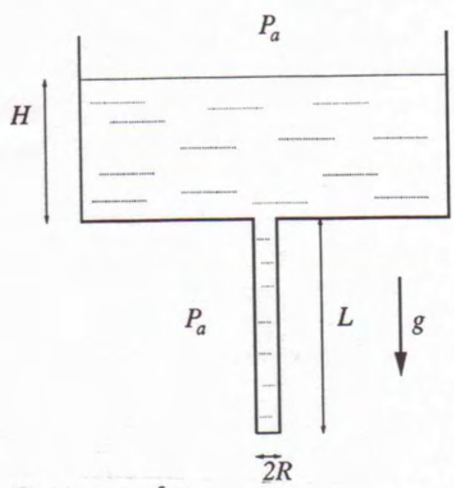
Problema 1



1)

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} = -\nabla(P + \rho g z) + \mu \nabla^2 \bar{u}$$

$$\rho \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} \sim \mu \nabla^2 \bar{u}$$

$$\rho \frac{U_c^2}{L_e} \sim \mu \frac{U_c}{R^2} \rightarrow \boxed{L_e \sim \frac{U_c R}{\nu} R}$$

$$\rho \frac{du}{dt} \sim \mu \nabla^2 \bar{u} \rightarrow \boxed{t_T \sim R^2/\nu}$$

CRITERIOS: $L >> L_e$, $t_v >> t_T$ $\quad t_v \sim \dfrac{V}{U_c R^2}$

(t_v → TIEMPO VACIADO)

$$\boxed{U_c \sim \frac{\rho g R^2}{\mu}} \rightarrow +\nabla(P + \rho g z) \sim \mu \nabla^2 \bar{u}$$

$$L >> L_e \rightarrow \boxed{\frac{g}{\nu^2} \frac{R^4}{L} << 1} \qquad t_v >> t_T \rightarrow \boxed{\frac{g R^3}{\nu^2} \frac{R^3}{V} << 1}$$

COMO $V \sim L^3$, ESTE SEGUNDO CRITERIO SE CUMPLE SIEMPRE SI EL PRIMERO SE CUMPLE

2)

$$0 = P_\ell + \mu \nabla^2 \bar{u} \qquad P_\ell = \rho g \frac{(h+L)}{L} \qquad Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} P_\ell$$

$$\frac{V}{H} \frac{dh}{dt} = -Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \rho g \frac{(h+L)}{L} \rightarrow \frac{d}{d\bar{t}}\left(\frac{h}{H}\right) = -\left(\frac{h}{H} + \frac{L}{H}\right)$$

$$\frac{h}{H} = \left(1 + \frac{L}{H}\right) e^{-\bar{t}} - \frac{L}{H} \qquad \bar{t} = \frac{\pi R^4 \rho g}{8 \mu V} t \, \frac{H}{L}$$

$$h = 0, \quad \boxed{\bar{t}_v = \ln\left(1 + \frac{H}{L}\right)}$$

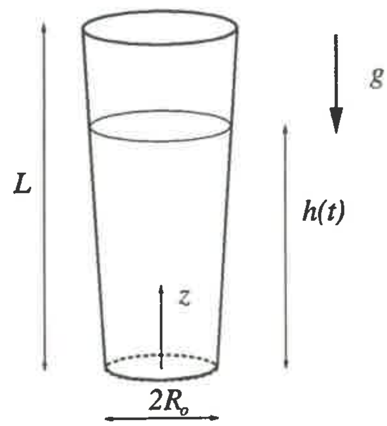
3)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho g \frac{H+L}{L} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad \begin{array}{l} t = 0,\ u = 0 \\ t > 0,\ r = R,\ u = 0 \end{array}$$

→ EN FORMA ADIMENSIONAL $\quad \tau = t/(R^2/\nu)$, $\eta = \dfrac{r}{R}$, $\bar{u} = \dfrac{u}{\frac{g R^2}{\nu} \frac{H+L}{L}}$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} = 1 + \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right) \qquad \begin{array}{l} \tau = 0,\ \bar{u} = 0 \\ \tau > 0,\ r = 1,\ \bar{u} = 0 \end{array}}$$

Problema 2



$\uparrow u \;\; \rightarrow v$

$$\frac{U_c}{L} \sim \frac{V_c}{R}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial z} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial z}(p + \rho g z) + \mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

CONVECCION DESPRECIABLE SI $\rho \frac{U_c^2}{L} \ll \frac{\mu}{R_o^2} U_c \sim \frac{U_c R_o}{\nu} \frac{R_o}{L} \ll 1$

TERMINOS NO-ESTACIONARIOS DESPRECIABLES SI $\rho \frac{U_c}{t_o} \ll \frac{\mu}{R_o^2} U_c \longrightarrow \frac{U_c R_o}{\nu} \frac{R_o}{L} \ll 1$ } MISMO CRITERIO

$t_o \sim L/U$

PARA ESTIMAR LA U_c $\rightarrow U_c \sim \frac{\rho g R_o^2}{\mu}$, DE DONDE EL CRITERIO ES $\boxed{\frac{g R_o^3}{\nu^2} \frac{R_o}{L} \ll 1}$

EL FLUJO ES LOCALMENTE UNIDIMENSIONAL

$P_\ell(z,t)$

$u(r,z,t)$

$$0 = P_\ell + \mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \rightarrow u = \frac{1}{4\mu} P_\ell (R^2 - r^2)$$

$$Q(t) = \frac{\pi R^4 P_\ell}{8\mu} \Rightarrow \frac{d}{dz}(p + \rho g z) = -\frac{8\mu Q(t)}{\pi R_o^4} \frac{1}{\left(1 + \alpha\frac{z}{L}\right)^4}$$

$$p + \rho g z - p_a = \frac{8\mu Q(t)}{3\pi R_o^4} \frac{L}{\alpha}\left[\frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha z}{L}\right)^3} - 1\right]$$

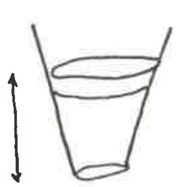
$$z = h(t) \Rightarrow p = p_a \rightarrow \rho g h = \frac{8\mu L}{3\pi\alpha R_o^4} Q(t)\left[\frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha h}{L}\right)^3} - 1\right]$$

$(1+\alpha)\left(\frac{3+\alpha}{2}\right) - \frac{3}{2}$

$\frac{\alpha}{2}(3+\alpha) + \frac{\alpha}{2}$

$\frac{\alpha}{2}(4+\alpha) + \ln(1+\alpha)$

POR OTRA PARTE



APLICANDO CONTINUIDAD AL VOLUMEN DE CONTROL FORMADO POR EL AGUA EN EL TUBO:

$$\frac{d}{dt}\int \rho\, dV + \int \rho(\bar{v} - \bar{v}_c)\cdot \bar{n}\, d\sigma = 0 \qquad V = \frac{1}{3}\pi h (R_o^2 + R_o R + R^2) = \frac{1}{3}\pi \frac{R_o^2 L}{\alpha}\frac{\alpha h}{L}\left(1 + 1 + \alpha\frac{h}{L} + \left(1 + \frac{\alpha h}{L}\right)^2\right) = \frac{1}{3}\pi\frac{R_o^2 L}{\alpha}\left[\left(1 + \frac{\alpha h}{L}\right)^3 - 1\right]$$

$$Q = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{3}\pi \frac{R_o^2 L}{\alpha}\left[\left(1 + \frac{\alpha h}{L}\right)^3 - 1\right]\right] \Rightarrow \frac{\rho g L}{\alpha}(\eta - 1) = \frac{8\mu L}{3\pi\alpha R_o^4}\left[\frac{1}{\eta^3} - 1\right]\pi \frac{R_o^2 L}{\alpha}\eta^2 \frac{d\eta}{dt} \qquad t = 0,\ \eta = 1 + \alpha$$

$$\eta = \frac{\alpha h}{L} + 1 = R/R_o$$

$$\tau = \frac{3\alpha\rho g R_o^2}{8\mu L} t \Rightarrow d\tau = -\frac{\eta^3 - 1}{\eta(\eta - 1)} d\eta \rightarrow -\tau = \int_{1+\alpha}^{\eta} \frac{\eta^2 + \eta + 1}{\eta} d\eta = \frac{\eta^2}{2} + \eta + \ln\eta \Big|_{1+\alpha}^{\eta}$$

SALE DEL TUBO ANCHO PRIMERO

$$\boxed{\tau_d = \frac{(1+\alpha)^2}{2} + (1+\alpha) + \ln(1+\alpha) - \frac{3}{2}}$$

Problema 3

1)

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\frac{U_c}{L} \qquad \frac{\Delta v}{h}$$

$$(2)\quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$\frac{U_c^2}{L} \qquad V_0\frac{U_c}{h} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{P_1-P_2}{L} \qquad \nu\frac{U_c}{h^2}$$

$$(3)\quad u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$
$$U_c\frac{\Delta v}{L} \qquad V_0\frac{\Delta v}{h} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\Delta_y P}{h} \qquad \nu\frac{\Delta v}{h^2}$$

SI $\boxed{\Lambda = \frac{V_0 h}{\nu} \gg 1}$, $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ll v\frac{\partial u}{\partial y}$

$$U_c \sim \frac{h}{L}\frac{(P_1-P_2)}{\rho V_0} \qquad V_0 \gg \frac{\nu}{h}$$

$$\frac{u\frac{\partial u}{\partial x}}{v\frac{\partial u}{\partial y}} \sim \frac{U_c}{L}\frac{h}{V_0} = \frac{h^2}{L^2}\frac{(P_1-P_2)}{\rho V_0^2} \ll \frac{\rho h^4 (P_1-P_2)}{L^2 \mu^2} \ll 1$$

ADEMAS
$$\frac{\Delta v}{V_0} \sim \frac{h}{L}\frac{U_c}{V_0} \sim \frac{h^2}{L^2}\frac{(P_1-P_2)}{\rho V_0^2} \ll 1$$

DE DONDE $(2) \to V_0\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$

Y DE (3) $\Delta_y P \sim (P_1-P_2)\left(\frac{h}{L}\right)^2 \ll (P_1-P_2) \to \frac{\partial P}{\partial y} \simeq 0$

SI $\boxed{\Lambda \ll 1}$, $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg v\frac{\partial u}{\partial y}$, $U_c \sim \frac{h^2}{\nu}\frac{(P_1-P_2)}{\rho L} = \left(\frac{h V_0}{\nu}\right)\frac{(P_1-P_2)}{\rho V_0}\frac{h}{L} = \Lambda\frac{P_1-P_2}{\rho V_0}\frac{h}{L}$ → SI HAY SOPLADO PASA MENOS FLUIDO QUE SIN SOPLADO

$$\frac{u\frac{\partial u}{\partial x}}{\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{U_c h}{\nu}\frac{h}{L} \sim \rho\frac{h^4(P_1-P_2)}{\mu^2 L^2} \ll 1,$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \Delta_y P \sim (P_1-P_2)\left(\frac{h}{L}\right)^2 \to \frac{\partial P}{\partial y} \simeq 0$$

EL CASO $\Lambda \sim O(1)$ ES INTERMEDIO, $v\frac{\partial u}{\partial y} \sim \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

2) INTEGRANDO SE OBTIENE

$$V_0\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \begin{matrix} y=0 \\ y=h \end{matrix} \quad u=0$$

$$u = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{h^2}{\mu}\frac{dP}{dx}\right)\left(\frac{e^{\Lambda\eta}-1}{e^{\Lambda}-1} - \eta\right), \quad \eta = y/h$$

$$u = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{h^2}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}\right)\left(\eta - \frac{e^{\Lambda\eta}-1}{e^{\Lambda}-1}\right)$$

3)

$$q = h\int u\,d\eta = \frac{1}{\Lambda}\frac{h^3}{\mu}\frac{dP}{dx}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{e^{\Lambda}-1}\right)$$

$$\boxed{q = \frac{1}{\Lambda}\frac{h^3}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{e^{\Lambda}-1}\right)}$$

COMO $q = \text{CTE} \to \boxed{\frac{dP}{dx} = \text{CTE} = -\frac{P_1-P_2}{L}}$

$$\tau_0 = \mu\frac{du}{dy}\bigg|_{y=0} = \frac{h}{\Lambda}\frac{P_1-P_2}{L}\left(1 - \frac{\Lambda}{e^{\Lambda}-1}\right)$$

$$\tau_0 = -\mu\frac{du}{dy}\bigg|_{y=h} = \frac{h}{\Lambda}\frac{P_1-P_2}{L}\left(\frac{\Lambda e^{\Lambda}}{e^{\Lambda}-1} - 1\right)$$

4) $\Lambda \to 0$,

$$u = \frac{-1}{\Lambda}\left(\frac{h^2}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}\right)\left(\frac{\Lambda\eta + \frac{\Lambda^2\eta^2}{2}+\dots}{\Lambda + \frac{\Lambda^2}{2}+\dots} - \eta\right) = \boxed{\frac{1}{2}\frac{h^2}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}\eta(1-\eta)}$$

CLARO, LA EC. ADIMENSIONAL DARIA

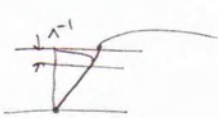
$$\bar{u} = \frac{u}{\frac{h^2}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}}, \quad \frac{d^2\bar{u}}{d\eta^2} - \Lambda\frac{d\bar{u}}{d\eta} = -1 \xrightarrow{\Lambda=0} \frac{u}{\frac{h^2}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}} = \frac{1}{2}(\eta-\eta^2)$$

NOTESE ADEMAS QUE $\Lambda \to 0$

$$q = \frac{h^3}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{\Lambda + \frac{\Lambda^2}{2} + \frac{\Lambda^3}{6}\dots}\right) \simeq \frac{h^3}{12\mu}\frac{P_1-P_2}{L}$$

$$\tau_0 \to \frac{1}{2}\frac{h}{L}(P_1-P_2)$$

5) $\Lambda \gg 1 \to \quad \bar{u} \simeq \eta/\Lambda$



$$u = \frac{1}{\Lambda}\frac{h^2}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}$$

CLARO

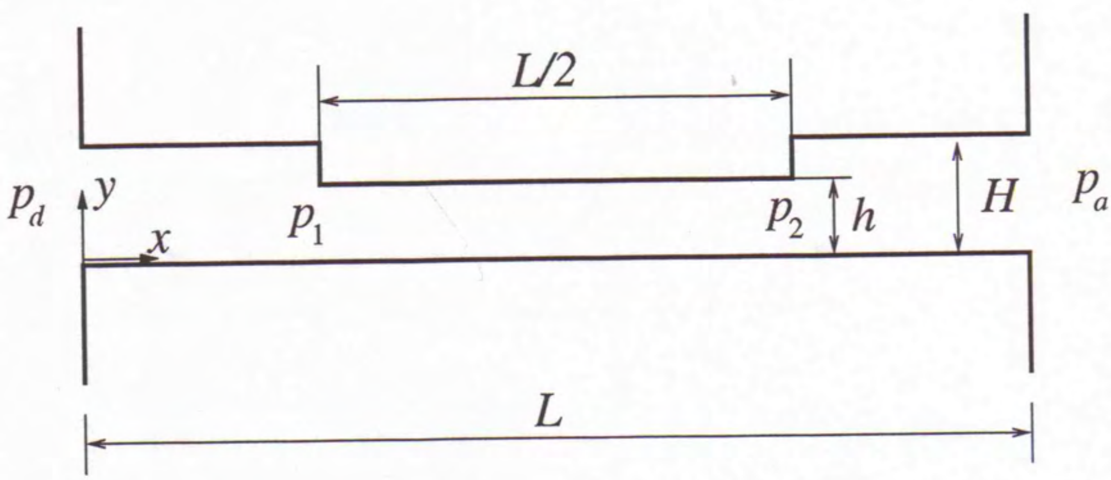
$$u \simeq \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{h^2}{\mu}\frac{P_1-P_2}{L}\right)\left(\eta - \cancel{\frac{e^{\Lambda\eta}-1}{e^{\Lambda}}}\right)$$

CAPA LIMITE: $\xi = (1-\eta)\Lambda$

(ESPESOR Λ^{-1})

$$\frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2} + \frac{d\bar{u}}{d\xi} = 0 \qquad \left.\begin{matrix}\bar{u}(0) = 0 \\ \bar{u}(\infty) = \frac{1}{\Lambda}\end{matrix}\right\} \boxed{\bar{u} = \frac{1}{\Lambda}\left(-e^{-\xi}+1\right)}$$

Problema 4



1) $U_c \sim \frac{H^2}{\mu}\frac{P_d - P_a}{L}$, CRITERIO $\frac{\rho U_c H}{\mu}\frac{H}{L} \ll 1 \rightarrow \frac{\rho H^4 (P_d - P_a)}{\mu^2 L^2} \ll 1$

2) $0 < x < \frac{L}{4}$, $P_\ell = -\frac{\partial P}{\partial x} = 4\frac{P_d - P_1}{L}$, $u = \frac{1}{\mu}\frac{P_\ell}{2} y(H-y)$, $Q_1 = \frac{H^3}{12\mu} 4 \frac{P_d - P_1}{L}$

$\frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4}$, $P_\ell = 2\frac{P_1 - P_2}{L}$, $u = \frac{1}{\mu}\frac{P_\ell}{2} y(h-y)$, $Q_2 = \frac{h^3}{12\mu} 2 \frac{P_1 - P_2}{L}$

$\frac{3L}{4} < x < L$, $P_\ell = 4\frac{P_2 - P_a}{L}$, $u = \frac{1}{\mu}\frac{P_\ell}{2} y(H-y)$, $Q_3 = \frac{H^3}{12\mu} 4 \frac{P_2 - P_a}{L}$

3) $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q \rightarrow$

$$P_1 = P_d - \frac{(P_d - P_a)}{2}\frac{(h/H)^3}{1+(h/H)^3}$$

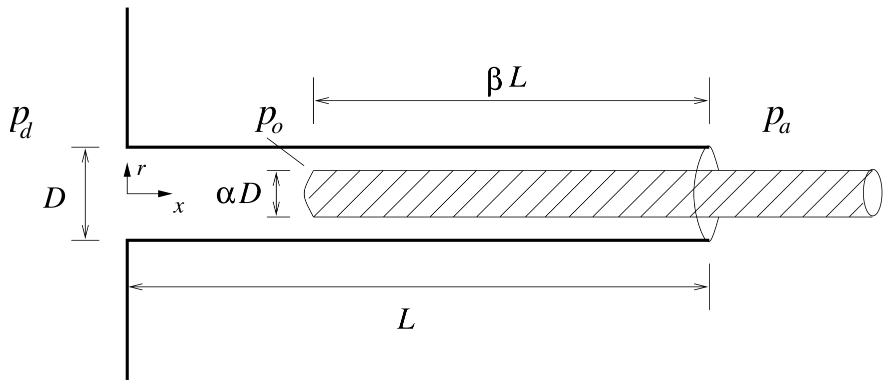
$$P_2 = P_a + \frac{(P_d - P_a)}{2}\frac{(h/H)^3}{1+(h/H)^3}$$

$$Q = \frac{h^3}{6\mu L}\frac{(P_d - P_a)}{1+(h/H)^3}$$

4) $h = H$, $P_1 = P_d - \frac{(P_d - P_a)}{4}$, $P_2 = P_d - \frac{3}{4}(P_d - P_a)$, $Q = \frac{H^3}{12\mu L}(P_d - P_a)$

$h \ll H$, $P_1 = P_d$, $P_2 = P_a$, $Q = \frac{h^3}{12\mu L/2}(P_d - P_a)$

Problema 5



Solución:

1. Dado que el problema es estacionario, ya que las condiciones de contorno son indepedendientes del tiempo, y casi-unidireccional por ser $D \ll L$, para que el movimiento esté dominado por la viscosidad basta con que se cumpla que el término de aceleración convectiva, del orden de $\rho u_c^2/L$, sea mucho menor que el término viscoso, del orden de $\mu u_c/D^2$, donde u_c es la velocidad característica del líquido en el conducto, dando el criterio $ReD/L \ll 1$, donde $Re = \rho u_c D/\mu$ es el número de Reynolds. A su vez, u_c puede obtenerse igualando los órdenes de magnitud del gradiente de presión, que origina el movimiento, y del término viscoso, $(p_d - p_a)/L \sim \mu u_c/D^2$, dando $u_c \sim D^2(p_d - p_a)/(\mu L)$. Por lo tanto, el criterio buscado es

$$\frac{\rho\,(p_d - p_a)\,D^4}{\mu^2\,L^2} \ll 1.$$

2. El campo de velocidad puede obtenerse integrando la ecuación de cantidad de movimiento axial, que, bajo condiciones de viscosidad dominante, queda reducida a

$$0 = P_l + \frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r},\right) \tag{1}$$

donde $P_l = -dP/dx$ es el gradiente de presión reducida, que es constante en las regiones $0 \leq x \leq (1-\beta)L$ y $(1-\beta)L \leq x \leq L$, pero cuyo valor es, en general, distinto en ambas regiones.

Para obtener la solución en la región $0 \leq x \leq (1-\beta)L$ ha integrarse la ecuación (1) con las condiciones de contorno $r = 0: \, \partial u/\partial r = 0; \; r = D/2: \, u = 0$, para dar el flujo de Poiseuille,

$$u = \frac{P_l \, D^2}{16\mu} \left(1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 \right), \tag{2}$$

$$P_l = \frac{p_d - p_o}{(1-\beta)L}, \tag{3}$$

donde se ha supuesto que el conducto es horizontal, o, alternativamente, que las fuerzas másicas son despreciables en el movimiento, $Fr = u_c^2/gL \gg 1$.

Del mismo modo, la solución en la región $(1-\beta)L \leq x \leq L$ se obtiene de integrar (1) con las condiciones de adherencia en las paredes interior y exterior, $r = \alpha D/2: \, u = 0; \; r = D/2: \, u = 0$, dando

$$u = \frac{P_l \, D^2}{16\mu} \left(1 - \left(\frac{2r}{D} \right)^2 - \frac{(1-\alpha^2)}{\ln(\alpha)} \ln\left(\frac{2r}{D} \right) \right), \tag{4}$$

$$P_l = \frac{p_o - p_a}{\beta L}. \tag{5}$$

3. Los valores de p_o y del caudal Q pueden obtenerse usando la pareja de ecuaciones correspondientes a imponer $Q = \int_\Sigma u \, d\sigma$ en ambos tramos. En el primer tramo se tiene que $Q = 2\pi \int_0^{D/2} r \, u(r) \, dr$ con $u(r)$ dado por la ecuación (2), resultando

$$Q = \frac{\pi \, (p_d - p_o) \, D^4}{128\mu \, (1-\beta)L}, \tag{6}$$

mientras que para el segundo tramo $Q = 2\pi \int_{\alpha D/2}^{D/2} r \, u(r) \, dr$ con $u(r)$ dado por (4), obteniéndose

$$Q = \frac{\pi \, (p_o - p_a) \, D^4}{128\mu \, \beta L} \, (1 - f(\alpha)), \tag{7}$$

$$f(\alpha) = \alpha^4 - \frac{(1-\alpha^2)^2}{\ln(\alpha)},$$

donde se ha hecho uso de la integral por partes $\int x \ln(x) \, dx = x^2 \left(\ln(x) - 1/2 \right)/2$.

Igualando las expresiones (6) y (7) se obtiene la ecuación que determina la presión p_0,

$$\frac{p_d - p_o}{(1-\beta)L} = \frac{p_o - p_a}{\beta L} \, (1 - f(\alpha)),$$

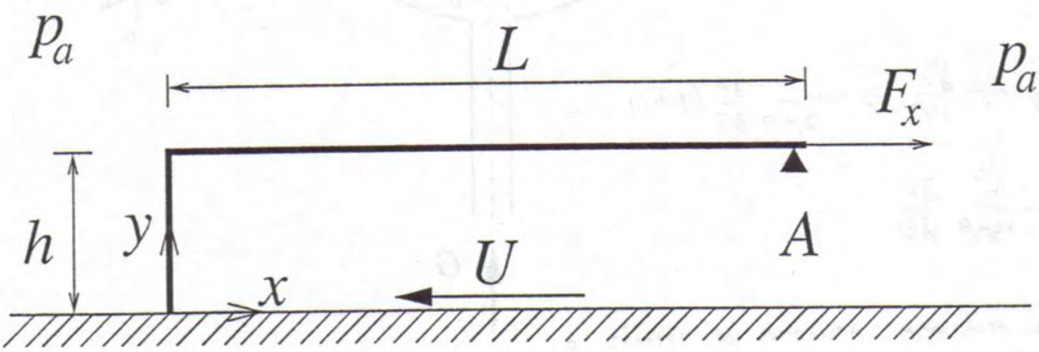
de donde se despeja inmediatamente el valor de p_o,

$$p_o = p_d - \frac{(1-\beta)p_d - p_a}{1 + \frac{\beta f}{1-f}}, \tag{8}$$

así como el valor del caudal sin más que sustituir este último resultado en la ecuación (6),

$$Q = \frac{\pi \, (p_d - p_a) \, D^4}{128\mu \, L \left(1 + \frac{\beta f}{1-f} \right)}, \tag{9}$$

Problema 6



① $\dfrac{\rho U h}{\mu}\dfrac{h}{L} \ll 1$

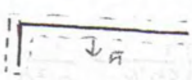
② $0 = P_\ell + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ($P_\ell = -\dfrac{dp}{dx}$) $\quad u(0) = -U$, $\quad u(h) = 0$

$u = \dfrac{P_\ell h^2}{2\mu}\dfrac{y}{h}\left(1-\dfrac{y}{h}\right) - U\left(1-\dfrac{y}{h}\right)$

③ $q = \int_0^h u\,dy = 0 \Rightarrow q = \dfrac{P_\ell h^3}{12\mu} - \dfrac{Uh}{2} = 0 \Rightarrow -P_\ell = \dfrac{dp}{dx} = -\dfrac{6\mu U}{h^2} \xrightarrow[p=p_a]{x=L} p - p_a = \dfrac{6\mu U}{h^2}(L-x)$

$\boxed{P(0) = P_a + \dfrac{6\mu U}{h^2}L}$

④ FUERZA HORIZONTAL QUE EJERCE EL FLUIDO SOBRE LIMPIADOR

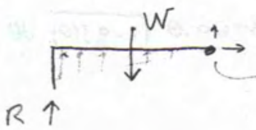


$\left(-\iint_\Sigma (P-P_a)\bar{n}\,d\sigma + \int_\Sigma \bar{\bar{\tau}}'\cdot\bar{n}\,d\sigma\right)_x = -\underbrace{\dfrac{6\mu U L}{h^2}}_{P(0)} h\,\bar{e}_x - \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=h} L = -\dfrac{4\mu U L}{h}\bar{e}_x$

$\boxed{F_x = \dfrac{4\mu U L}{h}}$

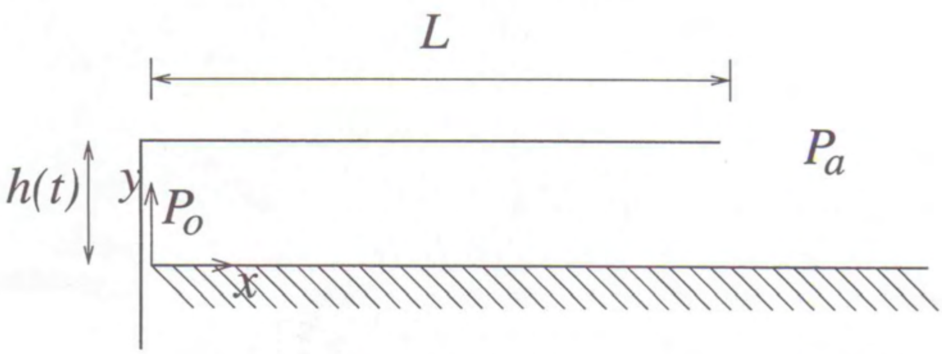
⑤ $M_F = -\int (\bar{x}-\bar{x}_0)\wedge(P-P_a)\bar{n}\,d\sigma + \int (\bar{x}-\bar{x}_0)\wedge\bar{\bar{\tau}}'\cdot\bar{n}\,d\sigma = -\int_0^L (P-P_a)(L-x)\,dx = -\dfrac{2\mu U L^3}{h^2}$

⑥



$M = W\dfrac{L}{2} - RL - \dfrac{2\mu U L^3}{h^2} \xrightarrow{\text{EL LIMPIADOR SE LEVANTA CUANDO } R=0} U = \dfrac{W h^2}{4\mu L^2}$

Problema 7



1) $0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left\{ u=0,\ y=0,h \right. \Rightarrow u = -\frac{\partial P}{\partial x}\frac{y(h-y)}{2\mu}, \quad q = -\frac{\partial P}{\partial x}\frac{h^3}{12\mu}$

$\frac{dh}{dt} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(+\frac{\partial P}{\partial x}\frac{h^3}{12\mu}\right) = \frac{dh}{dt}}$ 2 1 $\xrightarrow{q=0,\ x=0} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{12\mu}{h^3}\frac{dh}{dt}x \xrightarrow[x=L]{P=P_a} P - P_a = \frac{6\mu}{h^3}\frac{dh}{dt}(x^2-L^2)$ 1

$\boxed{P_o(t) - P_a = -\frac{6\mu}{h^3}\frac{dh}{dt}L^2}$ 1, $\boxed{u = -\frac{\cancel{12\mu}\,6}{h^3}\frac{dh}{dt}\,x\,\frac{y(h-y)}{\cancel{2\mu}}}$, $\boxed{q = -\frac{dh}{dt}x}$ 1

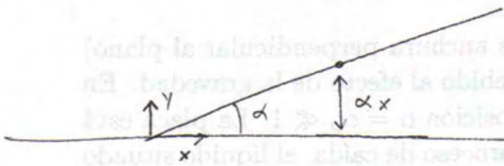
2) $\boxed{F_y = \int_0^L (P-P_a)\,dx = -\frac{4\mu}{h^3}\frac{dh}{dt}L^3}$ 2, $\boxed{F_x = -(P_o-P_a)h - \int_0^L \mu\frac{\partial u}{\partial y}dx = \frac{3\mu}{h^2}\frac{dh}{dt}L^2}$ 2

$\frac{6\mu}{h^2}\frac{dh}{dt}L^2 - \frac{3\mu}{h^2}\frac{dh}{dt}L^2$

3) $\boxed{M = \int_0^L (P-P_a)\,x\,dx = -\frac{3}{2}\frac{\mu}{h^3}\frac{dh}{dt}L^4}$ 2

Problema 8

①



$$\frac{1}{3} M L^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -Mg\frac{L}{2} + \int_0^L x(P-P_a)\,dx$$

SI NO HUBIERA FUERZA DEL FLUIDO $t_c \sim \left(\frac{L\alpha_0}{g}\right)^{1/2}$

VELOCIDADES VERTICALES INDUCIDAS $V_c \sim \frac{\alpha_0 L}{t_c} \sim (gL\alpha_0)^{1/2}$

VELOCIDADES LONGITUDINALES INDUCIDAS $U_c \sim \frac{L}{t_c} \sim \left(\frac{gL}{\alpha_0}\right)^{1/2}$

②

$$\frac{\left|\rho u \frac{\partial u}{\partial x}\right|}{\left|\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|} = \frac{\rho U_c^2/L}{\mu U_c/(\alpha_0^2 L^2)} = \frac{\rho \alpha_0^{3/2} L^{3/2} g^{1/2}}{\mu} \ll 1$$

$$\frac{\left|\rho \frac{\partial u}{\partial t}\right|}{\left|\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|} = \frac{\rho \alpha_0^{3/2} L^{3/2} g^{1/2}}{\mu} \ll 1$$

NOTESE QUE EL EFECTO DEL FLUIDO RALENTIZA LA CAIDA, DE MANERA QUE EN REALIDAD EL TIEMPO DE CAIDA SERA MAYOR Y LAS VELOCIDADES INDUCIDAS MENORES, CON LO QUE LOS CRITERIOS DADOS SON CONDICION SUFICIENTE PARA QUE EL MOV. ESTE DOMINADO POR LA VISCOSIDAD

③

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \Delta P_L \sim L\mu\frac{U_c}{\alpha_0^2 L^2}$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial y}(P+\rho g y) + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$\frac{\Delta P_T}{\alpha_0 L} \quad \rho g \quad \frac{\mu (gL\alpha_0)^{1/2}}{(L\alpha_0)^2} \rightarrow \frac{|\rho g|}{\left|\mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|} \sim \frac{\rho\alpha_0^{3/2}L^{3/2}g^{1/2}}{\mu} \ll 1$$

DE DONDE

$$\Delta P_T \sim \alpha_0 L \mu \frac{V_c}{\alpha_0^2 L^2}$$

COMO $\frac{\Delta P_T}{\Delta P_L} \sim \alpha_0^2 \ll 1 \rightarrow$ LA EC. CM. $y \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = 0 \rightarrow \boxed{P = P(x,t)}$

④

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \left.\begin{array}{l} u(y=0)=0 \\ u(y=h)=0 \end{array}\right\} \rightarrow u = +\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}-1\right) \rightarrow q = \int_0^h u\,dy = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x}$$

EC. REYNOLDS, O BIEN $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v(y=h) - 0 + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u\,dy = 0$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \qquad x\frac{d\alpha}{dt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{2}\dot\alpha - \frac{\alpha^3 x^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x} = CTE = 0 \rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = +\frac{6\mu}{x}\frac{\dot\alpha}{\alpha^3}$$

$q = 0$ EN $x = 0$

ALTERNATIVAMENTE

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}x\cdot\alpha x\right) + \int_0^{\alpha x} u\,dy = 0 \rightarrow \frac{x^2}{2}\frac{d\alpha}{dt} - \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

$$u = \frac{\alpha^2 x^2}{2\mu}\frac{6\mu}{x}\frac{\dot\alpha}{\alpha^3}\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}-1\right) \Rightarrow \boxed{u = \frac{3x\dot\alpha}{\alpha}\frac{y}{h}\left(\frac{y}{h}-1\right)}$$

$$P = +6\mu\frac{\dot\alpha}{\alpha^3}\ln(x) + CTE$$

$x = L$, $P = P_a \rightarrow \boxed{P - P_a = \frac{6\mu\dot\alpha}{\alpha^3}\ln\left(\frac{x}{L}\right)}$

¡SINGULAR EN $x=0$!

⑤

$$\boxed{\frac{1}{3}ML^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -Mg\frac{L}{2} + \frac{6\mu\dot\alpha}{\alpha^3}L^2\underbrace{\int_0^1 \eta\ln(\eta)\,d\eta}_{} = -Mg\frac{L}{2} - \frac{3}{2}\frac{\mu\dot\alpha}{\alpha^3}L^2}$$

$\alpha(0) = \alpha_0$

$\frac{d\alpha}{dt}(0) = 0$

$$\int \eta\ln\eta\,d\eta = \frac{\eta^2}{2}\left(\ln\eta - \frac{1}{2}\right)$$

⑥

$$\boxed{\frac{d^2\bar\alpha}{d\tau^2} + \frac{9}{2}\Lambda\frac{1}{\bar\alpha^3}\frac{d\bar\alpha}{d\tau} = -\frac{3}{2}}$$

$$\tau = \frac{t}{\left(\frac{L\alpha_0}{g}\right)^{1/2}}$$

$$\Lambda = \frac{\mu L^{1/2}}{M\alpha_0^{5/2}g^{1/2}}$$

$$\bar\alpha = \frac{\alpha}{\alpha_0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar\alpha(0) = 1 \\ \frac{d\bar\alpha}{d\tau}(0) = 0\end{array}}$$

⑦ PARA ENTENDER FISICAMENTE EL LIMITE $\Lambda \gg 1$, VOLVAMOS MOMENTANEAMENTE A LA ECUACION EN FORMA DIMENSIONAL

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot\alpha = -Mg\frac{L}{2} - \frac{3}{2}\frac{\mu\dot\alpha}{\alpha^3}L^2$$

$$ML^2\frac{\alpha_0}{t_c^2} \qquad MgL \qquad \frac{\mu L^2}{\alpha_0^2 t_c}$$

SIEMPRE ES IMPORTANTE

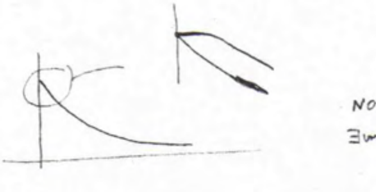
SI $ML^2\frac{\alpha_0}{t_c^2} \sim MgL \rightarrow t_c \sim \left(\frac{L\alpha_0}{g}\right)^{1/2}$, $\frac{\left|-\frac{3}{2}\frac{\mu\dot\alpha}{\alpha^3}L^2\right|}{\left|\frac{1}{3}ML^2\ddot\alpha\right|} \sim \Lambda$

ESTO FUNCIONA (AL MENOS UN RATO) SIEMPRE QUE $\Lambda \lesssim 1$

¿SI $\Lambda \gg 1$? $\rightarrow MgL \sim \frac{\mu L^2}{\alpha_0^2 t_c} \rightarrow t_c \sim \frac{\mu L}{Mg\alpha_0^2} \sim \Lambda^{-1}\left(\frac{L\alpha_0}{g}\right)^{1/2}$

$$\frac{\left|\frac{1}{3}ML^2\ddot\alpha\right|}{\left|-\frac{3}{2}\frac{\mu\dot\alpha L^2}{\alpha^3}\right|} \sim \Lambda^{-1} \ll 1 \rightarrow 0 = -Mg\frac{L}{2} - \frac{3}{2}\frac{\mu\dot\alpha}{\alpha^3}L^2$$

$$\frac{\dot\alpha}{\alpha^3} = -\frac{1}{3}\frac{Mg}{\mu L} \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{3}\frac{Mg\alpha_0^2 t}{\mu L}}}$$



NO CUMPLE LA CONDICION INICIAL.

∃ UNA ETAPA INICIAL DE DURACION $(L\alpha_0/g)^{1/2} \ll \frac{\mu L}{Mg\alpha_0^2}$ EN LA QUE $(\bar\alpha \sim 1)$ CUENTA EL TERMINO $\frac{1}{3}ML^2\ddot\alpha$.

• Ley $L(t)$ En un instante genérico el volumen total de fluido es $V(t) = \pi R^2 h(t) + 2\pi R h_o L(t)$

Este volumen tiene que ser igual al volumen inicial $V_o = \pi R^2 (3h_o)$

$$\underbrace{\pi R^2(\cancel{3h_o} - Vt) + 2\pi R h_o L(t)}_{V(t)} \; = \; \underbrace{\pi R^2 (\cancel{3h_o})}_{V_o} \rightarrow \boxed{L(t) = \frac{V}{2}\frac{R}{h_o} t} \rightarrow \cancel{R} = \frac{V}{2}\frac{\cancel{R}}{h_o} t_p \rightarrow \boxed{t_p = \frac{2h_o}{V}}$$

Tiempo de llenado

• Criterio para que el movimiento esté dominado por la viscosidad

Problema 9

$[0] \rightarrow \frac{h_o}{R_o}, \frac{h_o}{L(t)} \ll 1$ (se cumple por enunciado)

$[1] \rightarrow \frac{\rho h_o^2}{\mu t_p} \ll 1 \rightarrow \frac{\rho h_o^{\cancel{2}} V}{\mu 2 \cancel{h_o}} \sim \boxed{\frac{\rho V h_o}{\mu} \ll 1}$ ← aceleración local despreciable

Términos convectivos despreciables

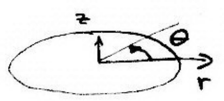
$[2] \rightarrow \frac{\rho U_c h_o}{\mu}\frac{h_o}{R} \ll 1$ donde $U_c \sim \frac{dL}{dt} \sim V\frac{R}{h_o} \rightarrow \frac{\rho (V\cancel{R}/\cancel{h_o})h_o}{\mu}\frac{h_o}{\cancel{R}} = \boxed{\frac{\rho V h_o}{\mu} \ll 1}$

Las condiciones [1] y [2] conducen en este caso al mismo criterio

Nótese que la velocidad longitudinal característica U_c puede obtenerse directamente de derivar la ley $L(t)$ del primer apartado

• Campo de presiones dentro del plástico (Trabajamos con presiones reducidas $P = p + \rho g z$ [0])

① Flujo bajo el vástago → Ecuación de Reynolds en coordenadas curvilíneas (r, θ)



$g_r = 1 \quad q_r = \int_0^h v_r dz = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial r} \qquad h(t) = 3h_o - Vt \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = -V$

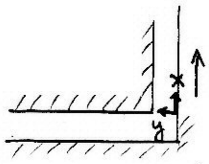
$g_\theta = r \quad q_\theta \equiv 0$ (mov. axilsimétrico) $\qquad \left.\frac{\partial P}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial r}\right) = \frac{\partial (rh)}{\partial t} = -Vr \rightarrow \frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial r} = -V\frac{r}{2} + \cancel{\frac{A}{r}} \rightarrow \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{6\mu V}{h^3} r \\ \left.\frac{\partial P}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \quad \text{simetría} \\ P(r=R) = P^*(t) \text{ desconocida} \rightarrow \text{la calculamos más abajo} \end{cases}$$

$$\boxed{P = P^*(t) + \frac{3\mu V}{h^3(t)}(R^2 - r^2)} \quad [1]$$

② Flujo en la holgura lateral (aproximamos por flujo 2D)

Tomamos un sistema de referencia x-y que se desplaza con el pistón (véase figura)



Ecuación de Reynolds 2D

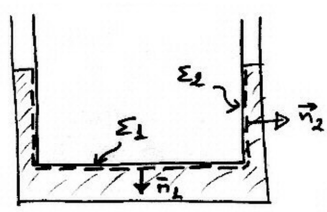
caudal total que sale por la holgura

$$\cancel{\frac{\partial h_o}{\partial t}} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \rightarrow q = \frac{V h_o}{2} - \frac{h_o^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi R} = \frac{\pi R^2 V}{2\pi R} = \frac{RV}{2} \equiv \text{cte}$$

$h_o \equiv$ cte

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{12\mu}{h_o^3}\left(\frac{V h_o}{2} - \frac{RV}{2}\right) = -\frac{6\mu R V}{h_o^3}\left(1 - \cancel{\frac{h_o}{R}}\right) \rightarrow \boxed{P = P^*(t) - \frac{6\mu R V}{h_o^3} x} \quad [2] \\ P(x = L(t)) = P_a \equiv p_a + \rho g L(t) \end{cases}$$

$\ll 1$



Imponiendo $P(x = L(t)) = P_a$ obtenemos

$$P^*(t) = P_a + \frac{3\mu R^2 V^2}{h_o^4} t = p_a + \rho g L(t) + \frac{3\mu R^2 V^2}{h_o^4} t = p_a + \left(\rho g \frac{VR}{2h_o} + \frac{3\mu R^2 V^2}{h_o^4}\right) t \quad [3]$$

que junto con [0] [1] y [2] determina la distribución de presiones

despreciable

$$\bullet\ F_z = \vec{F}_{\text{fluido} \to \text{vástago}} \cdot \vec{e}_z = \left[-\int_{\Sigma_v | \Sigma_1, \cancel{\Sigma_2}} (P - P_a)\vec{n}\, d\sigma + \int_{\Sigma_v | \cancel{\Sigma_1}, \Sigma_2} \bar{\bar{\tau}}' \cdot \vec{n}\, d\sigma\right] \cdot \vec{e}_z = \int_0^R (P - P_a) 2\pi r dr + \cancel{\int_{\Sigma_2} \bar{\bar{\tau}}' \cdot \vec{n}\, d\sigma}$$

$\vec{n} \cdot \vec{e}_z = 0 \qquad \perp \vec{e}_z$

operar

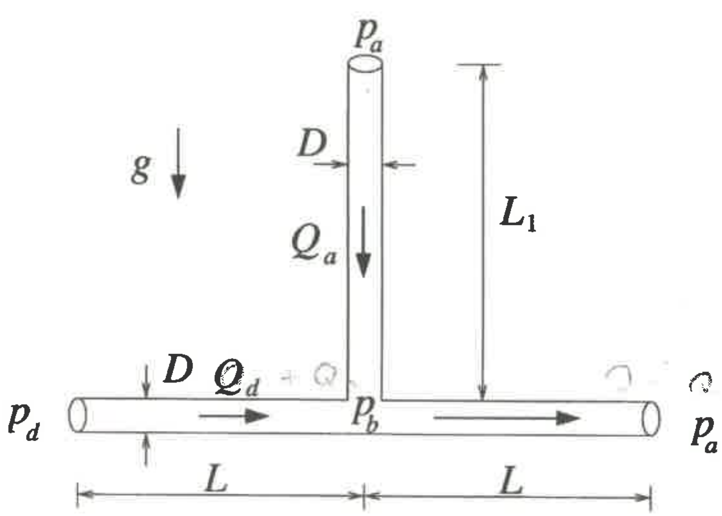
$$\boxed{F_z = \int_0^R (P - P_a) 2\pi r dr = \int_0^R \left[\frac{3\mu R^2 V^2}{h_o^4} t + \frac{3\mu V}{h^3(t)}(R^2 - r^2)\right] 2\pi r dr = 3\pi R^2 \frac{\mu V}{h_o}\frac{R^2}{h_o^2}\left[\frac{Vt}{h_o} + \frac{1}{2}\frac{h_o^3}{h^3(t)}\right]}$$

$$\int_{\Sigma_2} \bar{\bar{\tau}}' \cdot \vec{n}\, d\sigma \sim \underbrace{\mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h}}_{\sim \frac{VR}{h_o^2}} \cdot 2\pi R \underbrace{L(t)}_{\sim R} \sim \pi R^2 \frac{\mu V}{h_o}\frac{R}{h_o} \rightarrow$$

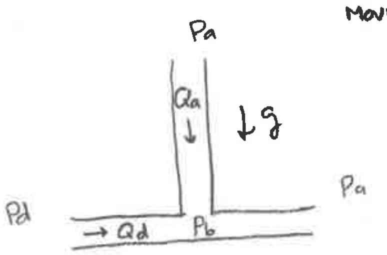
es un factor $\frac{h_o}{R} \ll 1$ más pequeño que el término de presión y por tanto se puede despreciar

Nota: en la resolución del problema se han despreciado términos de orden $\frac{h_o}{R}$ e ignoramos el detalle del flujo en la esquina, donde suponemos que la presión vale P^*

Problema 10



MOVIMIENTO DOMINADO POR LA VISCOSIDAD SI $\boxed{\frac{\rho D^4}{\mu^2 L^2}(P_d - P_a) \ll 1 \quad y \quad \frac{\rho^2 D^4 g}{\mu^2 L} \ll 1}$ 2



FLUJO DE POISEUILLE: $Q = \frac{\pi D^4}{128\mu} P_\ell, \quad P_\ell = -\frac{\partial}{\partial \ell}(P + \rho g z)$

TRAMO VERTICAL $\quad \frac{128\mu Q_a}{\pi D^4} = \left(\frac{P_a - P_b}{L_1} + \rho g\right)$

1er TRAMO HORIZONTAL $\quad \frac{128\mu Q_d}{\pi D^4} = \frac{P_d - P_b}{L}$

2° TRAMO " $\quad \frac{128\mu}{\pi D^4}(Q_a + Q_d) = \frac{P_b - P_a}{L}$

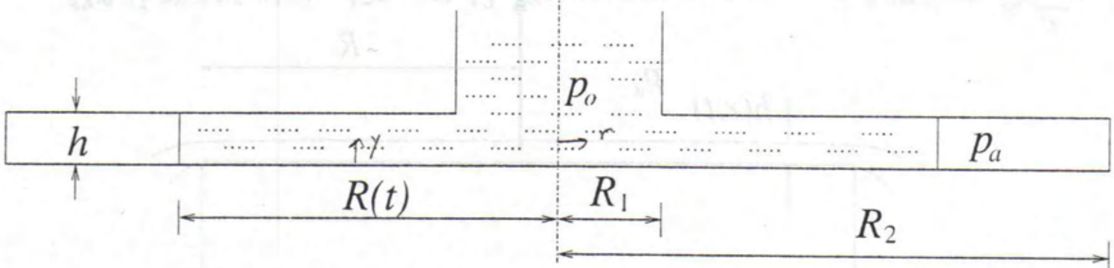
3

DESPEJANDO SE OBTIENE $\quad Q_a = \frac{\pi D^4}{128\mu}\left(\frac{P_a - P_d + 2\rho g L_1}{L + 2L_1}\right), \quad Q_d = \frac{\pi D^4}{128\mu}\left[\frac{(P_d - P_a)(L + L_1) - \rho g L_1 L}{L(L + 2L_1)}\right]$

$P_b = P_a + \rho g L_1 - \frac{128\mu Q_a L_1}{\pi D^4}$ 3

PARA QUE $\quad Q_a > 0 \;\; Y \;\; Q_d > 0 \implies \boxed{\frac{L}{L_1} < \frac{P_d - P_a}{\rho g L_1} < 2}$ 2

Problema 13



$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow u = -\frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dr}\, y(h-y) \quad , \quad \int_0^h u\,dy = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{dP}{dr}$$

CONTINUIDAD $\frac{\partial}{\partial r}\left(r \int_0^h u\,dy\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{dP}{dr}\right) = 0 \quad P = A \ln r + B \quad \begin{cases} r = R_1, & P = P_0 \\ r = R & P = P_a \end{cases}$

$$P = -\frac{(P_0 - P_a)}{\ln(R/R_1)} \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + P_0$$

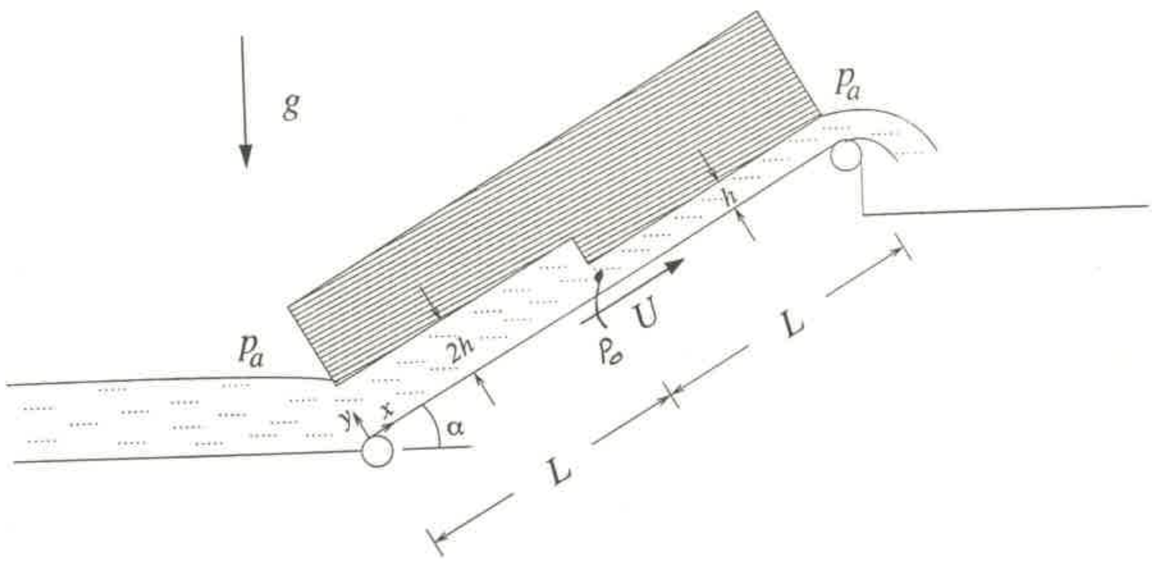
$$Q = 2\pi r \int_0^h u\,dy = \boxed{\frac{2\pi h^3}{12\mu}\frac{(P_0 - P_a)}{\ln(R/R_1)} = 2\pi h R \frac{dR}{dt}}$$

$$\boxed{\int_1^{R/R_1} \frac{R}{R_1}\ln\left(\frac{R}{R_1}\right) d\left(\frac{R}{R_1}\right) = \frac{(P_0 - P_a)}{12\mu}\left(\frac{h}{R_1}\right)^2 t}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_1}\right)^2\left[\ln\left(\frac{R}{R_1}\right) - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{4} = \frac{P_0 - P_a}{12\mu}\left(\frac{h}{R_1}\right)^2 t}$$

↳ ESTA ECUACION DETERMINA t_c.
↳ CON $R = R_2$

Problema 14



- $\frac{Uh}{\nu}\frac{h}{L} \ll 1$ (1)

$$0 = -\frac{d}{dx}P + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow Q = \frac{U\,2h}{2} - \frac{8h^3}{12\mu}\frac{(P_0 + \rho g L \operatorname{sen}\alpha - P_a)}{L}$$

$$= \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu}\frac{(P_a + 2\rho g L \operatorname{sen}\alpha - P_0 - \rho g L \operatorname{sen}\alpha)}{L}$$

$$P_{l_1} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{P_0 - P_a}{L} - \rho g \operatorname{sen}\alpha$$

$0 < x < L$: $p = P_a + (P_0 - P_a)\frac{x}{L}$

$L < x < 2L$: $p = P_0 - (P_0 - P_a)\frac{x-L}{L}$

$$P_{l_2} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{P_a - P_0}{L} - \rho g \operatorname{sen}\alpha$$

$$\boxed{P_0 - P_a = \frac{2}{3}\frac{\mu U L}{h^2} - \frac{7}{9}\rho g L \operatorname{sen}\alpha} \quad (3)$$

$$\boxed{Q = \frac{5}{9}Uh - \frac{4}{27}\frac{\rho g h^3 \operatorname{sen}\alpha}{\mu}} \quad (3)$$

$$\boxed{U_m = \frac{4}{15}\frac{\rho g h^2 \operatorname{sen}\alpha}{\mu}} \quad (1)$$

$0 < x < L$: $\tau_1 = \mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = -\frac{\mu U}{2h} + P_{l_1} h$

$L < x < 2L$: $\tau_2 = \mu\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\mu U}{h} + \frac{P_{l_2} h}{2}$

$$\boxed{W = UL(\tau_1 + \tau_2) = UL\left(-\frac{3}{2}\frac{\mu U}{h} - \frac{3}{2}\rho g \operatorname{sen}\alpha\, h - \frac{1}{2}\frac{P_0 - P_a}{L}h\right)} \quad (2)$$

Problema 15

SOLUCIÓN:

1.- Ecuación de cantidad de movimiento (fuerzas másicas despreciables):

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}\qquad+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\sim\rho\frac{U_c^2}{a}\quad\sim\rho\frac{U_c^2}{a}\quad\sim\underbrace{\frac{p_0-p_\infty}{a}}\quad\sim\mu\frac{U_c}{a^2}\quad\sim\underbrace{\mu\frac{U_c}{h^2}}$$

Si los términos viscosos son dominantes, la velocidad característica en la película es

$$\frac{p_0-p_\infty}{a}\sim\mu\frac{U_c}{h_\infty^2}\qquad\Rightarrow\qquad U_c\sim\frac{h_\infty^2(p_0-p_\infty)}{a\mu}$$

Para que los términos convectivos sean despreciables debe ser

$$\rho\frac{U_c^2}{a}\ll\mu\frac{U_c}{h_\infty^2}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\rho h_\infty^4(p_0-p_\infty)}{a^2\mu^2}\ll 1$$

2.- Flujo dominado por la viscosidad con paredes fijas $\Rightarrow$ Poiseuille

$$u(x,y)=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial(p-p_\infty)}{\partial x}y(y-h(x))$$

El gradiente de presión debe variar con x para garantizar que el flujo volumétrico, q, que atraviesa cualquier sección transversal a la película sea constante:

$$q=\int_0^{h(x)}u(x,y)\,dy=-\frac{h(x)^3}{12\mu}\frac{\partial(p-p_\infty)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}=0\qquad\Rightarrow\qquad\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{h^3(x)}{12\mu}\frac{\partial(p-p_\infty)}{\partial x}\right)=0\qquad(1)$$

Las condiciones de contorno son $p-p_\infty=p_0-p_\infty$ en $x=b$ y $p-p_\infty=0$ en $x=a+b$.

3.- Integrando una vez la Ecuación (1)

$$-\frac{h^3(x)}{12\mu}\frac{\partial(p-p_\infty)}{\partial x}=q\qquad\Rightarrow\qquad\frac{p-p_\infty}{p_0-p_\infty}=1-\frac{12\mu q}{p_0-p_\infty}\int_b^x h^{-3}(x)dx\qquad(2)$$

El gasto volumétrico se obtiene particularizando este resultado en la sección de salida, $x=a+b$, donde $p=p_\infty$:

$$q=\frac{p_0-p_\infty}{12\mu\int_b^{a+b}h^{-3}(x)dx}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{p-p_\infty}{p_0-p_\infty}=1-\frac{\int_b^x h^{-3}(x)dx}{\int_b^{a+b}h^{-3}(x)dx}=\frac{\int_x^{b+a}h^{-3}dx}{\int_b^{a+b}h^{-3}dx}$$

Escribiendo $h(x)=h_0[1-(1-\beta)(x-b)/a]$, con $h_0=h_\infty+\alpha a$ y $\beta=h_\infty/h_0$, e integrando de nuevo se obtiene la distribución de presiones

$$\frac{p-p_\infty}{p_0-p_\infty}=1-\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\left\{\frac{1}{[1-(1-\beta)(x-b)/a]^2}-1\right\}$$

4.-

$$\frac{F_y}{a(p_0-p_\infty)}\simeq 2\int_0^{a+b}\frac{p-p_\infty}{a(p_0-p_\infty)}dx=\underbrace{\frac{2b}{a}}_{\int_0^b}+\underbrace{\frac{2}{\beta+1}}_{\int_b^{a+b}}=2\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{\beta+1}\right)$$

5.- Del equilibrio de fuerzas resulta

$$mg=2a(p_0-p_\infty)\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{\beta+1}\right)\qquad\Rightarrow\qquad\beta\equiv\frac{h_\infty}{h_\infty+\alpha a}=\left[\frac{mg}{2a(p_0-p_\infty)}-\frac{b}{a}\right]^{-1}-1$$

Problema 16

1. velocidad en la ranura (U_L): por continuidad el fluido que ocupa el área barrida por el pistón debe salir por la ranura

$$\cancel{\pi} R^2 U_0 \sim 2\cancel{\pi} R h\, U_L \longrightarrow \boxed{U_L \sim \frac{R}{h} U_0}$$

criterio para movimiento dominado por viscosidad:

$$[1]\quad \boxed{\frac{\rho h^2/\mu}{t_0} \ll 1} \qquad [2]\quad \frac{\rho U_L h}{\mu}\frac{h}{L} \ll 1 \longrightarrow \boxed{\frac{\rho U_0 R}{\mu}\frac{h}{L} \ll 1}$$

2. campo de velocidades (lo tomo directamente de los apuntes: "El efecto cuña")

$$\boxed{u = \frac{P_\ell}{2\mu} y(h-y) + U_p \frac{h-y}{h}} \qquad P_\ell = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\boxed{q = \int_0^h u\, dy = \frac{P_\ell h^3}{12\mu} + \frac{U_p h}{2}}$$ caudal por unidad de longitud $\perp$ al flujo

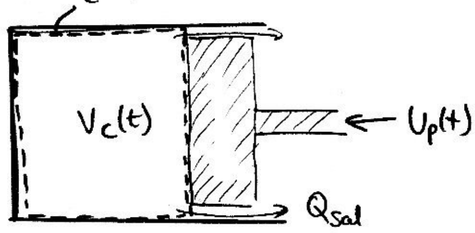
3. distribución de presiones

Eq. Reynolds: $\frac{\partial q}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial h}{\partial t}} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_\ell h^3}{12\mu} + \frac{U_p h}{2}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \\ P(x=0) = P_0 \\ P(x=L) = P_a \end{cases}$

$h \equiv cte$

$h \equiv cte$

$U_p = U_p(t)$



$\hookrightarrow P = P_a + \frac{P_0 - P_a}{L}(L-x)$

Integramos 2 veces e imponemos las c. contorno

$$P_\ell = -\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_0 - P_a}{L} \equiv cte$$

Para calcular P_0 (o equivalentemente P_ℓ) aplicamos continuidad en forma integral al fluido que queda a la izquierda del pistón

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left[V_c(t)\right]}_{-\pi R^2 U_p(t)} + \underbrace{\int_{\Sigma_c} \vec{v}\cdot\vec{n}\, ds}_{Q_{sal}} = 0$$

El caudal que sale por la rendija Q_{sal} es igual al caudal por unidad de longitud q multiplicado por la longitud de rendija

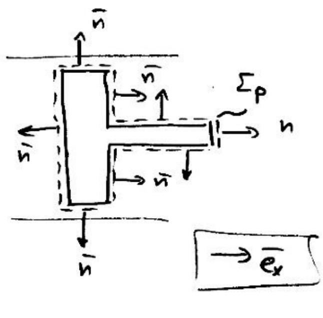
$$Q_{sal} = 2\pi R \cdot q$$

$$Q_{sal} = \cancel{\pi} R^2 U_p(t) = 2\cancel{\pi} R \left(\frac{P_0(t) - P_a}{L}\frac{h^3}{12\mu} + \frac{U_p(t)\, h}{2}\right)$$

$$\boxed{P_0(t) - P_a = \frac{12\mu L}{h^3}\left(\frac{R U_p(t)}{2} - \frac{U_p(t)\, h}{2}\right) = \frac{12\mu L}{h^3}\left(\frac{R}{2} - \frac{h}{2}\right) U_p(t) \underset{h \ll R}{\simeq} \frac{6\mu L R}{h^3} U_p(t)}$$

4. $$F_{fluido \to pistón, x} = \left[-\int_{\Sigma_p} (P - P_a)\, \bar{n}\, d\sigma + \int_{\Sigma_p} \bar{\bar{\tau}}' \cdot \bar{n}\, d\sigma\right] \cdot \bar{e}_x$$

$$= \left[-(P_0 - P_a)(-\bar{e}_x)\, \pi (R-h)^2 - \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} 2\pi (R-h) L\, \bar{e}_x\right] \cdot \bar{e}_x$$



$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} = \frac{P_\ell}{2\mu}(h - 2y) - \left.\frac{U_p}{h}\right|_{y=h} = -\frac{P_\ell h}{2\mu} - \frac{U_p}{h} = -\left[\frac{6\mu R}{h^3} U_p(t)\right]\frac{h}{2\mu} - \frac{U_p(t)}{h}$$

$$= -\left[\frac{6R}{h} + 1\right]\frac{U_p(t)}{h} \simeq -\frac{6R}{h} U_p(t)$$

$$F_{fluido \to pistón, x} \underset{h \ll R}{\simeq} \pi R^2 \frac{6\mu L R}{h^3} U_p(t) + 2\pi R \frac{6\mu L R}{h^2} U_p(t) = \left(\frac{R}{h} + 2\right) \pi R \frac{6\mu L R}{h^2} U_p(t)$$

$$F_x(t) = -F_{fluido \to pistón, x} \rightarrow \boxed{\vec{F}_x(t) \simeq -\pi R^2 \frac{6\mu L R}{h^3} U_p(t)\, \vec{e}_x}$$

casi todo es para vencer la presión P_0

Problema 17

1. Flujo casi-unidireccional (esbelto) : $\frac{b(x)}{L} \ll 1$ [1]

Flujo dominado por la viscosidad : $\frac{\rho U_L b(x)}{\mu} \frac{b(x)}{L} \ll 1$ [2]

Pero tanto U_L como $b(x)$ son incógnitas del problema que deben expresarse en función de los datos: ρ, μ, g, a, L, Q estimando órdenes de magnitud:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} \end{array} \right\} \rightarrow \underline{p = p(x) = p_a \equiv cte} \quad \text{(evaluamos } p(x) \text{ en } r = b(x) \text{ sup. libre)}$$

$$0 = \cancel{-\frac{\partial p}{\partial x}} + \mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \rho g$$

$$\sim \mu \frac{U_L}{(b-a)^2} \sim \rho g \rightarrow U_L \sim \frac{\rho g}{\mu}(b-a)^2 \quad [3]$$

Por otro lado $Q \sim \pi(b^2-a^2) U_L \sim (b^2-a^2)\frac{\rho g}{\mu}(b-a)^2 = (b-a)^3(b+a)\frac{\rho g}{\mu}$

de donde resulta $(b-a)^3(b+a) \sim \frac{Q\mu}{\rho g}$ [4]

Se deben cumplir las condiciones [1] y [2] con U_L dado por [3] y con b dado en función de Q por [4]

2. Como vimos más arriba $p = p_a \equiv cte$ en todo el campo fluido y el campo de velocidades vendrá dado por el problema:

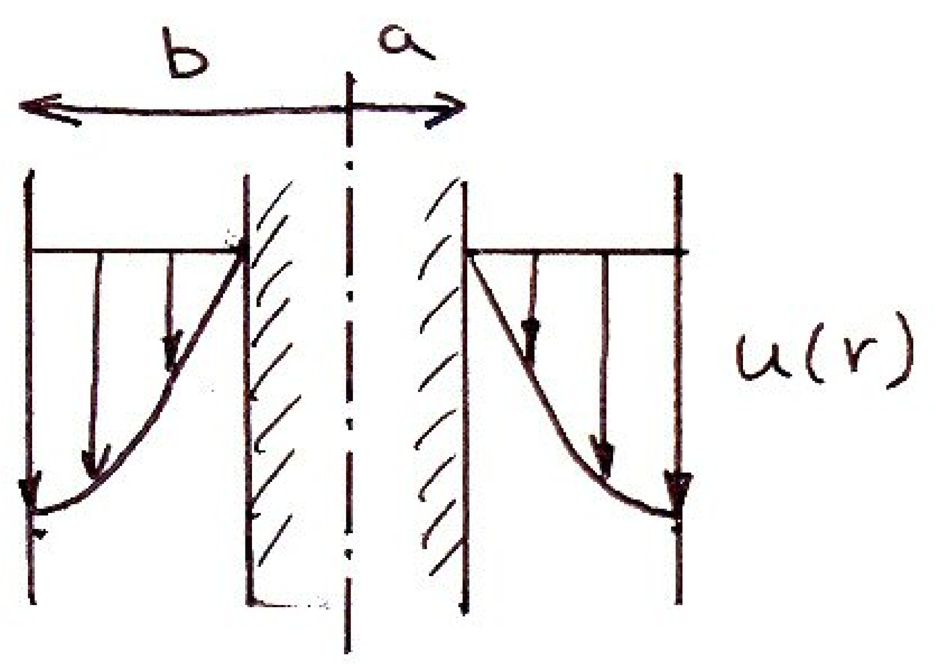
$$0 = \mu \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) + \rho g \qquad r = a: \ u = 0 \qquad r = b: \ \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \ \text{(esfuerzo nulo)}$$

↓ integrando 2 veces

$$u = -\frac{\rho g}{\mu}\frac{r^2}{4} + A \log r + B \xrightarrow{c.c.} \left| \begin{array}{l} A = \frac{\rho g}{\mu}\frac{b^2}{2} \\ B = \frac{\rho g}{\mu}\frac{a^2 - 2b^2 \log a}{4} \end{array} \right.$$

↓

$$u = \frac{\rho g}{4\mu}\left[2b^2 \log\frac{r}{a} - r^2 + a^2\right] \quad [5]$$

3. 

4. $$\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=a} = \left.\frac{\rho g}{2\mu} r\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right)\right|_{r=a} = \frac{\rho g}{2\mu} a\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)$$

$$F_v = 2\pi a \tau_{rx} = 2\pi a \mu \left.\frac{du}{dr}\right|_{r=a} = 2\pi a \mu \frac{\rho g}{2\mu} a\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) = \pi(b^2 - a^2)\rho g \quad [6]$$

La fuerza viscosa sobre la varilla es igual al peso del fluido que resbala por unidad de longitud de la misma.

5. $$Q = \int_{a(x)}^{b(x)} 2\pi r u(r)\, dr \underset{\substack{\uparrow \\ [5]}}{=} \frac{\pi \rho g a^4(x)}{2\mu}\left(\beta^4 \log \beta - \frac{3\beta^4}{4} + \beta^2 - \frac{1}{4}\right) \quad \text{con } \beta = \frac{b(x)}{a(x)} \quad [7]$$

Problema 18

1.- y 2.- Ambos apartados se hacen más rapidamente juntos.

Si $\underline{h \ll R}$, $r \simeq R$. Despreciando términos $\mathcal{O}(h/R)$:

$$\underbrace{\rho\left(\frac{u}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u^2}{R}\right)}_{\rho\frac{U_c^2}{R}} = \underbrace{-\frac{1}{R}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}}_{\frac{\rho g(H+R)}{R}} + \underbrace{\mu\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial y^2}}_{\mu\frac{U_c}{h^2}}$$

La U_c se estima igualando gradiente de presión motriz y término viscoso:

$$U_c \sim \frac{\rho g(H+R)}{R}\frac{h^2}{\mu} \underset{R\sim H}{\sim} \frac{\rho g h^2}{\mu} \sim \frac{gh^2}{\nu}$$

Lubricación: términos convectivos despreciables:

$$\frac{\rho\frac{U_c^2}{R}}{\mu\frac{U_c}{h^2}} \ll 1 \Rightarrow \overbrace{\frac{\rho U_c h}{\mu}}^{Re}\cdot\frac{h}{R} = \frac{gh^3}{\nu^2}\cdot\frac{h}{R} \ll 1 \quad \text{(Aptdo. 1)}$$

Cerca de $\theta = 0$, los términos convectivos son del orden: $\rho\frac{U_c^2}{\ell}$, con $\ell \ll R$

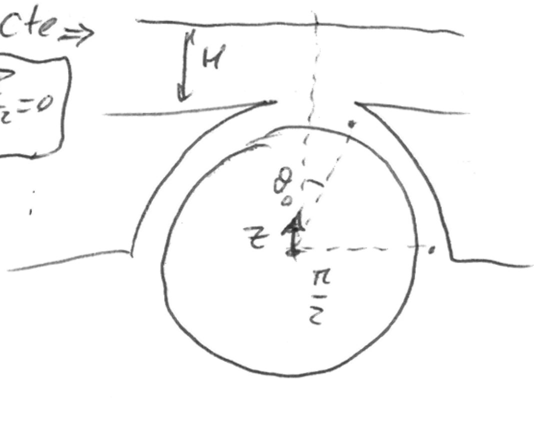
$$\frac{\rho\frac{U_c^2}{\ell}}{\mu\frac{U_c}{h^2}} = \frac{U_c h^2}{\nu\,\ell} \sim 1 \Rightarrow \ell \sim \frac{gh^4}{\nu^2}. \quad \text{En efecto } \frac{\ell}{R} = Re\cdot\frac{h}{R} \ll 1$$

Se tiene entonces: $\theta_0 = \frac{\ell}{R} \sim \frac{gh^3}{\nu^2}$ (Aptdo. 2)

(Nótese que, estrictamente hablando, esta estimación sólo es válida si $Re \gtrsim 1$. Si $Re \ll 1$, entonces como poco $\ell \sim h$, luego $\theta_0 \sim \frac{h}{R}$.)

3.- En coordenadas cilíndricas, $g_\theta = R$, $g_x = 1$: (x coordenada según el eje, no se usa aquí)

$$q = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{1}{R}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta}; \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial \theta}(q) = 0} \Rightarrow q = Cte \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \theta^2} = 0}$$



4.- En $\theta = \theta_0$: $\mathcal{P} = p + \rho g z = P_a + \rho g H + \rho g R$

$\theta = \frac{\pi}{2}$: $\mathcal{P} = P_a$

5.- Finalmente:

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = -\frac{12\mu R}{h^3}\, q \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\pi/2} (\,\cdot\,)\, d\theta \Rightarrow P(2\pi) - P(\theta_0) = -\frac{12\mu R}{h^3}\, q \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)$$

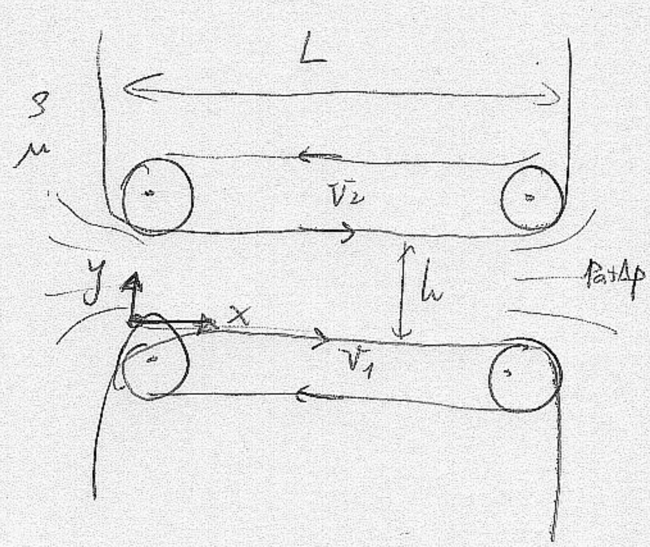
$$\cancel{P_a} - \cancel{P_a} - \rho g (H+R) = -\frac{12\mu R}{h^3}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{g h^3 (H+R)}{12\, \nu\, R \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)}}$$

NOTA: Llegados aquí, también se puede hacer $\theta_0 \ll \frac{\pi}{2}$ y obtener

$$\boxed{q = \frac{g h^3}{6\pi \nu}\left(1 + \frac{H}{R}\right)}$$

Problema 20



(1) Para que domine la viscosidad,

$$\frac{\rho u_c h^2}{\mu L} \ll 1, \text{ donde } u_c \text{ es}$$

la velocidad característica en el canal.

La sobrepresión Δp en $x = L$ tiene asociada una velocidad característica $u_{c\Delta p}$ dada por el balance $\frac{\Delta p}{L} \sim \mu \frac{u_{c\Delta p}}{h^2} \Rightarrow u_{c\Delta p} \sim \frac{h^2 \Delta p}{\mu L}$.

Si consideramos que $V_1 \sim V_2 \sim V$ (o bien sólo una de ellas si la otra es cero o mucho menor), hay dos posibilidades dependiendo del valor del parámetro

$$\lambda = \frac{h^2 \Delta p}{\mu L V}$$

(a) $\lambda \gg 1$ $(u_{c\Delta p} \gg V)$: CRITERIO $\frac{\rho \Delta p h^4}{\mu^2 L^2} \ll 1$

(b) $\lambda \ll 1$ $(u_{c\Delta p} \ll V)$: CRITERIO $\frac{\rho V h^2}{\mu L} \ll 1$

(SI $\lambda \sim O(1)$ AMBOS SON EQUIVALENTES)

Para que el sistema bombee en la dirección de las cintas, $\lambda \lesssim O(1)$, de modo que el criterio relevante en este caso es el (b)

---

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{P_\ell}{\mu} \Rightarrow u = -\frac{P_\ell y^2}{2\mu} + Ay + B$

$y = 0: u = V_1 \Rightarrow B = V_1$

$y = h: u = V_2 \Rightarrow V_2 = -\frac{P_\ell h^2}{2\mu} + Ah + V_1 \Longrightarrow A = \frac{V_2 - V_1}{h} + \frac{P_\ell h}{2\mu}$

Luego se tiene que $\boxed{u(y) = V_1 + \frac{(V_2 - V_1)y}{h} + \frac{P_\ell}{2\mu} y(h-y)}$

El caudal p.u. de envergadura es: $q = \int_0^h u(y)\,dy \Rightarrow \boxed{q = \frac{P_\ell h^3}{12\mu} + \frac{(V_1 + V_2)h}{2}}$

---

(3) $\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \Rightarrow q = \text{CONSTANTE} \xrightarrow{h = \text{CTE.}} \frac{\partial P_\ell}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$ $\begin{cases} x = 0: p = p_a \\ x = L: p = p_a + \Delta p \end{cases}$

de modo que la distribución de presión es lineal (espesor del canal constante):

$\boxed{p(x) = p_a + \frac{\Delta p}{L} x}$ y el gradiente de presión reducida es $\boxed{P_\ell = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L}}$

---

(4) Las fuerzas p.u. de envergadura del fluido sobre las cintas son:

$$\vec{F}_{1,FS} = -\int_0^L p(x)\,\vec{e}_y\,dx + \int_0^L \bar{\bar{\tau}}' \cdot \vec{e}_y\,dx$$

$$\vec{F}_{2,FS} = +\int_0^L p(x)\,\vec{e}_y\,dx + \int_0^L \bar{\bar{\tau}}' \cdot (-\vec{e}_y)\,dx$$

$$\bar{\bar{\tau}}' \cdot \vec{e}_y = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_x$$

Como sólo nos importan las fuerzas en dirección x, queda:

$$\vec{F}_{1,FS} = \mu \int_0^L \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} dx\, \vec{e}_x \quad y \quad \vec{F}_{2,FS} = -\mu \int_0^L \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} dx\, \vec{e}_x$$

Como $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{V_2 - V_1}{h} - \dfrac{\Delta p}{2\mu L}(h-2y)$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{V_2-V_1}{h} - \frac{\Delta p h}{2\mu L}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h} = \frac{V_2-V_1}{h} + \frac{\Delta p h}{2\mu L}$$

Luego
$$\vec{F}_{1,FS} = \left[\frac{\mu(V_2-V_1)}{h} - \frac{\Delta p h}{2L}\right] L\, \vec{e}_x$$
$$\vec{F}_{2,FS} = \left[\frac{\mu(V_1-V_2)}{h} - \frac{\Delta p h}{2L}\right] L\, \vec{e}_x$$

Las fuerzas pedidas son las que hemos de aplicar a las cintas para que se muevan a velocidad constante, luego son las reacciones de las que el fluido ejerce sobre las cintas:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = -\vec{F}_{1,FS} = \left[\dfrac{\Delta p h}{2} - \dfrac{\mu(V_2-V_1)L}{h}\right]\vec{e}_x \\ \vec{F}_2 = -\vec{F}_{2,FS} = \left[\dfrac{\Delta p h}{2} + \dfrac{\mu(V_2-V_1)L}{h}\right]\vec{e}_x \end{cases}$$

Mientras que las potencias invertidas en mover las cintas son:

$$\begin{cases} \dot{W}_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{V}_1 = \dfrac{\Delta p h V_1}{2} - \dfrac{\mu V_1 (V_2-V_1)L}{h} \\ \dot{W}_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{V}_2 = \dfrac{\Delta p h V_2}{2} + \dfrac{\mu V_2 (V_2-V_1)L}{h} \end{cases}$$

Siendo la potencia necesaria para accionar la bomba:

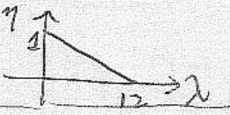
$$\dot{W} = \dot{W}_1 + \dot{W}_2 \Rightarrow \boxed{\dot{W} = \frac{(V_1+V_2)h\Delta p}{2} + \frac{(V_2-V_1)^2 \mu L}{h}}$$

5
$$\boxed{\eta = \frac{q\Delta p}{\dot{W}} = \frac{\dfrac{(V_1+V_2)h\Delta p}{2} - \dfrac{h^3 \Delta p^2}{12\mu L}}{\dfrac{(V_1+V_2)h\Delta p}{2} + \dfrac{(V_2-V_1)^2 \mu L}{h}}}$$

CASO A: $V_1 = V_2 \equiv V$

$$\eta = 1 - \frac{h^2 \Delta p}{12 \mu L V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{\lambda}{12} \quad \text{siendo} \quad \lambda = \frac{h^2 \Delta p}{\mu L V}$$



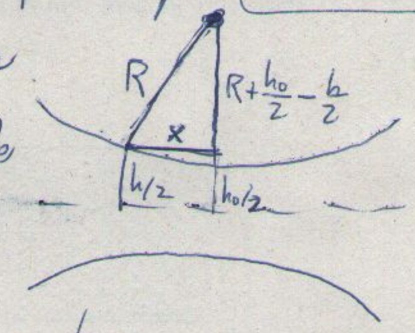
CASO B: $V_1 = 0$; $V_2 \equiv V$

$$\eta = \frac{1 - \lambda/6}{1 + 2/\lambda} \Rightarrow \eta = \frac{\lambda(1-\lambda/6)}{2+\lambda} \Rightarrow \frac{d\eta}{d\lambda} = \frac{(2+\lambda)(1-\lambda/3) - \lambda(1-\lambda/6)}{(2+\lambda)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{max}^2 + 4\lambda_{max} - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{max} = 2} \quad \text{con} \quad \boxed{\eta_{max} = \eta(\lambda_{max}) = \frac{1}{3}}$$

Problema 21

① VISCOSIDAD DOMINANTE: $\frac{\rho U_c h_o}{\mu}\frac{h_o}{L_c} \ll 1$ donde hemos usado que $h_c \sim h_o$ y L_c es la longitud característica en dirección x. Para determinar U_c usamos el balance $\frac{\Delta_L P}{L_c} \sim \mu \frac{U_c}{h_o^2} \Rightarrow U_c \sim \frac{(P_1-P_2)h_o^2}{\mu L_c}$ donde se ha usado que $\Delta_L P \sim (P_1 - P_2)$. Falta determinar L_c, que sale de la geometría de la ranura en la región donde las velocidades y diferencias de presión son importantes, esto es, la región que cumple $\boxed{h \sim h_o}$. Usando el triángulo rectángulo de la figura, se tiene



$R^2 = x^2 + \left(R + \frac{h_o - h}{2}\right)^2 \Rightarrow h(x) \simeq h_o + \frac{x^2}{R}$ donde se ha usado que h y h_o son $\ll R$. Por tanto, L_c viene dado por $\frac{L_c^2}{R} \sim h_o \Rightarrow \boxed{L_c \sim \sqrt{R h_o}}$ y se tiene

$\boxed{U_c \sim \frac{(P_1-P_2)h_o^{3/2}}{\mu R^{1/2}}}$ y el criterio de viscosidad dominante $\boxed{\frac{\rho (P_1-P_2) h_o^3}{\mu^2 R} \ll 1}$

② $Q \sim qE \sim u_c h_o E \sim \frac{(P_1-P_2)h_o^{5/2}}{\mu R^{1/2}} E$ donde q es por unidad de anchura

③ $0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ $\begin{cases} y=0: \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ [\Rightarrow \text{O BIEN } y = -\frac{h}{2}: u=0] \\ y = \frac{h}{2}: u = 0 \end{cases}$ INTEGRANDO $\Rightarrow \boxed{u = \frac{-1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}$

④ $\alpha = x \rightarrow g_\alpha = 1$
$\beta = z \rightarrow g_\beta = 1$
FLUJO 2D: $q_\beta = 0 \Rightarrow \boxed{q_\alpha = q}$ $\quad \cancel{\frac{\partial h}{\partial t}} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial q}{\partial x} = 0}$
ESTACIONARIO

$q = \int_{-h/2}^{h/2} u\,dy = 2\int_0^{h/2} u\,dy = -\frac{h^3(x)}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial x} = \text{CONSTANTE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-12\mu q}{h^3} = \frac{-12\mu q}{h_o^3}\left(1 + \frac{x^2}{R h_o}\right)^{-3} \Rightarrow P(x) - P_1 = \frac{-12\mu q}{h_o^3}\int_{-L_\infty}^{x}\left(1 + \frac{x^2}{R h_o}\right)^{-3} dx$

donde $L_\infty \sim R$ es una longitud de corte donde $P = P_1$. Usando $\xi = \frac{x}{\sqrt{R h_o}}$ se tiene $P(\xi) - P_1 = \frac{-12\mu q\sqrt{R h_o}}{h_o^3} I(\xi)$ donde hemos usado que $\frac{L_\infty}{\sqrt{R h_o}} \gg 1$. Luego: $\boxed{P(\xi) = P_1 - \frac{12\mu q R^{1/2}}{h_o^{5/2}} I(\xi)}$

⑤ El caudal sale de imponer que $P(\xi) \rightarrow P_2$ cuando $\xi \rightarrow \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow q = \frac{(P_1-P_2)h_o^{5/2}}{12\mu R^{1/2} I(\infty)} \xRightarrow{I(\infty) = \frac{3\pi}{8}} \boxed{q = \frac{2(P_1-P_2)h_o^{5/2}}{9\pi\mu R^{1/2}}}$ EN CONCORDANCIA CON EL APARTADO 2

Problema 22

Nota: $\int \operatorname{sen}^{-1}\theta \cos^{-3}\theta\, d\theta = \boxed{\frac{1}{2}\cos^{-2}\theta + \ln(\tan\theta) = I(\Theta)}$

1)

$$q_\theta = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial \Theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(g_\phi\, q_\theta\right) = \frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\frac{h^3 \sin\Theta}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial\Theta}\right) = 0$$

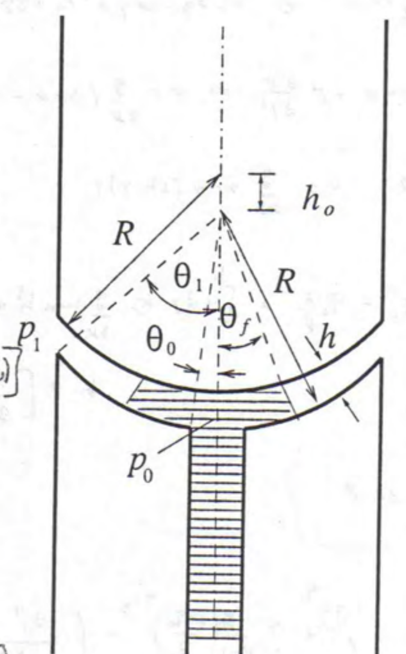
$$\cos^3\Theta \sin\Theta \frac{\partial P}{\partial\Theta} = -A$$

$$P_0 - P = A\int_{\Theta_0}^{\Theta}\frac{d\Theta}{\cos^3\Theta \sin\Theta} = A\left[I(\Theta) - I(\Theta_0)\right]$$

$$A = \frac{P_0 - P_1}{I(\Theta_f) - I(\Theta_0)}$$

$$\boxed{\frac{P - P_1}{P_0 - P_1} = \frac{I(\Theta_f) - I(\Theta)}{I(\Theta_f) - I(\Theta_0)}} \quad 3$$

$$\boxed{Q = 2\pi R \sin\Theta\, q = \frac{2\pi h_0^3}{12\mu}\frac{P_0 - P_1}{I(\Theta_f) - I(\Theta_0)}} \quad 2$$



$$\boxed{h = h_0 \cos\Theta}$$

MOV. DOMINADO POR VISCOSIDAD SI

$$\frac{\rho U_c h_0}{\mu}\frac{h_0}{R} \sim \boxed{\frac{\rho (P_0 - P_1) h_0^4}{\mu^2 R^2} \ll 1}$$

1

2) $$\boxed{F_z = -\int_0^{\Theta_1} P\, n_z\, d\sigma} = +\int_0^{\Theta_1} 2\pi R^2 \sin\Theta \cos\Theta\, P\, d\Theta$$

$$= 2\pi R^2\left\{\int_0^{\Theta_0} P_0 \sin\Theta\cos\Theta\, d\Theta + \int_{\Theta_0}^{\Theta_f} P \sin\Theta\cos\Theta\, d\Theta + \int_{\Theta_f}^{\Theta_1} P_1 \sin\Theta\cos\Theta\, d\Theta\right\}$$

1

$$\pi R^2 \sin^2\Theta_0\, P_0 + \pi R^2\left[\sin^2\Theta_1 - \sin^2\Theta_0\right] P_1$$

$$+ 2\pi R^2 \int_{\Theta_0}^{\Theta_f} (P_0 - P_1)\frac{I_f - I(\Theta)}{I_f - I_0}\, d\Theta$$

1 2

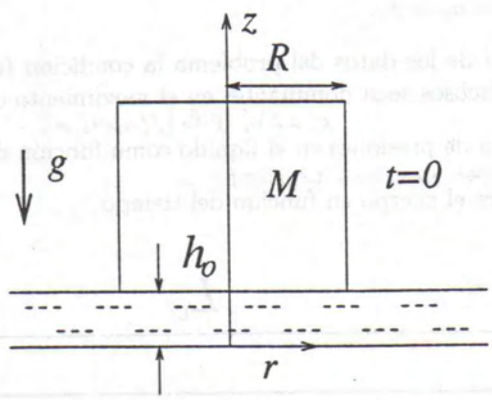
3)

$$Q\, dt = \cancel{2\pi} R \sin\Theta_f\, h_f R\, d\Theta_f = \frac{\cancel{2\pi} h_0^3}{12\mu}\frac{P_0 - P_1}{I(\Theta_f) - I(\Theta_0)}$$

$$\boxed{\int_{\Theta_0}^{\Theta_f}\left[I(\Theta_f) - I(\Theta_0)\right]\sin\Theta_f \cos\Theta_f\, d\Theta_f = \frac{h_0^2}{12\mu R^2}(P_0 - P_1)\, t} \quad 1$$

$$\boxed{t_i = \frac{12\mu R^2}{h_0^2 (P_0 - P_1)}\int_{\Theta_0}^{\Theta_1}\left[I(\Theta_f) - I(\Theta_0)\right]\sin\Theta_f \cos\Theta_f\, d\Theta_f} \quad 1$$

Problema 23



1) $M\dfrac{d^2h}{dt^2} = -Mg + F_p$

$t_0 \sim \sqrt{h_0/g}$, $U_c = R/\sqrt{h_0/g}$ ← LAS PARTICULAS FLUIDAS DEBEN RECORRER UNA DISTANCIA R EN t_0

$\rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{O TB} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rq) + \frac{dh}{dt} = 0 \\ \frac{U_c h_0}{R} \sim \frac{h_0}{t_0} \end{array} \right)$,

SI DOMINA VISCOSIDAD

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\Delta P \sim \frac{\mu R^2}{\sqrt{h_0/g}\, h_0^2}} \sim \frac{\mu R^2}{h_0^{5/2}}$$

CRITERIO PARA QUE DOMINE VISCOSIDAD

$$\underbrace{\rho\frac{du}{dt}}_{\rho\frac{U_c}{t_0}} + \underbrace{\rho u\frac{du}{dr} + \rho v\frac{du}{dz}}_{\rho\frac{U_c^2}{R}} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \underbrace{\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\frac{\mu U_c}{h_0^2}} + \text{TERMINOS PEQUEÑOS} \rightarrow \boxed{\frac{h_0^{3/2} g^{1/2}}{\nu} \ll 1}$$

2)

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial P}{\partial r}\, y(y-h) \rightarrow q = \int_0^h u\, dz = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial P}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(qr) + \frac{dh}{dt} = 0$$

INTEGRANDO SE OBTIENE $\boxed{P - P_a = \frac{3\mu}{h^3}\frac{dh}{dt}(r^2 - R^2)}$

3)

$$F_p = \int_0^R (P - P_a)\, 2\pi r\, dr = -\frac{3\pi}{2}\frac{\mu R^4}{h^3}\frac{dh}{dt}$$

$$M\frac{d^2h}{dt^2} = -Mg - \frac{3\pi}{2}\frac{\mu R^4}{h^3}\frac{dh}{dt} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \frac{d^2\bar{h}}{d\tau^2} + \Lambda\frac{1}{\bar{h}^3}\frac{d\bar{h}}{d\tau} = -1 \\ \bar{h}(0) = 1 \\ \frac{d\bar{h}}{d\tau}(0) = 0 \end{array}}, \quad \boxed{\bar{h} = h/h_0}, \ \boxed{\tau = t/\sqrt{h_0/g}}$$

$$\boxed{\Lambda = \frac{3\pi}{2}\frac{\mu R^4}{M h_0^{5/2} g^{1/2}}}$$