1. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1. ESPACIOS VECTORIALES

1. Analizar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales.

   a) $A = \{(2x, x, -7x)/x \in \mathbb{R}\}$
   El conjunto A es una recta vectorial escrita en forma paramétrica. Se deja al alumno comprobar que A es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Debe demostrarse que, para cualesquiera dos vectores $\bar{u} = (2x_1, x_1, -7x_1) \in A$, $\bar{v} = (2x_2, x_2, -7x_2) \in A$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, se cumple que $\bar{u} + \bar{v} \in A$ y que $\lambda\bar{u} \in A$.

   b) $A = \{(x, y, z)/xy = 1\}$
   El conjunto A no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Basta comprobar que el elemento neutro $\bar{0} = (0, 0, 0)$ no está en A.

   c) $A = \{(x, y, z)/x = y \text{ ó } x = z\}$
   El conjunto A es la unión de dos planos vectoriales y no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Para ello, basta elegir dos vectores que estén en A y cuya suma no permanezca en A. Por ejemplo, sean $\bar{u} = (1, 1, 0) \in A$ y $\bar{v} = (1, 2, 1) \in A$. Es claro que $\bar{u} + \bar{v} \notin A$.

   d) $A = \{(x, y, z)/x + y + z = 0 \text{ y } x - y - z = 0\}$
   El conjunto A es una recta vectorial (intersección de dos planos vectoriales) y sí es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Se deja al alumno comprobarlo (véase el ejercicio 5 para una demostración de este resultado en un ámbito más general).

2. Analizar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}_n[t]$ (conjunto de los polinomios con grado menor o igual a $n \geq 1$, con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{R}$).

   a) El conjunto A de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado n y el polinomio cero.
   El conjunto A no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_n[t]$. Basta elegir los polinomios $p(t) = t^n \in A$ y $q(t) = t^n + 1 \in A$. Es claro que $q(t) - p(t) \notin A$.

   b) $A = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t]/3p(0) + p(1) = 1\}$.
   El conjunto A no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_n[t]$ ya que el elemento neutro (el polinomio idénticamente nulo) no está en A.

   c) $A = \{p(t) \in \mathbb{R}_n[t]/p'(0) + p''(0) = 0\}$
   El conjunto A es subespacio vectorial de $\mathbb{R}_n[t]$. Se escogen dos polinomios $p(t), q(t) \in A$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$(p+q)'(0)+(p+q)''(0)=p'(0)+q'(0)+p''(0)+q''(0)=0$$

Esto demuestra que $p+q \in A$. Por otro lado,

$$(\lambda p)'(0)+(\lambda p)''(0)=\lambda(p'(0)+p''(0))=0$$

con lo que $\lambda p \in A$.

3. Analizar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   a) $A=\{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) / det(M)=0\}$.
   El conjunto A no es subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Basta considerar las matrices diagonales

$$M_1=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

   Es claro que $M_1, M_2 \in A$ pero $M_1+M_2 \notin A$.

   b) $A=\{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) / det(M)\neq 0\}$
   El conjunto A no es subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ya que el elemento neutro (la matriz nula) no pertenece a A.

   c) $A=\{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) / tr(M)=0\}$.
   El conjunto A es subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Consideremos dos matrices M_1 y M_2 con $tr(M_1)=tr(M_2)=0$. Entonces $tr(M_1+M_2)=tr(M_1)+tr(M_2)=0$, con lo que se prueba que $M_1+M_2 \in A$. Es igualmente fácil ver que, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ y $M_1 \in A$, entonces $\lambda M_1 \in A$.

4. Sea $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de las funciones reales de variable real. Estudiar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   a) $W=\{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) / f$ es continua en el intervalo $(a,b)\}$.
   Como la suma de funciones continuas es continua y el producto por un escalar de una función continua es otra función continua, se tiene que W es subespacio vectorial de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

   b) $W=\{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) / f(1)=f(2)\}$.
   El conjunto W es subespacio vectorial de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La demostración se deja al lector.

c) $W = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f$ es creciente en el intervalo $(a, b)\}$.
El conjunto W no es subespacio vectorial de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ya que el elemento neutro (la función idénticamente nula) no pertenece a W.

5. Se considera el sistema lineal homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas sobre el cuerpo $\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right\}$$

Demostrar que el conjunto W de soluciones es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Sean $\bar{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, $\quad \bar{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ dos soluciones del conjunto W. Se tiene que $A\bar{r} = \bar{0}$ y $A\bar{s} = \bar{0}$, siendo A la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si queremos ver que $\bar{r} + \bar{s} \in W$ sólo tendremos que comprobar que $A(\bar{r} + \bar{s}) = \bar{0}$, algo que resulta obvio ya que $A(\bar{r} + \bar{s}) = A\bar{r} + A\bar{s} = \bar{0}$. De igual modo se concluye que, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\bar{r} \in W$, entonces $\lambda\bar{r} \in W$.

6. El rango de una matriz A coincide siempre con el número máximo de vectores fila linealmente independientes y con el número máximo de vectores columna linealmente independientes. Estudiar, utilizando este hecho, si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes:

a) $\{(2, -1, 4), (4, -2, 8)\}$.
No son linealmente independientes ya que $r(A) = 1$, siendo A la matriz que tiene por filas (o columnas) a los vectores de la familia dada.

b) $\{(2, -1, 4), (4, 1, 8), (1, 0, 3)\}$.
Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Se tiene que, escalonando la matriz A,

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 3,$$

de manera que los tres vectores son linealmente independientes.

c) $\{(2,-1,4,0),(0,-3,1,5),(4,1,7,-5)\}$.

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$. Se tiene, escalonando la matriz,

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

de modo que los vectores son linealmente dependientes.

d) $\{(1,-1,1,0),(-1,0,1,1),(0,3,-1,1),(6,1,2,0)\}$.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Al escalonar la matriz se obtiene

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4,$$

con lo que los vectores son linealmente independientes.

7. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los vectores $u = (1,2,1), v = (1,3,2), x = (1,1,0), y = (3,8,5)$. Demostrar que $L(\{x,y\}) = L(\{u,v\})$.

Sean $W_1 = L(\{x,y\})$ y $W_2 = L(\{u,v\})$. Es claro que $dim(W_1) = dim(W_2) = 2$. Será suficiente ver que

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

esto es, el máximo número de columnas linealmente independientes es 2, lo que implica que ambos planos, W_1 y W_2, son el mismo plano.

8. Determinar si las siguientes familias de vectores son sistemas de generadores de $\mathbb{R}^3$. En los casos afirmativos, obtener una base.

   a) $\{(1,1,0),(2,3,8)\}$
   No es sistema de generadores (deben ser al menos 3 vectores).

   b) $\{(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)\}$
   Como $r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$, se tiene que los tres vectores son sistema de generadores (y base) de $\mathbb{R}^3$.

   c) $\{(2,-1,3),(4,1,2),(8,-1,8)\}$.
   Como $r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 8 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} = 2$, se tiene que los tres vectores no son sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.

   d) $\{(1,3,3),(1,3,4),(1,4,3),(6,2,1)\}$.
   Como

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & -17 \end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -16 \end{pmatrix} = 3,$$

   el conjunto de cuatro vectores es sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$. Tendremos que coger tres de ellos que sean linealmente independientes para obtener una base. Si los vectores han sido colocados en forma de columna y se ha escalonado la matriz, basta considerar las columnas asociadas a las cabeceras de la matriz escalonada. Las posiciones de estas columnas (en este caso son las tres primeras) se corresponden con las posiciones de los vectores columna de la matriz inicial que dan lugar a una base. De manera que una base de entre la familia de cuatro vectores podría ser la formada por los tres primeros (tal como aparecen en forma de columna en la matriz que escalonamos).

9. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_n[t]$ de los polinomios con grado menor o igual que n sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, se considera el conjunto de vectores

$$B = \{1, t, t^2, ..., t^n\}$$

   Probar que B es una base de $\mathbb{R}_n[t]$.

Veamos primero que son sistema de generadores. Dado un polinomio $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathbb{R}_n[t]$, es claro que $p(t)$ se puede escribir como combinación lineal de los elementos de la familia B.

Para probar la independencia lineal, recurrimos a la definición y consideramos la igualdad

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = 0$$

La única posibilidad de que esto sea cierto para todo valor de t es que $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

10. En el espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de las matrices de orden 2×2 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ se considera el conjunto de vectores

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Probar que B es una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Veamos primero que son sistema de generadores. Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, es claro que A se puede escribir en la forma

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para ver que son linealmente independientes, únicamente hace falta aplicar la definición de independencia lineal. Si se tiene la igualdad

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $a = b = c = d = 0$.

11. Determinar la dimensión y una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ engendrado por los vectores

$$\{(2, -1, 4, 0), (0, -3, 1, 5), (4, 1, 7, -5)\}$$

Escalonamos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensión es 2 y una base es la formada por cualesquiera dos vectores linealmente independientes de la familia que nos dan o por la familia de vectores no nulos que aparecen en la matriz obtenida de escalonar A. En este caso escogemos como base

$$B = \{(2, -1, 4, 0), (0, -3, 1, 5)\}.$$

12. Sea
$W = L\{(1, 2, -1, 3, 4), (2, 4, -2, 6, 8), (1, 3, 2, 2, 6), (1, 4, 5, 1, 8), (2, 7, 3, 3, 9)\}$
Hallar un subconjunto de los vectores que sea base de W.

Se nos pide que elijamos, de entre los vectores que nos dan, una familia que sea base de la envolvente. Existen varios procedimientos. Se podrían escribir los vectores en forma de filas de una matriz, escalonar la misma y, estudiando las operaciones elementales realizadas, obtener los vectores que dan lugar a la base.

Otra técnica alternativa, que seguiremos ahora, es la siguiente: calculamos la dimensión escribiendo los vectores en forma de columnas de una matriz que escalonaremos. Las posiciones de las columnas asociadas a las cabeceras de la matriz escalonada serán las posiciones de las columnas de la matriz inicial que dan lugar a la base buscada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que el rango es tres. De modo que deben elegirse 3 vectores linealmente independientes de la familia dada. Las columnas asociadas a las cabeceras de la matriz escalonada son la primera, la tercera y la quinta, de manera que nos quedamos con las columnas primera, tercera y quinta de la matriz inicial A. Esto quiere decir que una base asociada a W, y elegida entre los vectores que nos han dado, será

$$B_W = \{(1, 2, -1, 3, 4), (1, 3, 2, 2, 6), (2, 7, 3, 3, 9)\}$$

13. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales

$$W_1 = L(\{(1, -1, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, -2, 1, 2)\})$$

$$W_2 = L(\{(0, -1, 1, 1), (1, -2, 1, 2)\})$$

Hallar $dim(W_1 \cap W_2)$ y $dim(W_1 + W_2)$ así como las ecuaciones implícitas y paramétricas de W_1, W_2 y $W_1 + W_2$.

Estudiemos W_1. La dimensión de W_1 es

$$dim(W_1) = r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Una base para W_1 es $B_{W_1} = \{(1, -1, 0, 1), (0, -1, 1, 1)\}$.

Las ecuaciones paramétricas de W_1 serán

$$W_1 \equiv \begin{cases} x_1 &= \lambda \\ x_2 &= -\lambda - \mu \\ x_3 &= \mu \\ x_4 &= \lambda + \mu \end{cases}$$

Para obtener las ecuaciones cartesianas, consideramos un vector $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W_1$. Entonces se tiene

$$2 = r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 + x_1 & x_3 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} =$$

$$= r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 & x_2 + x_4 \end{pmatrix}$$

De manera que, al permanecer invariante el valor del rango, debe ocurrir $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y $x_2 + x_4 = 0$. Éstas son las ecuaciones cartesianas de W_1. Escribimos

$$W_1 \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

Otro modo de obtener las ecuaciones cartesianas de W_1 es considerar $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W_1$ y la igualdad

$$2 = r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Los menores de orden 3 son todos nulos y dan lugar a las ecuaciones cartesianas de W_1. Sin embargo, no todas serán independientes. Basta escoger un menor no nulo de orden máximo (de orden 2 en este caso) y extenderlo a todos los menores de una unidad mayor que sea posible.

Así, se puede elegir el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

y extenderlo a los menores de orden 3

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

Estas dos igualdades dan lugar a las ecuaciones cartesianas de W_1, que ya habíamos calculado con otro método:

$$W_1 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Por otro lado, resulta claro que $dim(W_2) = 2$, y una base suya es $B_{W_2} = \{(1, -2, 1, 2), (0, -1, 1, 1)\}$.

Además, como $W_1 + W_2 = L(\{B_{W_1} \cup B_{W_2}\})$, se tiene que

$$dim(W_1 + W_2) = r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Se deduce entonces que $W_1 = W_2 = W_1 + W_2 = W_1 \cap W_2$. Las ecuaciones cartesianas, paramétricas y dimensiones de $W_1 \cap W_2$ y de $W_1 + W_2$ serán las de W_1.

14. Determinar, en cada caso, si los vectores que se dan son una base de $\mathbb{R}^4$.

    a) $\{(2, 1, 0, -1), (1, 2, 1, 0)\}$.
    b) $\{(0, 1, 2, -1), (1, 0, 1, -1), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 1, 2)\}$.
    c) $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, -1, 1), (2, 1, 1, 0), (1, -1, 2, -1)\}$.

    Si ahora llamamos V_1, V_2 y V_3 a los subespacios vectoriales generados, respectivamente, por los vectores de a), b) y c), determinar: $dim(V_i)$, $i = 1, 2, 3$; $dim(V_i \cap V_j)$, $i \neq j$, y ecuaciones de la intersección; $dim(V_i + V_j)$, $i \neq j$, y ecuaciones de $V_i + V_j$ ¿En qué casos $\mathbb{R}^4 = V_i \oplus V_j$?

En el caso a) no hay base y $dim(V_1) = 2$. En el caso b) se tiene que

$$r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 4,$$

de modo que sí son base de $\mathbb{R}^4$ y $dim(V_2) = 4$, esto es, $V_2 = \mathbb{R}^4$. En el caso c) se tiene que

$$r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

de manera que en este caso no tenemos base y $dim(V_3) = 3$.

A partir de lo observado, es claro que $V_1 \cap V_2 = V_1$ y $V_2 \cap V_3 = V_3$, con lo que $dim(V_1 \cap V_2) = dim(V_1) = 2$ y $dim(V_2 \cap V_3) = dim(V_3) = 3$.

Las ecuaciones cartesianas de $V_1 \cap V_2$ son las de V_1. Vamos a calcularlas. Sea $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_1$. Entonces

$$2 = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Si se escogen los menores

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

se obtienen las ecuaciones cartesianas de $V_1 = V_1 \cap V_2$

$$V_1 = V_1 \cap V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$V_1 = V_1 \cap V_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda + 2\mu \\ x_2 & = & 2\lambda + \mu \\ x_3 & = & \lambda \\ x_4 & = & -\mu \end{array} \right.$$

Determinemos ahora las ecuaciones cartesianas de $V_2 \cap V_3 = V_3$. Sea $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_3$. Entonces

$$3 = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

de modo que la ecuación cartesiana de $V_2 \cap V_3 = V_3$ es

$$V_2 \cap V_3 = V_3 \equiv \{-x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

Calculemos $dim(V_1 \cap V_3)$ y sus ecuaciones cartesianas:

$$dim(V_1 \cap V_3) = dim(V_1) + dim(V_3) - dim(V_1 + V_3)$$

Se puede comprobar que

$$dim(V_1 + V_3) = r \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

de modo que $dim(V_1 \cap V_3) = 2 + 3 - 4 = 1$.

Las ecuaciones cartesianas de $V_1 \cap V_3$ serán la unión de las ecuaciones de V_1 y las de V_3, esto es,

$$V_1 \cap V_3 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_4 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

A continuación escalonamos la matriz asociada al sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

de manera que se obtiene el sistema escalonado equivalente

$$V_1 \cap V_3 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 0 \\ 2x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Se tienen tres incógnitas cabeceras (x_1, x_2, x_3) y un parámetro (x_4). Las ecuaciones paramétricas serán

$$V_1 \cap V_3 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & -\frac{5}{2}\lambda \\ x_2 & = & -2\lambda \\ x_3 & = & -\frac{1}{2}\lambda \\ x_4 & = & \lambda \end{array} \right.$$

Por otro lado, como $V_2 = \mathbb{R}^4$, emtonces $V_1 + V_2 = V_2 + V_3 = \mathbb{R}^4$, con lo que $dim(V_1 + V_2) = dim(V_2 + V_3) = 4$. Además, por la fórmula de las dimensiones, $dim(V_1 + V_3) = dim(V_1) + dim(V_3) - dim(V_1 \cap V_3) = 2 + 3 - 1 = 4$, lo cual implica que $V_1 + V_3 = \mathbb{R}^4$.

Las ecuaciones paramétricas serán

$$V_1 + V_2 = V_2 + V_3 = V_1 + V_3 = \mathbb{R}^4 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda_1 \\ x_2 & = & \lambda_2 \\ x_3 & = & \lambda_3 \\ x_4 & = & \lambda_4 \end{array} \right.$$

En ninguno de los casos es $\mathbb{R}^4 = V_i \oplus V_j$, ya que $V_i \cap V_j \neq \bar{0}$ para todo $i \neq j$.

15. Sean U, V y W los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(a,b,c)/a+b+c = 0\}, \quad V = \{(a,b,c)/a = c\}, \quad W = \{(0,0,c)/c \in \mathbb{R}\}$$

Mostrar que:

a) $\mathbb{R}^3 = U + V$.

b) $\mathbb{R}^3 = U + W$.

c) $\mathbb{R}^3 = V + W$.

¿En qué casos es directa la suma?

Probemos a). Basta ver que $dim(U+V)=3$. Por la fórmula de las dimensiones, $dim(U+V)=dim(U)+dim(V)-dim(U\cap V)$. La dimensión de U es $dim(U)=3-r\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}=2$. La dimensión de V es $dim(V)=3-r\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}=2$. Por otro lado, $dim(U\cap V)=3-r\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=1$, con lo que $dim(U+V)=2+2-1=3$. En este caso no hay suma directa ya que el subespacio intersección es una recta.

Probemos b). Basta ver que $dim(U+W)=3$. Es claro que $W=L((0,0,1))$ y que $dim(W)=1$. Las ecuaciones cartesianas de W son

$$W\equiv\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0\\ b & = & 0\end{array}\right.$$

de modo que

$$dim(U\cap W)=3-r\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=0$$

Esto implica que $dim(U+W)=2+1-0=3$. En este caso sí hay suma directa ya que, al ser $dim(U\cap W)=0$, se tiene que $U\cap W=\bar{0}$.

Probemos c). Basta ver que $dim(V+W)=3$. Se tiene que

$$dim(V\cap W)=3-r\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=0$$

con lo que $dim(V+W)=2+1-0=3$. En este caso sí hay suma directa.

16. Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$U=L(\{(1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1)\})$$

$$V=L(\{(1,2,2,-2),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3)\})$$

Hallar:

a) $dim(U+V)$ y ecuaciones de $U+V$.

b) $dim(U\cap V)$ y ecuaciones de $U\cap V$.

Resolvamos el apartado a). Como en el apartado b) necesitaremos calcular bases para U y para V, las obtenemos ahora.

$$dim(U) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Una base para U es $B_U = \{(1,1,0,-1),(0,1,3,1)\}$.

Por otro lado,

$$dim(V) = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

con lo que una base para V es $B_V = \{(1,2,2,-2),(0,-1,-2,1)\}$.

Como consecuencia, se tiene que

$$dim(U+V) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

y una base de $U+V$ será la formada por los vectores

$$B_{U+V} = \{(1,1,0,-1),(0,1,3,1),(0,0,1,2)\}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$U+V \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda_1 \\ x_2 & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 & = & 3\lambda_2 + \lambda_3 \\ x_4 & = & -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 \end{array} \right.$$

Para obtener las ecuaciones cartesianas, se considera un vector $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U+V$ y se observa que

$$3 = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Esto da lugar a la ecuación implícita

$$U + V \equiv \{-4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$$

Resolvamos el apartado b). La dimensión de la intersección de U y V es

$$dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U + V) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Las ecuaciones cartesianas se obtienen uniendo las cartesianas de U con las de V.

Calculemos en primer lugar las ecuaciones de U. Sea $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$. Se tiene

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 3,$$

de modo que, escogiendo un menor no nulo de orden máximo, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, y extendiéndolo a todos los menores de orden 3 que sea posible, se obtienen las ecuaciones cartesianas de U:

$$U \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Calculemos ahora las ecuaciones de V. Sea $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V$. Se tiene

$$r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 3,$$

de modo que, escogiendo un menor no nulo de orden máximo, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, y extendiéndolo a todos los menores de orden 3 que sea posible, se obtienen las ecuaciones cartesianas de V:

$$V \equiv \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

De este modo, las ecuaciones cartesianas de $U \cap V$ son

$$U \cap V \equiv \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_4 & = & 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Si escalonamos la matriz asociada al sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el sistema escalonado equivalente es

$$U \cap V \equiv \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_4 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Las incógnitas principales son x_1, x_2, x_3 y el parámetro es x_4, de modo que las ecuaciones paramétricas son

$$U \cap V \equiv \begin{cases} x_1 & = & -\lambda \\ x_2 & = & -\lambda \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & \lambda \end{cases}$$

17. Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - z = 0, y + t = 0\}$$

$$W_2 = L(\{(0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, -1)\})$$

Calcular :

a) $dim(W_1)$ y $dim(W_2)$.

b) $dim(W_1 \cap W_2)$ y ecuaciones de $W_1 \cap W_2$. ¿Es $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$?

c) Hallar $dim(W_1 + W_2)$.

Resolvamos el caso a). Se tiene

$$dim(W_1) = 4 - r\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{y}$$

$$dim(W_2) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Estudiemos el caso b). Primero calculamos las ecuaciones de $W_1 \cap W_2$. Para ello basta obtener las de W_2. Sea $(x, y, z, t) \in W_2$. Entonces

$$2 = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

lo cual da lugar, si escogemos el menor no nulo de orden máximo $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ y lo extendemos a todos los menores de orden 3 que podamos, a las ecuaciones

$$W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

De este modo, las ecuaciones cartesianas de $W_1 \cap W_2$ son

$$W_1 \cap W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - z & = & 0 \\ y + t & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

El sistema escalonado asociado es

$$W_1 \cap W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - z & = & 0 \\ y + t & = & 0 \\ z + t & = & 0 \end{array} \right.$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$W_1 \cap W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\lambda \\ y & = & -\lambda \\ z & = & -\lambda \\ t & = & \lambda \end{array} \right.$$

Resulta $dim(W_1 \cap W_2) = 1$. por lo que no hay suma directa.

Resolvamos el apartado c). Por la fórmula de las dimensiones, $dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 1 = 3$.

18. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y = 0, z + t = 0\}$$

$$W_2 = L(\{(1, 1, -2, 2), (1, 0, -1, 0)\}).$$

Calcular ecuaciones paramétricas, implícitas y bases de $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$. ¿Es $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$?

Las ecuaciones implícitas de W_1 vienen dadas en el enunciado del ejercicio. Las paramétricas son

$$W_1 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & -\mu \\ t & = & \mu \end{array} \right.$$

Una base de W_1 es $B_{W_1} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}$.

Una base de W_2 es $B_{W_2} = \{(1, 1, -2, 2), (1, 0, -1, 0)\}$. Las ecuaciones paramétricas son

$$W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda + \mu \\ y & = & \lambda \\ z & = & -2\lambda - \mu \\ t & = & 2\lambda \end{array} \right.$$

Obtengamos las ecuaciones cartesianas de W_2. Dado $(x, y, z, t) \in W_2$,

$$2 = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

Al escoger el menor no nulo de orden máximo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ y extenderlo a todos los menores posibles de orden 3, resulta

$$W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x + y + z & = & 0 \\ 2y - t & = & 0 \end{array} \right.$$

Las ecuaciones cartesianas de $W_1 \cap W_2$ son

$$W_1 \cap W_2 \equiv \begin{cases} x - y & = 0 \\ z + t & = 0 \\ x + y + z & = 0 \\ 2y - t & = 0 \end{cases}$$

Si escalonamos la matriz asociada al sistema, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$W_1 \cap W_2 \equiv \begin{cases} x - y & = 0 \\ 2y + z & = 0 \\ z + t & = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$W_1 \cap W_2 \equiv \begin{cases} x & = -\lambda \\ y & = -\lambda \\ z & = -2\lambda \\ t & = 2\lambda \end{cases}$$

Una base es $B_{W_1 \cap W_2} = \{(-1, -1, -2, 2)\}$.

Obtengamos una base de $W_1 + W_2$. Por la fórmula de las dimensiones sabemos que $dim(W_1 + W_2) = 2 + 2 - 1 = 3$. Como $W_1 + W_2 = L(\{(1,1,0,0), (0,0,-1,1), (1,1,-2,2), (1,0,-1,0)\})$ basta escoger tres vectores de la envolvente lineal que sean linealmente independientes para tener una base, por ejemplo

$$B_{W_1+W_2} = \{(1,1,0,0), (0,0,-1,1), (1,0,-1,0)\}.$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$W_1 + W_2 \equiv \begin{cases} x & = \lambda_1 + \lambda_3 \\ y & = \lambda_1 \\ z & = -\lambda_2 - \lambda_3 \\ t & = \lambda_2 \end{cases}$$

La ecuación cartesiana se obtiene considerando $(x, y, z, t) \in W_1 + W_2$ y observando que

$$3 = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}.$$

Resulta $W_1 + W_2 \equiv \{-x + y - z - t = 0\}$. Es evidente que no hay suma directa.

19. Sean

$$W_1 = L(\{(-1,0,0,1),(0,-1,-1,1),(0,1,-1,0)\}),$$

$$W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x + t = 0\}.$$

a) Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de W_2.

b) Dar bases de $W_1 \cap W_2$ y de $W_1 + W_2$.

Resolvamos el apartado a). La ecuación implícita de W_2 es $W_2 \equiv \{x + t = 0\}$. Al pasar a paramétricas, se tiene

$$W_2 \equiv \begin{cases} x &= -\lambda_3 \\ y &= \lambda_1 \\ z &= \lambda_2 \\ t &= \lambda_3 \end{cases}$$

Una base para W_2 es $B_{W_2} = \{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$.

Resolvamos el apartado b). En primer lugar, encontremos una base de

$$W_1 + W_2 = L(\{(-1,0,0,1),(0,-1,-1,1),(0,1,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\})$$

Escalonamos la matriz que tiene por filas a los vectores generadores de $W_1 + W_2$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto demuestra que $dim(W_1 + W_2) = 4$, de modo que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$. Una base puede ser la canónica de $\mathbb{R}^4$.

La dimensión de $W_1 \cap W_2$ es, por la fórmula de las dimensiones, $dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 3 - 4 = 2$. Para obtener una base, determinamos antes sus ecuaciones cartesianas.

Primero hallamos las ecuaciones implícitas de W_1. Sea $(x, y, z, t) \in W_1$. Entonces

$$3 = r \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix},$$

de modo que $W_1 \equiv \{2x + y + z + 2t = 0\}$.

Las ecuaciones implícitas de $W_1 \cap W_2$ son

$$W_1 \cap W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y + z + 2t & = & 0 \\ x + t & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y + z + 2t & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

Al pasar a paramétricas, queda

$$W_1 \cap W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -\lambda_2 \\ y & = & -\lambda_1 \\ z & = & \lambda_1 \\ t & = & \lambda_2 \end{array} \right.$$

de manera que una base será $B_{W_1 \cap W_2} = \{(0, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$.

20. En el espacio vectorial real $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ se consideran los subespacios vectoriales

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) / a + b + c + d = 0 \right\}$$

$$W_2 = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Calcular una base, ecuaciones implícitas y paramétricas de W_1, W_2, $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

Si fijamos la base canónica de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$,

$$B_c = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y trabajamos con coordenadas respecto de B_c, el subespacio W_1 tiene ecuación cartesiana $W_1 \equiv \{x + y + z + t = 0\}$ (hemos cambiado a, b, c, d por x, y, z, t). Por otro lado, el subespacio W_2 se puede escribir como

$$W_2 = L((1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1)) \text{ con coordenadas respecto de } B_c$$

Los vectores $(1,1,1,1),(0,0,0,1)$ representan las coordenadas de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de la base B_c. De este modo, trabajando con las coordenadas, manipulamos vectores de $\mathbb{R}^4$ en vez de matrices.

Las ecuaciones paramétricas de W_1 son

$$W_1 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ y & = & \lambda_1 \\ z & = & \lambda_2 \\ t & = & \lambda_3 \end{array} \right.$$

Una base de W_1 es

$B_{W_1} = \{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ con coordenadas respecto de B_c

De modo que

$$B_{W_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Una base de W_2 es

$$B_{W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Las coordenadas de estas matrices respecto de B_c son $(1,1,1,1),(0,0,0,1)$, de modo que las ecuaciones paramétricas de W_2 son

$$W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda_1 \\ y & = & \lambda_1 \\ z & = & \lambda_1 \\ t & = & \lambda_1 + \lambda_2 \end{array} \right.$$

Determinemos ahora las ecuaciones cartesianas de W_2. Sea $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in W_2$. Entonces, trabajando con coordenadas,

$$2 = r \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$$

Escogiendo un menor no nulo de orden máximo, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, y extendiéndolo a todos los menores de orden 3 posibles, se tienen las ecuaciones cartesianas de W_2,

$$W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x - z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

Estudiemos ahora $W_1 + W_2$. Al trabajar en coordenadas:

$$W_1 + W_2 = L(\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1),(1,1,1,1),(0,0,0,1)\})$$

No debe olvidarse que estos vectores representan las coordenadas de matrices respecto de B_c. Si se calcula el rango de la matriz que tiene a estos vectores por filas (o columnas), resulta

$$r \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

Debido a que $dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R})) = 4$, deducimos que $W_1 + W_2 = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Una base de $W_1 + W_2$ puede ser la base canónica B_c con la que estamos trabajando.

Las ecuaciones paramétricas serán

$$W_1 + W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda_1 \\ y & = & \lambda_2 \\ z & = & \lambda_3 \\ t & = & \lambda_4 \end{array} \right.$$

Falta estudiar $W_1 \cap W_2$. La dimensión es $dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 2 - 4 = 1$. Calculemos las ecuaciones implícitas.

$$W_1 \cap W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x + y + z + t & = & 0 \\ x - z & = & 0 \\ y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

En este caso no es necesario escalonar el sistema para pasar a paramétricas ya que resulta trivial. Al tener un solo parámetro, podemos suponer que es $x = \lambda$ y obtenemos:

$$W_1 \cap W_2 \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \lambda \\ y & = & \lambda \\ z & = & \lambda \\ t & = & -3\lambda \end{array} \right.$$

Una base de $W_1 \cap W_2$ es $B_{W_1 \cap W_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\}$

21. Dada la base de $\mathbb{R}^3$, $B = \{v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,2), v_3 = (1,2,3)\}$, hallar las coordenadas del vector $x = (6,9,14)$ en dicha base, determinando previamente la matriz de cambio de base $P = M(B_c, B)$ de la base canónica B_c en la base B.

    Resulta

$$P = M(B_c, B) = M(B, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    Dado un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$, denotamos por X_B y por X_{B_c} a las coordenadas de $\bar{x}$ respecto de las bases B y B_c respectivamente. Dado que $X_B = M(B_c, B)X_{B_c}$, obtenemos

$$X_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

22. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$B_1 = \{(1,0,1), (-1,1,1), (1,-1,0)\} \text{ y } B_2 = \{(2,1,1), (1,1,1), (1,-1,1)\}$$

    a) Calcular la matriz de cambio de base de B_2 a B_1.
    b) Calcular las coordenadas en la base B_1 del vector cuyas coordenadas en B_2 son $(3,-2,2)$.

    Resolvamos el apartado a). Para calcular $M(B_2, B_1)$ basta escribir los vectores de la base B_2 en función de los vectores de B_1. Las coordenadas obtenidas serán las columnas de la matriz pedida. Esto implica resolver tres sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, algo que puede resultar demasiado costoso. Es preferible obtener dicha matriz de un modo indirecto.

    Dado un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ con coordenadas X_{B_1}, X_{B_2} y X_{B_c} respecto de las bases B_1, B_2 y la canónica B_c respectivamente, se tiene

$$X_{B_1} = M(B_2, B_1)X_{B_2} = M(B_c, B_1)M(B_2, B_c)X_{B_2}$$

    La última igualdad se obtiene de observar que $M(B_2, B_c)X_{B_2} = X_{B_c}$ y, por tanto, $M(B_c, B_1)M(B_2, B_c)X_{B_2} = X_{B_1}$.

    En consecuencia, se deduce la igualdad

$$M(B_2, B_1) = M(B_c, B_1)M(B_2, B_c).$$

    Obtendremos $M(B_2, B_1)$ calculando las otras dos matrices.

Es claro que

$$M(B_2, B_c) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M(B_c, B_1) = M(B_1, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$M(B_2, B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Veamos el apartado b). Se nos pide obtener las coordenadas de un vector $\bar{x}$ con respecto a la base B_1, X_{B_1}, sabiendo que sus coordenadas respecto de B_2 son $X_{B_2} = (3, -2, 2)$. Como $X_{B_1} = M(B_2, B_1)X_{B_2}$,

$$X_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$