|'$.
 - Demuestra que si $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^n$ es una **sucesión de Cauchy** para $\|\cdot\|$ (es decir, para cada $\varepsilon > 0$ hay un $k = k(\varepsilon)$ tal que $n, m \geq k \implies \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$), entonces es una sucesión de Cauchy para $\|\cdot\|'$; y viceversa.
 - Dado cualquier subconjunto no vacío $E \subseteq \mathbb{R}^n$, con las distancias $d_E(x, y) = \|x - y\|$ y $d'_E(x, y) = \|x - y\|'$, y dada cualquier función $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, demuestra que f es Lipschitz en (E, d) si y sólo si es Lipschitz en (E, d') .
-

Problema 5.

1. Sean (X, d) un espacio métrico y $a \in X$. Demuestra que $d_a : X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $d_a(x) = d(x, a)$, es una función Lipschitziana en (X, d) .
2. Demuestra que, en todo espacio normado $(V, \|\cdot\|)$, la norma es una función Lipschitz.

Problema 6. (Generalizamos el ejercicio 13 de la hoja 1). Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Definimos la **distancia a A** como la siguiente función

$$\text{dist}(\cdot, A) : X \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \text{dist}(x, A) = \inf \{ d(x, y) : y \in A \} .$$

1. Demuestra que $\text{dist}(\cdot, A)$ es una función Lipschitz en (X, d) .
2. Si además A es compacto, demuestra que para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $\text{dist}(x, A) = d(x, a)$; es decir, un **punto más cercano a x** entre los puntos de A .

Problema 7. Fijamos $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ el primer vector de la base estándar. Demuestra que:

1. Los subconjuntos $B(0, 1) \cup B(2\mathbf{e}_1, 1)$ y $\overline{B}(0, 1) \cup \overline{B}(3\mathbf{e}_1, 1)$ no son conexos por caminos.
2. Los subconjuntos $B(0, 1) \cup B(2\mathbf{e}_1, 1) \cup \{\mathbf{e}_1\}$ y $\overline{B}(0, 1) \cup \overline{B}(3\mathbf{e}_1, 1) \cup \{t\mathbf{e}_1 : 1 < t < 2\}$ son conexos por caminos.

Problema 8. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado.

- a) Dados $x_0 \in V$, $r > 0$, prueba que la adherencia de la bola abierta $B(x_0, r)$ es la bola cerrada $\overline{B}(x_0, r)$.
- b) Considera la distancia $d(x, y) = \min\{\|x - y\|, 1\}$. Demostrar que $\|\cdot\|$ y d definen los mismos abiertos en V (y por tanto, definen los mismos cerrados).
- c) Demostrar que en el espacio métrico (V, d) el cierre de la bola unidad centrada en $\bar{0}$ es distinto de la bola cerrada unidad $\overline{B}_d(\bar{0}, 1)$.

Problema 9. a) Sea X conexo por caminos, y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Determinar cómo es f si $f(x) \in \mathbb{Z}$ (lo mismo para $f(x) \in \mathbb{Q}$ o para $f(x) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$).

b) Sea X conexo por caminos y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua no constante. Demostrar que $f(X)$ es no numerable.

c) Demostrar que no existe ninguna función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$

Problema 10. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado, y sean $A, B \subset V$. Se define

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

- a) Demostrar que si A es compacto y B cerrado, entonces $A + B$ es cerrado.
- b) Poner un ejemplo de un espacio V y dos cerrados A, B tales que $A + B$ no es cerrado.

Problema 11. Sean (X, d_1) , (Y, d_2) dos espacios métricos. Decimos que $f : X \rightarrow Y$ es una isometría si satisface:

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Demostrar que toda isometría entre dos espacios métricos:

- a) Es inyectiva.
- b) Es continua en X .
- c) $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ es isometría, y por lo tanto f^{-1} es continua en $f(X)$.

Problema 12. Sea $(F, \|\cdot\|)$ un espacio normado.

a) Si $T : \mathbb{R} \rightarrow F$ es lineal, demostrar que $\|T\| = \|T(1)\|$.

b) Sea $\mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ el conjunto de las aplicaciones lineales $T : \mathbb{R} \rightarrow F$. Definimos $\phi : \mathcal{L}(\mathbb{R}, F) \rightarrow F$, de modo que $\phi(T) = T(1)$. Demostrar que ϕ es una aplicación lineal, y además es una isometría.

Problema 13. Analícese en cada uno de los ejemplos siguientes, la continuidad, la existencia de derivadas parciales, la diferenciabilidad en el punto $(0, 0)$ y la continuidad en $(0, 0)$ de las derivadas parciales.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 e^{-|x|}}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + 7y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Problema 14. Considérese la función, definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

¿Es posible asignar un valor a $f(0, 0)$ de forma que f sea continua en este punto? Calcular la matriz de la diferencial $Df(x, y)$, respecto de las bases canónicas en $\mathbb{R}^2$, en cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Para cada (x, y) , localizar en el plano su transformado $f(x, y)$. ¿Es f inyectiva en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? Hallar la función inversa de f .

Problema 15. Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y una norma asociada $\|\cdot\|$. Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$.

Demostrar que f es diferenciable en todo $x \in E$, y que

$$Df(x)u = 2 \langle x, u \rangle \quad \text{para cada } u \in E.$$

Problema 16. Sean $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Se define $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f(x, y) = \int_0^x g_1(t, 0) dt + \int_0^y g_2(x, t) dt.$$

a) Probar que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = g_2(x, y).$$

b) Hallar una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = x \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = y.$$

c) Hallar una función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = x^2 - 2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = e^z.$$

Problema 17. Se dice que una función $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado m cuando $f(tx) = t^m f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si f es diferenciable y homogénea de grado $m \neq 0$, probar que

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = m f(x) \quad \text{en cada } x \in \mathbb{R}^N.$$

Problema 18. Consideremos $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = \langle x, y \rangle,$$

producto escalar en $\mathbb{R}^N$.

a) Hallar $DF(a, b)$.

b) Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ son diferenciables y $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se define por $h(t) = F(f(t), g(t))$, calcular la derivada de h .

c) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ diferenciable. Demostrar que $\|f(t)\|$ es constante si y sólo si los vectores $f(t)$ y $f'(t)$ son ortogonales.

Problema 19. a) Calcular las diferenciales de $f_1(x) = \langle a, x \rangle$, $f_2(x) = \langle x, L(x) \rangle$ y $f_3(x, y) = \langle x, L(y) \rangle$, donde $a \in \mathbb{R}^N$ es fijo, $x, y \in \mathbb{R}^N$ son variables y $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es una aplicación lineal.

b) Sea $B : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación bilineal. Calcular la aplicación lineal $DB(x, y)$.

c) Considérese la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida

$$f(x, y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Hallar la aplicación lineal $Df(x, y)$.

Problema 20. Usar la *regla de la cadena* para calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones, siendo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) $F(x, y, z) = f(h(x), g(x, y), z)$,

b) $G(x, y, z) = h(f(x, y, z)g(x, y))$,

c) $H(x, y, z) = g(f(x, y, h(x)), g(z, y))$,

d) $I(x, y, z) = (x, F(x, y, z), z)$.
