Matemática Discreta

Lista 3 — 2º Matemáticas, curso 2020-21

Planteamiento (y resolución) de recurrencias

1. Disponemos de n cerillas para formar palabras con las letras I (una cerilla) y V (dos cerillas). Sea P_n el número de palabras diferentes que podemos formar de esta forma utilizando las n cerillas.

a) Halla una fórmula de recurrencia para P_n.

b) ¿Qué relación tienen los P_n con los números de Fibonacci, F_n, definidos por la relación $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$? Justifica la respuesta.

c) Sea $P_{n,k}$ el número de palabras contadas en P_n que tienen k letras. Calcula $P_{n,k}$.

d) Utiliza los apartados b) y c) para demostrar la fórmula $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$.

2. a) Sea a_n el número de listas de ceros y unos de longitud n que no tienen unos consecutivos. Halla una recurrencia para a_n y, en su caso, resuélvela. b) Repite el ejercicio para b_n, que es el número de listas de ceros, unos y doses de longitud n que no tienen unos consecutivos.

3. Consideramos las sucesión de números (I_n) dada por

$$I_n = \int_0^1 x^n\, e^x\, dx, \qquad n \geq 0.$$

a) Comprueba que la sucesión (I_n) verifica la recurrencia $I_n = e - nI_{n-1}$ para $n \geq 1$, junto con la condición inicial $I_0 = e - 1$.

b) Para resolver la relación anterior, vamos a hacer un "cambio de variables": considera la sucesión (J_n) dada por

$$J_n = (-1)^{n+1} \frac{I_n}{n!\, e} \qquad \text{para cada } n \geq 0.$$

y verifica que

$$J_n = J_{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

c) Obtén una fórmula para J_n y deduce la correspondiente fórmula para I_n.

Resolución de recurrencias lineales con coeficientes constantes

4. Comprueba que

$$(a) \quad \begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1} + 5, \quad n \geq 1; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad a_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 5$$

$$(b) \quad \begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = 2a_n + 2^n, \quad n \geq 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad a_n = 2^n + n\, 2^{n-1}$$

$$(c) \quad \begin{cases} a_0 = 3, \\ a_{n+1} = a_n + 3n^2 - n, \quad n \geq 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad a_n = 3 + n(n-1)^2$$

$$(d) \quad \begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1, \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n \geq 2; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad a_n = 3^n - 2^n$$

$$(e) \quad \begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 3, \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, \quad n \geq 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a_n &= \left(\tfrac{1}{2} + i\right)(1-i)^n + \left(\tfrac{1}{2} - i\right)(1+i)^n \\ &= 2^{n/2} \cos\left(n\tfrac{\pi}{4}\right) + 2^{n/2+1} \sin\left(n\tfrac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$(f) \quad \begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_n = -3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3^n, \quad n \geq 2; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad a_n = -\tfrac{5}{4}(-1)^n + \tfrac{4}{5}(-2)^n + \tfrac{9}{20}\, 3^n$$

$$(g) \quad \begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 2 \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2n, \quad n \geq 2; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad a_n = -8 \cdot 2^n + 4\, n\, 2^n + 8 + 2\, n$$

$$(h) \quad \begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 2 \\ a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2^n + 3^n, \quad n \geq 2; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad a_n = -4 \cdot 3^n + \tfrac{3}{2}\, n\, 3^n + \tfrac{1}{2}\, n^2\, 3^n + 4 \cdot 2^n$$

5. La sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ está definida por la recurrencia lineal de grado $k \geq 1$, con coeficientes constantes y homogénea, siguiente:

$$(\star) \qquad a_n = \beta_1\, a_{n-1} + \beta_2\, a_{n-2} + \cdots + \beta_k\, a_{n-k} \qquad \text{para cada } n \geq k.$$

Los coeficientes $\beta_1, \ldots, \beta_k$ son datos. Se tienen, además, k condiciones iniciales, los valores de $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.

a) Llamemos $B = \max\{|\beta_1|, \ldots, |\beta_k|\}$ y $A = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{k-1}|\}$. Prueba, por inducción, que

$$|a_n| \leq A\,(1+B)^n \qquad \text{para todo } n \geq 0.$$

b) Supongamos ahora que la ecuación característica asociada a $(\star)$ tiene raíces $z_1, z_2, \ldots, z_k$. Estos números, en principio complejos, podrían repetirse. Digamos que ya van ordenadas de mayor a menor, en módulo: $|z_1| \geq |z_2| \geq \cdots \geq |z_k|$. Llamemos $R = |z_1|$ al máximo módulo de estas raíces.

- Supongamos que $|z_j| < R$ para $j = 2, \ldots, k$. Comprueba que existe una constante D tal que
$$|a_n| \leq D\, R^n \qquad \text{para todo } n \geq 0.$$
- Supongamos que, para cierto $1 \leq m \leq k$, tenemos que $z_1 = \cdots = z_m$ y que $|z_j| < R$ para $j = m+1, \ldots, k$ (es decir, z_1 es raíz de multiplicidad m, y es la única cuyo módulo es R). ¿Cuál sería la cota para $|a_n|$ en este caso?

6. a) Definimos la sucesión de números $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ mediante
$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}\,, \quad \text{para cada } n \geq 2,$$
junto con $a_0 = \alpha > 0$ y $a_1 = \beta > 0$. Obtén una fórmula cerrada para a_n en términos de n.

b) Sea $\mathbf{v}_n$ una sucesión de vectores de $\mathbb{R}^2$ que cumple que
$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_{n-2}\,, \quad \text{para cada } n \geq 2,$$
junto con las condiciones iniciales $\mathbf{v}_0 = (1,0)$ y $\mathbf{v}_1 = (0,1)$.

Da una fórmula explícita para $\mathbf{v}_n$ y calcula cuál es la dirección límite de la sucesión de vectores. Es decir, calcula el valor de θ para el que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|} = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$