Matemática Discreta

Lista 5 — 2º Matemáticas, curso 2020-21

Sobre números cromáticos

1. Prueba que si G es un grafo con n vértices y todos ellos tienen grado k, entonces

$$\chi(G) \geq \frac{n}{n-k}\,.$$

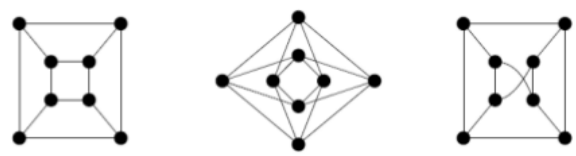
2. Sea $G = (V, A)$ un grafo con n vértices y sea G^c su grafo complementario:

$$V(G^c) = V(G)\,, \qquad A(G^c) = A(K_n) \setminus A(G)$$

(tiene el mismo conjunto de vértices que G y contiene las aristas que le "faltan" a G). Comprueba que $\chi(G)\chi(G^c) \geq n$.

3. Demuestra que el número de aristas de un grafo G es, por lo menos, $\binom{\chi(G)}{2}$.

4. Decide si los siguientes grafos son bipartitos o no.



Cálculo de números y polinomios cromáticos

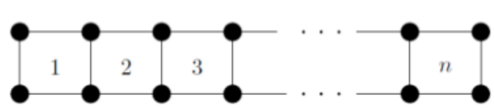
5. Calcula números cromáticos, polinomios cromáticos, y el número de formas de colorear con cinco colores para los tres siguientes grafos.

6. ¿Cuántas listas distintas (con repetición permitida) de longitud 7 se pueden formar con los cuatro símbolos $\{a, b, c, d\}$ de manera que en posiciones consecutivas aparezcan símbolos distintos, y que además el símbolo de la posición central sea distinto del símbolo en la posición primera y del símbolo en la posición última? ¿Cuál es el número mínimo de símbolos que se necesita para tener una lista válida?

7. Calcula el número de 7-listas con repetición que se pueden formar con 10 símbolos ajustándose a las siguientes exigencias: 1) no se puede poner el mismo símbolo en posiciones consecutivas; 2) los tres símbolos centrales han de ser distintos; y 3) las posiciones segunda y sexta han de llevar también símbolos diferentes.

8. Se han de realizar 13 tareas. Cada una de ellas lleva una hora de trabajo continuo. Se dice que dos de ellas son incompatibles si en ningún instante se puede estar trabajando en las dos a la vez. Las tareas 11 y 12 son incompatibles entre sí e incompatibles con cada una de las numeradas de 1 a 10. Las tareas de 1 a 10 con números consecutivos son incompatibles. La tarea 13 es incompatible con todas las demás. ¿Cuántas horas hacen falta, como mínimo, para realizar todas las tareas?

9. Calcula el polinomio cromático del grafo "escalera" E_n, que tiene $|V(E_n)| = 2n + 2$ vértices y $|A(E_n)| = 3n + 1$ aristas.



10. Halla el polinomio cromático del grafo rueda R_n ($n+1$ vértices, n de ellos formando un ciclo, y el restante unido por aristas a todos los demás).

11. Para cada par de números naturales $n, m \geq 2$, construimos el grafo $G_{n,m}$ que tiene $n+m$ vértices $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cup \{b_1, b_2, \ldots b_m\}$, las $n+m-2$ aristas siguientes:

$$\{\{a_i, a_{i+1}\}_{i=1}^{i=n-1}; \{b_j, b_{j+1}\}_{j=1}^{m-1}\},$$

más las 4 aristas $\{\{a_1, b_1\}, \{a_1, b_2\}, \{a_2, b_1\}, \{a_2, b_2\}\}$. Es decir, se trata de un grafo L_n y un grafo L_m que unimos mediante todas las aristas posibles entre sus respectivos dos primeros vértices. Se pide calcular el número cromático y el polinomio cromático de $G_{n,m}$.

12. Sea G un grafo con mn vértices $\{1, 2, \ldots, nm\}$ y con conjuntos de aristas

$$A(G) = \big\{\{a, b\} \,:\, a - b \equiv 0 \pmod{m}\big\}.$$

Halla su número cromático y su polinomio cromático.

Ejercicios adicionales

13. a) Explica por qué ninguno de los siguientes puede ser el polinomio cromático de un grafo:

(a1) $p(k) = k^4 - 5k^3 + 7k^2 - 6k + 3$ (a2) $p(k) = k^4 - 3k^3 + 5k^2 - 4k$
(a3) $p(k) = 3k^3 - 4k^2 + k$ (a4) $p(k) = k^4 - 5k^2 + 4k$

b) Sea $p_G(k) = k^4 - 5k^3 + ak^2 + bk$ el polinomio cromático de un cierto grafo G. Se pide dibujar el grafo G (sólo hay uno, salvo isomorfismos) y hallar los coeficientes a y b.

14. a) En el ejercicio 6, ¿cuántas listas usan exactamente 3 símbolos? ¿Y cuatro?
b) En el ejercicio 7, ¿cuántas listas usan exactamente 4 símbolos?

15. En clase se ha calculado el polinomio cromático de un grafo que es "unión" de dos que comparten un vértice o una arista. Se pide demostrar la siguiente generalización: si G es la "unión" de dos grafos G_1 y G_2 que comparten un K_n, entonces

$$p_G(k) = \frac{p_{G_1}(k)\, p_{G_2}(k)}{p_{K_n}(k)}$$

(los casos $n = 1$ y $n = 2$ son los citados anteriormente). Se pide también encontrar un contraejemplo que muestre que el resultado análogo no es cierto si la intersección de G_1 y G_2 no es un grafo completo.