Estructuras Algebraicas. Practicas no. 3

1) Probar que si $f \in \mathbb{Z}[x]$ cumple que $f(0)$ y $f(1)$ son impares, entonces f no tiene raíces enteras.

2) Calcular el Máximo común divisor en $\mathbb{Q}[x]$ de los polinomios

$$X^4 + X^3 + 3x - 9, \quad 2X^3 - x^2 + 6x - 3,$$

y los coeficientes de Bezout.

3) Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x^3 = y^2 + 2$.

(1) Demostrar que x e y son impares y primos entre sí.

(2) Demostrar que $y + \sqrt{-2}$ e $y - \sqrt{-2}$ son primos entre sí en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

(3) Demostrar que si los números enteros y, a, b cumplen que $y + \sqrt{-2} = (a + b\sqrt{-2})^3$ entonces $y = \pm 5$.

(4) Calcular todas las soluciones enteras de la ecuación $x^3 = y^2 + 2$.

4) Factorizar en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ el polinomio $x^4 + 1$.

5) Demostrar que el polinomio $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ con p primo (polinomio ciclotómico) es irreducible.

6) Descomponer en factores irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$, $p_n(x) = x^n - 1$, para $n = 1, 2, \ldots, 10$.

7) Estudiar la irreducibilidad en $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{Z}[x]$ de los siguientes polinomios:
(1) $f_1(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9$

(2) $f_2(x) = 5x^{10} + 10x^7 + 20x^3 + 10$

(3) $f_3(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 25$

(4) $f_4(x) = 5x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 15x + 1$

(5) $f_5(x) = x^7 + 14x^5 + 7x^2 + 4$

(6) $f_6(x) = 3x^5 - 5x^4 + 15x^3 + 5x + 16$

(7) $f_7(x) = 2x^{13} - 13x^4 + 13x + 37$

(8) $f_8(x) = 14x^{11} - 21x^5 + 28x^2 - 5$

8) Probar que $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_3[x]$, $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$ y es reducible en $\mathbb{Z}_{17}[x]$.

9) (1) Sean K un cuerpo finito con q elementos y $f(x) \in K[x]$ un polinomio irrreducible de grado n. Demostrar que el cociente $K[x]/(f(x))$ es un cuerpo con q^n elementos.

(2) Construir cuerpos con 8, 27 y 125 elementos.