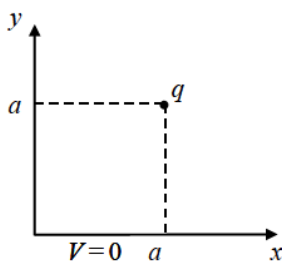


Tema 2. Problemas de contorno: campos estáticos

El problema de contorno en electrostática y magnetostática. Unicidad de la solución. Teorema de reciprocidad. Sistemas de conductores: coeficientes de potencial e influencia. Método de imágenes. Separación de variables.

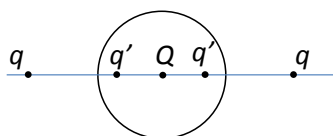
PROBLEMAS

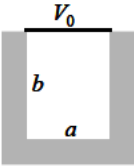
1. Se tiene una carga puntual q entre dos planos conductores paralelos conectados a tierra y separados una distancia d . La carga dista d_1 de uno de ellos. Aplicando el teorema de reciprocidad, hallar la carga inducida sobre cada plano.
2. Sea un sistema formado por tres esferas conductoras 1, 2 y 3, de radios R_1, R_2 y R_3 y cargas Q_1, Q_2 y Q_3 respectivamente. Las esferas 1 y 2 son concéntricas ($R_2 > R_1$) y la esfera 3 está a una distancia d del centro de las primeras, siendo $d \gg R_2 > R_3$. a) Hallar los coeficientes de potencial del sistema de conductores y los potenciales de las tres esferas. b) Si la esfera 2 se une a tierra, calcúlese su carga así como los potenciales de las otras dos esferas.
3. Se tienen dos planos conductores semi-infinitos, $y = 0$ y $x = 0$, conectados a tierra. En la posición $(a, a, 0)$ hay una carga puntual q .



- a) Calcular el potencial en la región ente los planos, utilizando el método de imágenes.
- b) Calcular la fuerza sobre q y la energía electrostática del sistema.
- c) Si los planos se cortaran en un ángulo α distinto de 90° , ¿podría aún resolverse el problema por imágenes? ¿bajo qué condición?

4. Una esfera conductora de radio R_1 está aislada y cargada con una carga Q . En el interior de la esfera hay una cavidad esférica, no concéntrica con la esfera conductora, de radio R_2 ($R_2 < R_1$), donde se coloca una carga puntual $q=Q/3$ a una distancia $a=R_2/2$ del centro de la cavidad. Se pide calcular: a) el potencial de la esfera conductora y su densidad superficial de carga. b) el valor del potencial y del campo eléctrico en el centro de la cavidad.
5. Una esfera conductora de radio R está aislada y cargada con una carga Q . Se coloca un dipolo a una distancia a ($a > R$) del centro de la esfera, estando el vector momento dipolar \mathbf{p} dirigido según un diámetro de la esfera y alejándose de esta. Hallar: a) el potencial eléctrico de la esfera y b) el campo eléctrico en los puntos de la línea que une el centro de la esfera con el dipolo y que distan R y $2a$ del centro de la esfera.
6. Dos cargas $+q$ están situadas sobre el eje OX , simétricamente respecto al origen, en los puntos $(\pm d, 0)$. Entre ellas, con centro en el origen, se coloca una esfera conductora de radio $R=d/2$. Calcular: a) el potencial de la esfera para que la fuerza sobre cualquiera de las cargas sea nula, b) la carga total de la esfera y la densidad de carga superficial en el punto $(R, 0)$



7. Se tiene un sistema formado por dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_2 > R_1$). El potencial en la superficie de la esfera interior es nulo y sobre la superficie exterior viene dado por $V(R_2, \theta) = V_0 \cos \theta$. Determinar el potencial y el campo eléctrico en los puntos $r \geq R_1$. Comprobar que el campo eléctrico solo tiene componente normal en los puntos de la superficie $r = R_1$.
8. Una línea bifilar está formada por dos alambres cilíndricos paralelos indefinidos, de radio r , separados una distancia d ($d \gg r$). La línea está situada paralelamente a un plano conductor indefinido, conectado a tierra, a una distancia h ($h \gg r$). Calcular la capacidad de la línea en presencia del plano conductor.
9. Un bloque conductor conectado a tierra, de dimensiones a , b y una longitud muy grande en la dirección del eje z , tiene una ranura rectangular cubierta por una placa que está aislada del bloque (en la figura se representa una sección transversal). Sobre la placa se establece un potencial $V = V_0$. Hallar la distribución de potencial dentro de la ranura.
- 
10. Una carga puntual q está situada a una distancia d del centro de una fina capa esférica conductora, conectada a tierra, de radio $R > d$. Hallar:
- El potencial en todo el espacio.
 - La densidad de carga inducida sobre la superficie interior de la esfera, en función de θ
 - La carga total sobre esa superficie y la fuerza sobre la carga q . Cuando la carga se lleva a una distancia pequeña de la superficie, compara esa fuerza con la que actúa sobre una carga a la misma distancia de un plano conductor a tierra.
 - La energía electrostática del sistema. Particulariza la energía para el caso de la carga a la distancia pequeña y deduce en ese caso la fuerza a partir de la energía.
11. Se tiene un dipolo ideal de momento dipolar p . Hallar qué distribución de carga hay que establecer sobre una esfera de radio R con centro en la posición del dipolo, para que el potencial eléctrico se anule en el exterior de esa esfera.
12. Una esfera conductora de radio R y carga q se coloca en un campo eléctrico uniforme E_0 . Calcular:
- el potencial eléctrico dentro y fuera de la esfera;
 - la distribución de carga inducida en la superficie de la esfera;
 - el dipolo eléctrico inducido en la esfera.
13. Una esfera dieléctrica de radio R y permitividad ϵ está situada en el vacío e inmersa en un campo uniforme E_0 .
- Hallar el potencial y el campo eléctrico en todo el espacio.
 - Comprobar que la esfera polarizada produce un campo de tipo dipolar y hallar el momento dipolar al que equivale la esfera polarizada.

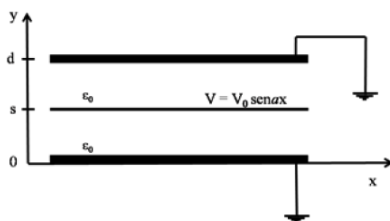
Material complementario

Cuestiones

1. Cuando en un sistema de dos conductores uno de ellos (2) rodea completamente al otro (1), se dice que están en *influencia total*. En esta situación, demostrar que los coeficientes de capacidad y potencial satisfacen que $c_{12} = -c_{11}$ y $p_{12} = p_{22}$
2. Calcular la capacidad asociada a un sistema formado por dos conductores cargados que siempre tienen el mismo valor de carga pero de signo opuesto. Utilizar esta expresión para determinar la capacidad de un condensador formado por dos capas esféricas concéntricas muy delgadas de radios a y c con $a < c$
3. Calcular la fuerza entre una carga puntual q y una esfera conductora de radio R y carga Q si la distancia entre la carga puntual y el centro de la esfera es d . ¿Puede esta fuerza ser atractiva, aun cuando tanto q como Q sean positivas?

Problemas

1. Tres esferas conductoras idénticas de radio a están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado b ($b \gg a$). Inicialmente las tres esferas tienen la misma carga q . A continuación, una a una y sucesivamente se conectan a tierra y se desconectan. ¿Cuál es la carga de cada una al final de este proceso?
2. Un conductor plano horizontal indefinido, a potencial cero, tiene una protuberancia semi-esférica de radio R . En la vertical que pasa por el centro de la semiesfera y a una distancia D del mismo ($D > R$) hay una carga puntual q . Hallar: a) la expresión del potencial en cualquier punto del espacio y b) la fuerza sobre la carga q .
3. Dos esferas conductoras de radios a y b tienen sus centros separados una distancia $c > a, b$. Hallar los coeficientes de influencia del sistema hasta segundo orden de aproximación, es decir, despreciando términos $(a/c)^3, (b/c)^3$, etc.
4. Se tienen dos alambres rectos, paralelos, indefinidos, cargados con densidades lineales de carga $+\lambda$ y $-\lambda$, separadas una distancia d .
 - a) Hallar el potencial en cualquier punto del espacio.
 - b) Demostrar que las equipotenciales son cilindros circulares y determinar la posición del eje y el radio del cilindro cuyo potencial es V_0 .
5. Un alambre indefinido recorrido por una corriente de intensidad I está situado en un medio de permeabilidad μ_1 y a la distancia d de la superficie plana de un medio extenso de permeabilidad $\mu_2 > \mu_1$. Determinar los campos en ambas regiones y la fuerza sobre el alambre, indicando si es atractiva o repulsiva respecto al plano.
6. Un plano con distribución de potencial $V = V_0 \operatorname{sen}(ax)$, se coloca entre dos planos conductores paralelos indefinidos, conectados a tierra, a una distancia s del plano inferior. La distancia entre los planos conductores es d .



- a) Hallar la distribución de potencial y de campo eléctrico.
- b) Hallar las distribuciones de carga en $y = 0, y = s, y = d$.

7. Un semicilindro conductor muy largo de radio R sobresale de un plano conductor horizontal conectado a tierra, con su eje paralelo al plano. Fuera del cilindro, paralelo al eje, a una distancia h del mismo, hay una línea indefinida cargada con densidad de carga λ por unidad de longitud. Hallar la densidad de carga inducida en los puntos de la superficie cilíndrica más próximos a la línea de carga.
8. Un superconductor tiene la propiedad de que excluye al campo magnético de su interior (de manera análoga a como un conductor excluye al campo eléctrico de su interior mediante una carga superficial, el superconductor lo hace para el campo magnético mediante una corriente superficial). En un campo magnético inicialmente uniforme B_0 , se sumerge una esfera superconductora de radio R .
 - a) Como en el exterior de la esfera $\nabla \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, se puede escribir $\mathbf{B} = -\nabla \phi_M$ donde ϕ_M satisface la ecuación de Laplace. ¿Cuáles son las condiciones de contorno para ϕ_M en $r = R$ y $r \rightarrow \infty$?
 - b) Mediante el método de separación de variables, hallar el potencial magnético y el vector \mathbf{B} en todo el espacio.
 - c) De la condición de contorno para la componente tangencial de \mathbf{B} , hallar la densidad de corriente superficial.